Exercices de conduction thermique : corrigés.

Barre non isolée latéralement : corrigé :

La température ne dépend que de z en régime stationnaire ; on a donc :

$$\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T(z)}{\partial z} \overrightarrow{u_z}$$

Entre t et t+dt, pour la tranche d'épaisseur dz , on a en régime stationnaire :

$$dU = 0 = j(z).\pi.R^2.dt - j(z+dz).\pi.R^2.dt - h[T(z)-T_f].2.\pi.R.dz.dt$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = -\frac{\partial j(z)}{\partial z}.dz.R - 2.h\left(T(z) - T_f\right).dz$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\partial^2 T(z)}{\partial z^2} - \frac{2.h}{\lambda R}\left(T(z) - T_f\right)$$

La solution générale s'écrit $T(z) = T_f + A.e^{-mz} + B.e^{mz}$ avec $m = \sqrt{\frac{2.h}{\lambda R}}$.

Les valeurs de A et B s'obtiennent avec les conditions aux limites :

$$T(0) = T_1 \ ; \ T(L) = T_2.$$

Transfert thermique entre deux sphères : corrigé :

a) La grandeur conservée est **le flux.**

Le système admet une symétrie sphérique, en conséquence la température ne dépend que de r.
La loi de Fourier s'écrit alors en coordonnées sphériques (le gradient aurait du être donné !) :

$$\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T(r)}{\partial r} \overrightarrow{u_r}$$

On calcule le flux à travers une sphère de rayon r compris entre R_1 et R_2.

$$\Phi = \iint \vec{j}.d\vec{S}$$

avec $d\vec{S} = dS.\overrightarrow{u_r}$

d'où :

$$\Phi = j(r).4\pi r^2 = -\lambda \frac{\partial T(r)}{\partial r}.4\pi r^2$$

Remarque : on a calculé le flux qui va vers l'extérieur, donc $\Phi_{1\to 2}$.

b) On a donc :

$$-\lambda \frac{\partial T(r)}{\partial r} = \frac{\Phi}{4\pi r^2}$$

qui s'intègre en :

$$T(r) = \frac{\Phi}{4\pi\lambda r} + B$$

Les conditions aux limites :

$$T(R_1) = T_1 \ ; \ T(R_2) = T_2.$$

permettent de calculer :

$$\phi = \frac{4\pi\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1}(T_1 - T_2)$$

$$B = \frac{R_2T_2 - R_1T_1}{R_2 - R_1}(T_1 - T_2)$$

c) La résistance thermique est :

$$R = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2}$$

Remarque : ce qu'il faut retenir de cet exo en sphériques , c'est :

- On n'a pas utilisé l'équation de la chaleur, seulement la conservation du flux ;
- L'expression de la résistance thermique est tout à fait différente de celle que nous avons obtenue pour une conduction axiale.

Evacuation de la chaleur dans un barreau d'uranium : corrigé :

a) Le système étant cylindrique, les coordonnées adaptées sont les coordonnées cylindriques r, θ, et z, l'axe du tube étant l'axe Oz.
Grande longueur signifie qu'on peut considérer le tube comme infiniment long, donc T ne dépend pas de z (nous ne sommes pas encore très familiers de ces arguments, mais nous les reverrons) .
Le système est à symétrie cylindrique, T ne dépend donc pas de θ (idem).

b) Le laplacien étant donné, on peut utiliser l'équation de la chaleur, qui s'écrit en régime stationnaire :

$$0 = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + p$$

On intégre cette équation :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{p}{\lambda}.r$$

$$\Leftrightarrow r\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{2}\frac{p}{\lambda}.r^2 + A$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{2}\frac{p}{\lambda}.r + \frac{A}{r}$$

$$\Leftrightarrow T(r) = -\frac{1}{4}\frac{p}{\lambda}.r^2 + A.Ln(r) + B$$

Il faut déterminer A et B.
Une première condition aux limites est :

$$T\left(\frac{D}{2}\right) = T_e$$

D'autre part, la température dans le cylindre doit rester finie on doit donc nécessairement avoir A = 0 pour que le logarithme ne diverge pas (nous avions déjà vu ce genre d'argument en mécanique des fluides dans l'écoulement de Poiseuille cylindrique).
On déduit de la première condition :

$$B = T_e + \frac{1}{4}\frac{p}{\lambda}.r\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

d'où :

$$T(r) = T_e - \frac{1}{4}\frac{p}{\lambda}.\left(r^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2\right)$$

La température est maximale en r = 0 (c'est facile à voir).

$$T_{max} = T_e + \frac{1}{4}\frac{p}{\lambda}.\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

a) Pour $T_{max} = T_f = 1505$ K, on calcule :
$P_{max} = 530$ MW.m^{-3}.
C'est bien l'ordre de grandeur de la puissance volumique d'un réacteur nucléaire.