

PROBLEME 1 : Couche antireflet**Partie I –Intérêt d'une couche antireflet**

Q1. Pour l'air $n_1 = 1$, et pour le verre $n_3 \approx 1,5$ (entre 1,3 et 1,8), d'où : $r_{13} = -\frac{0,5}{2,5} = -0,2$

L'intensité lumineuse réfléchie est : $R = r_{13}^2 = 0,04 = 4\%$. Même valeur pour la réflexion verre/air.

Q2. Le flux lumineux traverse 4 lentilles, donc il subit 8 transmissions (air/verre ou verre/air). Le flux lumineux reçu par le capteur représente $T^8 = (1 - R)^8 = 0,663$ soit 66 % du flux incident, ce qui est faible. D'où l'intérêt du traitement antireflet.

Partie II –Paramètres d'une couche antireflet**II.1 – Epaisseur de la couche antireflet**

Q3. En incidence normale, le rayon 2 fait un aller-retour dans la couche d'épaisseur e_2 et d'indice n_2 avant de ressortir au même point que le rayon 1 dans l'air. La différence de marche est donc bien de : $\delta = \delta_{2/1} = 2 n_2 e_2$

Q4. Déphasage associé : $\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{4\pi n_2 e_2}{\lambda_0}$

Interférences destructives ssi : $\Delta\varphi = (2p + 1)\pi \Leftrightarrow e_2 = (2p + 1) \frac{\lambda_0}{4n_2}$ où $p \in \mathbb{N}$

II.2 – Indice de la couche antireflet

Q5. D'après les données, $r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$

r_{21} est le coefficient de réflexion en amplitude de l'onde lumineuse du milieu 2 vers le milieu 1. On constate que : $r_{21} = -r_{12}$

Q6. Lorsque $n_2 = n_3$ alors $r_{23} = 0$ et $I = I_0 r_{12}^2 = I_0 R$ qui est bien l'intensité de l'onde lumineuse réfléchie dans la partie I.

Q7. Il y a interférences destructives lorsque l'intensité réfléchie $I = 0$ soit :

$$r_{12} = r_{23} \Leftrightarrow \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \Leftrightarrow n_2^2 = n_1 n_3 \text{ soit } n_2 = \sqrt{n_1 n_3} \text{ (possible car } n_1 < n_2 < n_3)$$

Partie III –Exploitation

Q8. Les couches antireflets sont réalisées pour le maximum de sensibilité de l'œil humain, soit (d'après doc.1) pour $\lambda_0 = 560 \text{ nm}$ environ.

Q9. La valeur $\lambda_0 = 560 \text{ nm}$ se trouve entre 546,1 et 587,6 nm, donc on prend pour n_3 la moyenne entre n_d et n_e : $n_3 = \frac{n_d + n_e}{2} = 1,51776$ alors $n_2 = \sqrt{1,003 * 1,518} = 1,23$ avec 3 chiffres significatifs.

L'épaisseur minimale s'obtient pour $p = 0$ d'après Q4 : $e_{2 \text{ min}} = \frac{\lambda_0}{4n_2} = 114 \text{ nm}$

On obtient des valeurs cohérentes, même si la couche antireflet est très fine.

Q10. L'intensité réfléchie I_R dépend de λ_0 car n_3 en dépend (voir doc.2).

Q11. D'après Q1, sans couche antireflet l'intensité relative réfléchie est de 4 % environ : courbe 1.

On a trouvé en Q9. qu'un matériau d'indice 1,23 est parfaitement antireflet à $\lambda_0 = 560 \text{ nm}$: courbe 5.

Il reste à répartir les matériaux M_1 , M_2 et M_3 dont l'indice est croissant, supérieur à 1,23. Un calcul (long ...) permet de montrer que $\frac{dI_R}{dn_2} > 0$ pour $n > \sqrt{n_1 n_3} = 1,23$ d'où le tableau suivant :

Matériau	X	M_1	M_2	M_3	Aucun
Indice	1,23	1,33	1,35	1,38	/
Courbe	5	4	3	2	1

Q12. La couche antireflet est surtout efficace autour de 600 nm , donc il persiste des reflets aux extrémités du spectre visible : dans le rouge (800 nm) et le bleu (400 nm) : d'où des reflets violets.

Partie IV – Contrôle de l'épaisseur du dépôt

Q13. Un modèle à deux ondes suppose que $I_3 \ll I_1$ et I_2 . D'après Tableau 2, $\frac{I_3}{I_1} \approx \frac{I_3}{I_2} \approx 3 \cdot 10^{-4}$: validé.

Q14. La différentielle de l'intensité (donnée) s'écrit : $\frac{dI}{de_2} = -2I_0 \left(\frac{4\pi n_2}{\lambda_0} \right) \sin \left(\frac{4\pi n_2 e_2}{\lambda_0} \right)$ donc l'incertitude sur

l'épaisseur s'écrit :
$$\Delta e_2 = \frac{\lambda_0}{8\pi n_2 \left| \sin \left(\frac{4\pi n_2 e_2}{\lambda_0} \right) \right|} \frac{\Delta I}{I_0}$$

Q15. Pour M_1 : $n_2 = 1,33$; $e_2 = 100 \text{ nm}$; $\frac{\Delta I}{I_0} = 2,00 \%$ donc $\Delta e_2 = 3,21 \text{ nm} = 3 \%$ de e_2 : acceptable.

Problème 1 - Étude d'un haut-parleur électrodynamique

A Étude générale

Q1. On oriente le circuit dans le sens du courant indiqué sur la figure 2 de l'énoncé. On suppose que le champ \vec{B} est uniforme et s'écrit $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

Le flux de \vec{B} à travers le circuit orienté est alors :

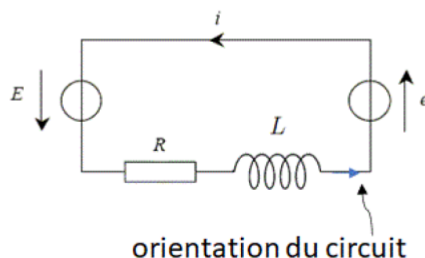
$$\Phi_B = \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = B\ell(\ell_0 + x)$$

La loi de Faraday s'écrit : $e = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ donc la force électromotrice induite dans le cadre est :

$$e = -B\ell \frac{dx(t)}{dt} = -B\ell v(t)$$

ce qui est bien l'expression demandée.

Q2. Il semble plus pertinent de réaliser d'abord le schéma électrique équivalent avant de donner la loi des mailles :



On obtient alors

$$E + e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

(E.E.)

Q3. Système : {barre + haut-parleur}

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Bilan des forces :

- le poids est négligé d'après l'énoncé, on va donc également négliger la réaction des rails ;
- force de frottement fluide : $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$;
- force de rappel : $\vec{F}_{el} = -k(\ell_{ressort} - \ell_0) = -kx\vec{u}_x$;
- force de Laplace \vec{F}_L qu'on exprime ci-dessous :

$$\vec{F}_L = \int_{barre} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_{y=0}^{\ell} i B dy \vec{u}_x \Rightarrow \vec{F}_L = i B \ell \vec{u}_x$$

Principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m_T \vec{a}$
qui donne, en projection selon \vec{u}_x :

$$\boxed{m_T \ddot{x} = -\alpha \dot{x} - kx + i B \ell} \quad (\text{E.M.})$$

Q4. Multiplions E.E. par i :

$$E i + e i = R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

Multiplions E.M. par \dot{x} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_T \dot{x}^2 \right) = -\alpha \dot{x}^2 - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right) + i B \ell \dot{x}$$

En remarquant que $e i = -B l v i = -B l \dot{x} i$, on peut combiner les équations précédentes pour obtenir :

$$\boxed{E i = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{d\mathcal{E}_{mag}}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} + \mathcal{P}_{\text{frottements}}}$$

avec

- $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R i^2$, la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance ;
- $\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} L i^2$, l'énergie magnétique stockée dans la bobine ;
- $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_T \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$, l'énergie mécanique de la barre ;
- $\mathcal{P}_{\text{frottements}} = \alpha \dot{x}^2$, la puissance perdue par frottement fluide.

On remarque ainsi que la puissance fournie par le générateur est en partie dissipée (par effet Joule et frottements), en partie stockée dans la bobine et en partie utilisée pour mettre la barre en mouvement.

Q5. On a déjà utilisé le résultat demandé à la question précédente ! En effet, on avait vu que

$$\boxed{\mathcal{P}_{fem} = e i = -B l v i = -\mathcal{P}_L}$$

Cette égalité traduit la conversion électromécanique parfaite dans ce problème d'induction de Lorentz.

Q6. Passons E.M. en notations complexes :

$$\begin{aligned} -\omega^2 m_T \underline{x} &= -\alpha j \omega \underline{x} - k \underline{x} + j B \ell \dot{\underline{x}} \\ \Rightarrow \underline{x} &= \frac{B \ell}{k - m_T \omega^2 + \alpha j \omega} \dot{\underline{i}} \end{aligned}$$

Passons maintenant E.E. en notions complexes :

$$\underline{E} - B \ell j \omega \underline{x} = R \dot{\underline{i}} + j L \omega \dot{\underline{i}}$$

On injecte l'expression de \underline{x} dans la relation précédente :

$$\underline{E} - \frac{(B \ell)^2 j \omega}{k - m_T \omega^2 + \alpha j \omega} \dot{\underline{i}} = R \dot{\underline{i}} + j L \omega \dot{\underline{i}}$$

puis

$$\underline{E} = (R + j L \omega + \underline{Z}_m) \dot{\underline{i}} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_m = \frac{(B \ell)^2 j \omega}{k - m_T \omega^2 + \alpha j \omega}$$

Q7.

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{k - m_T \omega^2 + \alpha j \omega}{(B \ell)^2 j \omega} = \frac{k}{(B \ell)^2 j \omega} + \frac{\alpha}{(B \ell)^2} + \frac{m_T j \omega}{(B \ell)^2}$$

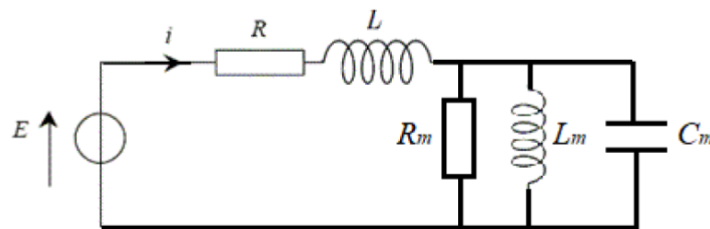
L'admittance \underline{Y}_m s'écrit bien sous la forme $\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + j C_m \omega + \frac{1}{j L_m \omega}$ avec

$$R_m = \frac{(B \ell)^2}{\alpha} \quad ; \quad C_m = \frac{m_T}{(B \ell)^2} \quad ; \quad L_m = \frac{(B \ell)^2}{k}$$

Q8. On remarque que l'admittance \underline{Y}_m est la somme de trois admittances : celle d'une résistance R_m , d'un condensateur de capacité C_m et d'une bobine d'inductance L_m .

Le dipôle d'impédance \underline{Z}_m est donc constitué d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine en parallèle (les admittances des dipôles en parallèle s'additionnent).

On obtient donc le schéma électrique équivalent du haut-parleur suivant :



Q9. On reprend le bilan de puissance de la **Q4.** en valeurs moyennes :

$$\langle E i \rangle = \langle R i^2 \rangle + \left\langle \frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dt} \right\rangle + \langle \alpha v^2 \rangle \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{mag} + \mathcal{E}_m$$

Or, $\left\langle \frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dt} \right\rangle = 0$ car \mathcal{E}_{tot} est une grandeur périodique.

Ainsi, on obtient bien la relation de l'énoncé :

$$\boxed{\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle}$$

En moyenne, la puissance fournie par le générateur se répartit entre la puissance dissipée par effet Joule et la puissance dissipée par frottement fluide. Cette dernière permet la mise en mouvement de l'air et est donc une puissance utile pour le fonctionnement du haut-parleur.

Q10. Par définition du rendement, on a :

$$\eta = \frac{\langle P_{son} \rangle}{\langle Ei \rangle} = \frac{\langle \alpha v^2 \rangle}{\langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\alpha} \frac{\langle i^2 \rangle}{\langle v^2 \rangle}}$$

On rappelle que les grandeurs étudiées sont sinusoïdales, de pulsation ω . Ainsi, les grandeurs réelles s'écrivent :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_m \cos(\omega t + \varphi_v) \\ i(t) &= i_m \cos(\omega t + \varphi_i) \end{aligned}$$

On obtient ensuite $\langle v^2 \rangle = \frac{v_m^2}{2}$ et $\langle i^2 \rangle = \frac{i_m^2}{2}$, ce qui donne l'expression du rendement :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{\alpha} \left(\frac{i_m}{v_m} \right)^2}$$

Or, $\underline{v} = j\omega \underline{x} = \frac{j\omega B\ell}{k - m_T\omega^2 + \alpha j\omega} \underline{i}$ d'après la question **Q6**. donc

$$\frac{i_m}{v_m} = \left| \frac{\underline{i}}{\underline{v}} \right| = \frac{\sqrt{(k - m_T\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}}{\omega B\ell}$$

On injecte cette relation dans l'expression du rendement :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{\alpha} \frac{(k - m_T\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}{\omega^2 (B\ell)^2}} = \frac{1}{1 + \frac{R\alpha}{(B\ell)^2} \frac{\left(\frac{k - m_T\omega^2}{\alpha} \right)^2 + \omega^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} \left[1 + \left(\frac{m_T\omega}{\alpha} - \frac{k}{\alpha\omega} \right)^2 \right]}$$

On identifie avec la forme proposée dans l'énoncé :

$$\begin{cases} \frac{m_T}{\alpha} = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{k}{\alpha} = Q\omega_0 \end{cases}$$

Ce qui donne $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_T}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{m_T k}}{\alpha}}$

Q11. On obtient le comportement d'un filtre passe-bande : lorsque ω tend vers 0 ou $+\infty$, le rendement tend vers zéro ; lorsque ω tend vers ω_0 , le rendement est maximum et vaut $\eta_{max} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m}}$.

En effet, à basse fréquence, le mouvement est très lent, ce qui induit peu de puissance de frottement fluide donc un faible rendement.

À haute fréquence, l'inertie mécanique de l'équipage mobile implique une très faible vitesse de déplacement donc peu de puissance de frottement fluide : le rendement est très faible.

Problème III-Propulsion (CCP PC 19)

1) Le système Σ^* est constitué à l'instant t de l'air contenu dans le turboréacteur et de la masse élémentaire entrante δm_e . Par extensivité de la quantité de mouvement, on a :
$$\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) + \delta m_e \vec{v}_e.$$

2) De même,
$$\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}(t + dt) + \delta m_s \vec{v}_s$$

3) En régime stationnaire, $\delta m_e = \delta m_s = D_m dt$ et $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}(t)$ (car il s'agit d'une grandeur eulérienne associée à un système indépendant du temps). On a donc après simplification :
$$\frac{d\vec{p}^*(t)}{dt} = \frac{\vec{p}^*(t+dt) - \vec{p}^*(t)}{dt} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

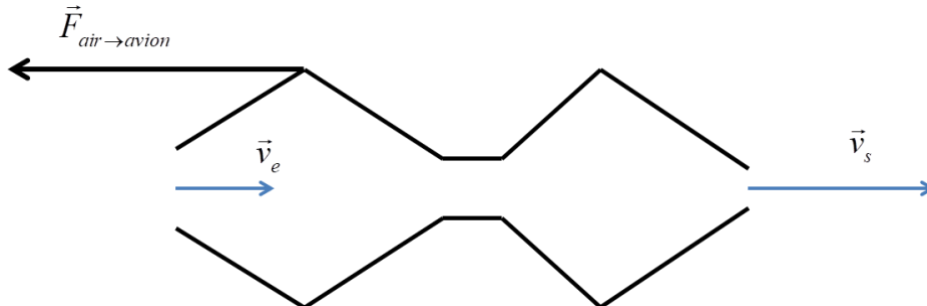
4) Le fluide dans le turboréacteur est soumis à :

- La pesanteur
- Les forces de pression sur les sections d'entrée et de sortie
- L'action du moteur sur l'air

5) La pesanteur est explicitement négligée. Les forces de pression s'appliquent à l'entrée et à la sortie du turboréacteur (pas sur les côtés où c'est le métal de l'avion qui est en contact avec le fluide en écoulement et dont l'action est comptée dans la troisième force) et sont négligées dans la suite, soit parce qu'elles se compensent ou soit de résultante faible devant la force de l'avion.

Alors, en appliquant le **théorème de la quantité de mouvement au système fermé Σ^*** , on obtient bien :
$$\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e).$$

6) D'après le principe des actions réciproques $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{avion}} = -\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} = D_m(\vec{v}_e - \vec{v}_s)$ alors :



Et la force exercée par l'air sur l'avion est propulsive ssi $|\vec{v}_s| > |\vec{v}_e|$

7) On utilise l'expression du premier principe pour un fluide en écoulement proposé dans l'énoncé au passage dans le diffuseur. Il n'y a ni pièce mobile ni transfert thermique, donc en négligeant la pesanteur, il vient : $\Delta h +$

$$\Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

La vitesse en sortie est négligeable et celle en entrée vaut V_A , et on a un gaz supposé parfait, donc $\Delta h = c_p(T_2 - T_1)$. On en déduit : $c_p(T_2 - T_1) = \frac{V_A^2}{2} \rightarrow T_2 = T_1 + \frac{V_A^2}{2c_p} = 264 \text{ K}$

- 8) Dans le diffuseur, la transformation est adiabatique et réversible donc isentropique : on peut utiliser la loi de **Laplace** (valable également en présence d'une énergie cinétique car découlant de l'identité thermodynamique; on pourra aussi consulter le Chapitre 13 du "Pérez" de Thermodynamique) : $P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = 55,9 \text{ kPa}$

- 9) Le compresseur est adiabatique et on néglige pesanteur et énergie cinétique. Le premier principe s'écrit donc : $\Delta h = c_p(T_3 - T_2) = \omega_{comp}$
Pour avoir la puissance, on multiplie par le débit massique : $\mathcal{P} = D_m c_p(T_3 - T_2) = 10,7 \text{ MW}$

- 10) Comme dans le compresseur, le premier principe dans la turbine (adiabatique) donne $\omega_{turb} = c_p(T_5 - T_4)$.
D'après l'énoncé, tout le travail fourni par la turbine est reçu par le compresseur, donc $\omega_{turb} = -\omega_{comp}$. Alors $c_p(T_5 - T_4) = -c_p(T_3 - T_2)$ d'où $T_5 = T_4 + T_2 - T_3 = 1180 \text{ K}$
Par ailleurs, l'échauffement étant isobare : $P_4 = P_3 = 10P_2$.
Alors, en utilisant à nouveau la loi de Laplace dans la turbine (isentropique) : $P_5 = P_4 \left(\frac{T_4}{T_5}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = 2,89 \text{ kPa}$

- 11) La tuyère est adiabatique et ne présente pas de pièces mobiles ($\omega_u = q = 0$) mais l'énergie cinétique en sortie n'est pas négligeable. Le premier principe s'écrit donc (toujours avec la seconde loi de Joule reliant h et T pour un gaz parfait) :

$$c_p(T_6 - T_5) + \frac{v_s^2}{2} = 0 \rightarrow v_s = \sqrt{2c_p(T_6 - T_5)} = 1,05 \text{ m/s}$$

- 12) On admet que la puissance recherchée est celle reçue par l'avion de la part de l'air dans le référentiel terrestre, soit $\mathcal{P} = \vec{F}_{air \rightarrow avion} \cdot \vec{v}_{avion/sol} = D_m(v_s - V_a)V_a = 9,24 \text{ MW}$

- 13) $\eta = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{chamb}} = 20,3\%$ inférieur à des rendements classiques de machine motrice (30 à 40 % pour des moteurs de voiture usuels)

- 14) $[v_m] = ([c_p]K)^{\frac{1}{2}} = (ML^2T^{-2}K^{-1}M^{-1}K)^{\frac{1}{2}} = LT^{-1}$

- 15) Par définition, le débit massique est $D_m = \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho(x)v(x)S(x)$ ici compte tenu de la géométrie et des symétries du problème.

On peut exprimer $\rho(x)$ en utilisant la loi de Laplace (transformation isentropique) : $PV^\gamma = cte \rightarrow \frac{P(x)}{\rho(x)^\gamma} = \frac{P_e}{\rho_e^\gamma}$

d'où $\rho(x) = \rho_e \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{1/\gamma}$

On utilise l'expression de $v(x)$: $v(x) = \sqrt{v_e^2 + v_m^2 \left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]}$

On peut alors déduire : $D_m = \rho_e \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{1/\gamma} \sqrt{v_e^2 + v_m^2 \left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]} S(x)$ d'où

$D_m = \rho_e v_m S(x) G(x)$ avec $G(x) = \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{1/\gamma} \sqrt{(v_e/v_m)^2 + \left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]}$

- 16) L'énoncé pose $\alpha = \frac{P(x)}{P_e}$ donc $G(\alpha) = (\alpha)^{1/\gamma} \sqrt{(v_e/v_m)^2 + [1 - (\alpha)^{(\gamma-1)/\gamma}]}$

A l'entrée de la tuyère, $P(0) = P_e$ donc $\alpha = 1$, soit $G = 0$ d'après la courbe. **Le sujet est alors un peu déroutant : si $G = 0$ le débit est nul. En réalité, $G = v_m/v_e$ de rapport très faible à l'entrée.**

Pour que la vitesse augmente, il faut que la pression diminue d'après l'expression de $v(x)$. Il faut donc diminuer α , ce qui fait croître G (d'après le graphe) dans un premier temps. Le débit massique étant constant (régime stationnaire), la section S doit diminuer : il faut bien une tuyère convergente.

- 17) Une tuyère constamment convergente impose, par conservation du débit, que G puisse augmenter indéfiniment, or G présente un maximum : la section a donc une valeur minimale acceptable, prise au maximum de G , et la vitesse une valeur maximale :

$$v_{lim} = \sqrt{v_e^2 + v_m^2 [1 - \alpha_c^{(\gamma-1)/\gamma}]} = v_m \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma+1}} = v_m \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \text{ car } v_e \ll v_m$$

- 18) Par conservation du débit (en évitant d'utiliser $G(\alpha) = 0$ à l'entrée sur la courbe) :

$$D_m = \rho_e S_e v_e = \rho_e v_m G(\alpha_c) S_{col} \rightarrow \frac{S_{col}}{S_e} = \frac{v_e}{v_m G(\alpha_c)} \sim \mathbf{0,02} \text{ (en lisant } G(\alpha_c) \sim 5 \text{ sur la courbe)}$$