Projet Virgo - CCP TPC 2015.

1. L'objectif est de détecter des ondes gravitationnelles, produites par exemple par des paires de trous noirs en rotation s'effondrant l'un sur l'autre (coalescence) -

Le projet tire son nom de l'amas de la Vierge, amas de galaxies. (doc A2).

2. Les fréquences allant de 10 à 10^4 Hz, les longueurs d'onde vont de

$$\lambda_1 = \frac{3.10^8}{10^4} = 30 \text{ km} \quad \text{à} \quad \lambda_2 = \frac{3.10^8}{10} = 30000 \text{ km} -$$

Les bras de l'interféromètre (doc A4 = 3 km) restent de dimensions très inférieures à λ ; on peut donc supposer l'amplitude de l'onde uniforme sur le dispositif.

3. $$\underline{\varepsilon} = \frac{\text{taille d'un atome}}{\text{distance terre-lune}} = \frac{10^{-10}}{384.10^6} \simeq \underline{3.10^{-19}} .$$

La sensibilité souhaitée est au minimum de 3.10^{-21}, soit 2 ordres de grandeurs en dessous de notre estimation.

4. a) $$I_0 \xrightarrow[\text{réflexion}]{SP} RI_0 \xrightarrow{M_2} RI_0 \xrightarrow[\text{transmission}]{SP} (1-R)RI_0 .$$

$$I_0 \xrightarrow[\text{transmission}]{SP} I_0 - RI_0 \xrightarrow{M_1} (1-R)I_0 \xrightarrow[\text{réflexion}]{SP} R(1-R)I_0 .$$

b) L'intensité qui ne parvient pas à la photodiode retourne vers le laser. Elle vaut

$$I_0 \xrightarrow[\text{réflexion}]{SP} RI_0 \xrightarrow{M2} RI_0 \xrightarrow[\text{réflexion}]{SP} R^2 I_0 \text{ pour le 1er faisceau}$$

$$I_0 \xrightarrow[\text{transmission}]{SP} (1-R)I_0 \xrightarrow{M1} (1-R)I_0 \xrightarrow[\text{transmission}]{SP} (1-R)I_0 - R(1-R)I_0 = (1-R)^2$$

pour le second faisceau.

On perd donc $(1-R)^2 I_0 + R^2 I_0 = (1 + R^2 - 2R + R^2) I_0 = \underline{(1 + 2R^2 - 2R) I_0}$

On vérifie que $R(1-R)I_0 \times 2 + (1 + 2R^2 - 2R) I_0 = I_0$.

4. c) On choisit en général $R = \frac{1}{2}$, qui rend I maximum sur la photodiode.

d) D'après le document A2 ligne 11 les 2 faisceaux sont recombinés en opposition de phase = l'intensité reçue par la diode est nulle.

5. a) Si le bras 1 s'allonge, le bras 2 rétrécit (d'autant ? ce n'est pas précisé mais on le suppose), soit : $l'_2 = l_2\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)$

$$\delta = 2\left(l_2\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right) - l_1\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\right) = \delta_0 + (l_2 - l_1)\epsilon$$

b) $\frac{dI}{d\delta} = -2I_0 \sin\left(2\pi\frac{\delta}{d_0}\right) \times \frac{2\pi}{d_0} \Rightarrow \boxed{\Delta I = -2J_0 \sin\left(\frac{2\pi\delta}{d}\right) . (l_1+l_2)\epsilon . \frac{2\pi}{d_0}}$

c) $\Delta P = \frac{\Delta I}{I_0} . P_0 = 2 . \sin\left(2\pi\frac{\delta_0}{d}\right) . (l_1+l_2)\epsilon . P_0 . \frac{2\pi}{d_0}$

Le max est obtenu pour $\sin\left(2\pi\frac{\delta_0}{d}\right) = 1$

$$\rightarrow \Delta P_{max} = \frac{4\pi}{d_0} . \epsilon (l_1+l_2) P_0.$$

Pour $d_0 = 300\,km$, $f = 1\,kHz$: $\Delta P_{max} = \frac{4\pi}{\cancel{3}.10^5}(6.10^3)\cancel{3}.10^{-23} \times P_0 = 1{,}5.10^{-22}\,W.$

d) Le miroir "de recyclage" permet de réaliser $P_0 = 1\,kW$ (doc A2).

6. a)

Filtre	1	2	3	4
Nature	Passe-bas	Passe-bas	Passe-haut	Passe-bande

b) $\underline{H}_1 = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$; $\underline{H}_2 = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_c}+\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$; $\underline{H}_3 = \frac{H_0\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_c}+\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$

$\underline{H}_4 = \frac{H_0 j\frac{\omega}{Q\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_c}+\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$. $H_0 = 1$ pour tous ces filtres.

c) On doit réaliser $\varphi = \pi$.

Pour $\underline{H}_1$: $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < 0$ → non

Pour $\underline{H}_2$: $-\pi < \varphi_2 < 0$ → oui en HF

6. c) Pour H_3 : $\underset{\omega \to 0}{\pi} \leq \varphi \leq \underset{\omega \to \infty}{0}$ → non.

Pour H_4 : $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ → non.

7) a) En coordonnées polaires : $\vec{AM} = L\vec{u_r}$; $\vec{v}(M) = L\dot{\theta}\vec{u_\theta}$; $\vec{a}(M) = -L\dot{\theta}^2\vec{u_r} + L\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$

Le principe fondamental par rapport au bâti supposé galiléen s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{T} - \frac{m}{\tau}\dot{x}\vec{e_x} = m\vec{a}$$

On projette (sur Ox) en faisant l'approximation $\cos\theta = 1$; $\sin\theta = \theta = \frac{x - x_0}{L}$

$$m\vec{g} = -mg\vec{e_z} \; ; \; \vec{T} = T\vec{u_r} = -T\vec{u_z} + T.\theta\,\vec{u_x}$$

$$\vec{a} = -L\left(\frac{\dot{x}}{L}\right)^2\left(-\vec{u_z} + \vec{u_x}.\theta\right) + L\frac{\ddot{x}}{L}\left(\vec{u_x} + \vec{u_z}.\theta\right)$$

$$= \ddot{x}\vec{u_x} - \frac{\dot{x}^2}{L}.\frac{x-x_0}{L}.\vec{u_x} + \left(\frac{\dot{x}^2}{L} + \ddot{x}\frac{x-x_0}{L}\right)\vec{u_z} \simeq \ddot{x}\vec{u_x}$$ à l'ordre le plus bas

Selon Ox : $m\ddot{x} = T.\theta - \frac{m}{\tau}\dot{x}$

Selon Oz : $0 = -mg - T$

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x-x_0}{L} - \frac{m}{\tau}\dot{x}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \frac{g}{L}(x - x_0) = 0}$$

b) En RPS, l'équation s'écrit :

$$-\omega^2\underline{x} + j\omega\frac{\underline{x}}{\tau} + \omega_0^2\underline{x} = \omega_0^2\underline{x_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\underline{x}}{\underline{x_0}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega/\tau}}$$ Filtrage passe-bas.

La fréquence de coupure doit se situer le plus bas possible, vers 10Hz.

c) L'atténuation est de 10^{-11} à 10Hz d'après le document A4 ; il faut donc plusieurs étages pour augmenter l'atténuation.