ONDES ELECTROMAGNETIQUES PLANES DANS LE VIDE

1.1. Ondes électromagnétiques dans le vide	
Équations de propagation de **E** et **B** dans une région sans charge ni courant.	Établir et citer les équations de propagation.
Structure d'une onde plane progressive harmonique homogène.	Établir et décrire la structure d'une OPPHH. Utiliser le principe de superposition d'OPPHH.
Aspects énergétiques.	Relier la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde. Relier le flux du vecteur de Poynting à un flux de photons en utilisant la relation d'Einstein-Planck. Citer quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens (laser hélium-néon, flux solaire, téléphonie,etc…) et les relier aux ordres de grandeur des champs électriques associés.
Polarisation des ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques homogènes : polarisation elliptique, circulaire et rectiligne.	Relier l'expression du champ électrique à l'état de polarisation d'une onde.
Analyse d'une lumière totalement polarisée. Utiliser une lame quart d'onde ou demi-onde pour modifier ou analyser un état de polarisation, avec de la lumière totalement polarisée.	**Reconnaître une lumière non polarisée.** **Distinguer une lumière non polarisée d'une lumière totalement polarisée.**

Lorsque l'on se place à grande distance d'une source, une onde peut souvent être assimilée à une onde plane.
On se place ici dans le vide : ρ = 0 ; $\vec{j} = \vec{0}$.

1. Equations de propagation des champs .

On utilise la formule d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$$

On déduit des équations de Maxwell dans le vide :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}\ ;\ \Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Les champs obéissent donc à une équation de d'Alembert ; ils se propagent à la célérité :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

c = 299792458 m.s^{-1}.

L'équation de d'Alembert étant linéaire, les champs obéissent au principe de superposition.

2. Onde plane progressive harmonique homogène (OPPHH).

2.1. Définition :

Les composantes du champ électrique d'une onde harmonique s'écrivent :

$$E_i(\vec{r},t) = E_{0i}(\vec{r}).\cos(\omega t - \phi_i(\vec{r})) \quad avec\ i = x,y,z$$

$\varphi_i(\vec{r},t) = \omega t - \phi_i(\vec{r})$ est la phase.

Définition : une onde plane est une onde donc les surfaces équiphases sont des plans.

Dans ce cas les composantes du champ s'écrivent :

$$E_i(\vec{r},t) = E_{0i}(\vec{r}).\cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_i\right)$$

Si de plus le champ $\overrightarrow{E_0}(\vec{r})$ est uniforme, l'onde est dite homogène.

Les composantes du champ électrique d'une OPPHH s'écrivent donc :

$$E_i(\vec{r},t) = E_{0i}.\cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_i\right)$$

$\vec{k} = k.\vec{u}$ est le vecteur d'onde.

Il est d'usage de choisir k >0, le sens de la propagation étant indiqué par :

- $\omega t - \vec{k}.\vec{r}$: propagation selon $\vec{u}$
- $\omega t + \vec{k}.\vec{r}$: propagation selon $-\vec{u}$.

Dans la suite du cours on considère une propagation selon $\vec{u}_x$.

L'onde possède une double périodicité :

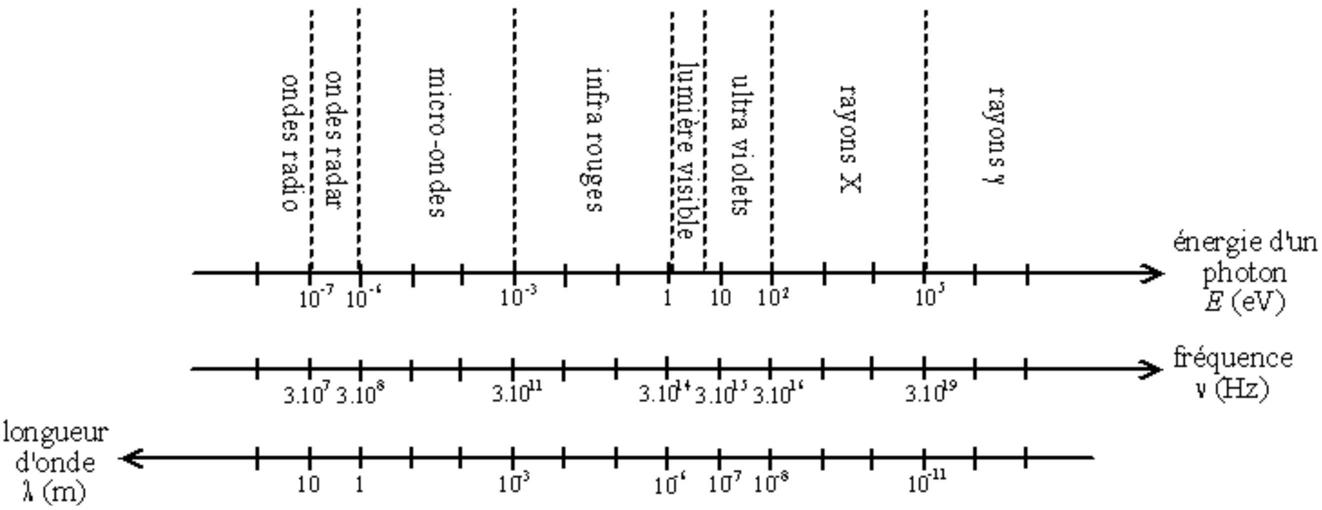
- temporelle de période T = $2\pi/\omega$;
- spatiale de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.

2.2. Relation de dispersion :

Pour une onde plane dans le vide, on a :

$$\omega = k.c$$

C'est la relation de dispersion d'une onde plane vérifiant l'équation de d'Alembert.



3.3. Représentation complexe :

Pour chaque composante on peut écrire :

$$E_i = Re\left[\underline{E_i}(\vec{r},t)\right]$$

avec

$$\underline{E_i}(\vec{r},t) = E_0.expj(\omega t - k.\vec{u}.\vec{r} + \varphi_i)$$
$$= \underline{E_0}.expj(\omega t - k.\vec{u}.\vec{r})$$

en posant :

$$\underline{E_0} = E_0.expj(\varphi_i)$$

Le vecteur nabla s'écrit en complexes :

$$\vec{\nabla} = -j\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}.f = -j\vec{k}.f$$
$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla}.\vec{A} = -j\vec{k}.\vec{A}$$
$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = -j\vec{k}\wedge\vec{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

2.4. Transversalité de l'onde :

Les équations de MAxell étant linéaires, elles peuvent être écrites en complexes.

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit en complexes :

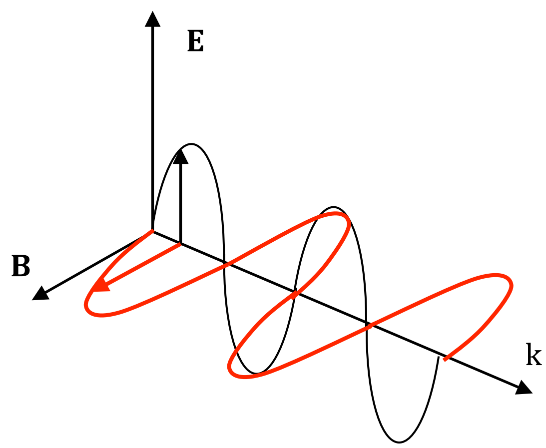
$$div(\underline{\vec{E}}) = \vec{\nabla}.\underline{\vec{E}} = -j\vec{k}.\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

$\vec{k}$ est perpendiculaire à **$\vec{E}$**

L'équation de Maxwell-flux donne la même relation pour le champ $\vec{B}$.

$\vec{k}$ est perpendiculaire à **$\vec{B}$**

Les champs $\vec{E}$ *et* $\vec{E}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation ; l'onde est **transverse.**



L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}}$$

Les normes de $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ vérifient :

$$\boldsymbol{c.\|\vec{B}\| = \|\vec{E}\|}$$

2.5. Energie :

Attention : l'énergie est une grandeur quadratique : on doit calculer avec des champs réels !

Vecteur de Poynting :

$$\vec{\pi} = \varepsilon_0 c E^2 \overrightarrow{u_x} = \frac{1}{\mu_0} c B^2 \overrightarrow{u_x}$$

On remarque que le vecteur de Poynting est dirigé dans la direction et le sens de propagation.

Ordres de grandeur :

- Flux solaire : $\|\vec{\pi}\| \sim 1$ kW.m^{-2} d'où $\|\vec{E}\| \sim 1$ kV.m^{-1} ;
- Laser He-Ne : $\|\vec{\pi}\| \sim 10$ mW sur 1 mm^2 ~ 10 kW.m^{-2} d'où $\|\vec{E}\| \sim 1$ kV.m^{-1} ;
- Téléphone portable : $\|\vec{\pi}\| \sim 1$ kW.m^{-2} d'où $\|\vec{E}\| \sim 1$ kV.m^{-1} ;
- Laser femto seconde : E ~ 1 J pendant 1 fs ; P = 1 PW = 10^{15} W ; $\|\vec{\pi}\| \sim 10^{21}$ W.cm^{-2} !

Remarque : on définit un vecteur de Poynting complexe par :

$$\underline{\vec{\pi}} = \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^* \text{ où } \underline{\vec{B}}^* \text{ est le conjugué de } \underline{\vec{B}}$$

On a alors :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} . Re(\underline{\vec{\pi}})$$

Densité volumique d'énergie :

$$u_e = \varepsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2$$

L'énergie est répartie également entre énergie magnétique et énergie électrique .

2.6. Vitesse de propagation de l'énergie :

L'énergie moyenne qui traverse une surface dS perpendiculaire à la direction de propagation pendant dt est égale à l'énergie moyenne contenue dans un volume dS.V_e.dt, où V_e est la vitesse de propagation de l'énergie, soit :

$$P.dt = <\Pi>.dS.dt = <u>.dS.V_e.dt$$

On en déduit :

$$V_e = c$$

Dans le vide, l'énergie se propage à la célérité c.

2.7. Vitesse de phase :

Définition : la vitesse de phase est la vitesse de propagation des plans d'onde : $v_\varphi = \omega/k$.

En effet, soit un plan d'onde, caractérisé par une phase $\varphi = \omega t - kx$.
Si l'on suit ce plan d'onde dans son déplacement, on aura φ = cte, soit $\omega.dt - k.dx = 0$.

Pour une OPPHH dans le vide : $v_\varphi = c_0$.

3. Description corpusculaire du champ électromagnétique : le photon :

Le photon est une particule de masse nulle, d'énergie

$$E = h.\nu,$$

ou h est la constante de Planck :

$$h \approx 6{,}62.10^{-34} \text{ J.s}$$

et ν la fréquence de l'onde associée.

Sa quantité de mouvement est :

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi}.\vec{k} = \hbar.\vec{k}$$

Relation de Planck Einstein.

Les photons se déplacent à la vitesse de la lumière.

Soit n le nombre de photons de fréquence ν par unité de volume associé à l'onde.

La puissance fluant à travers une surface S orientée perpendiculairement à $\vec{k}$ est :

$$P = n.c.S.h.\nu$$

On peut relier n aux caractéristiques de l'onde, en égalant la densité d'énergie électromagnétique :

$$U = \frac{1}{2}.\varepsilon_0.E^2 = n.h.\nu$$

4. Polarisation des OPPHH :

http://www.cabrillo.edu/~jmccullough/Applets/Flash/Optics/CircPol.swf

On considère une onde plane se propageant selon les x croissants.
Par un changement d'origine des temps, on peut écrire :

$$E_y(x,t) = E_{0y}.\cos(\omega t - kx)$$
$$E_z(x,t) = E_{0z}.\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

4.1. Définition :

Une onde est dite polarisée si l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ décrit dans un plan $x = x_0$ au cours du temps une courbe fermée déterminée.

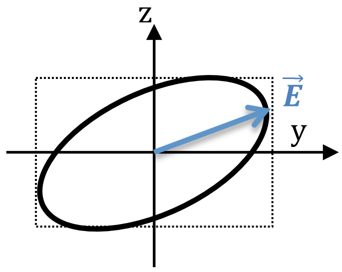
4.2. Cas général : polarisation elliptique :

a) Equation de l'ellipse :

On montre par élimination de t que la trajectoire du point de coordonnées réduites $Y = E_y/E_{0y}$; $Z = E_z/E_{0z}$ a pour équation :

$$Y^2 + Z^2 - 2YZ\cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

La polarisation est dite elliptique.



b) Sens de parcours de l'ellipse :

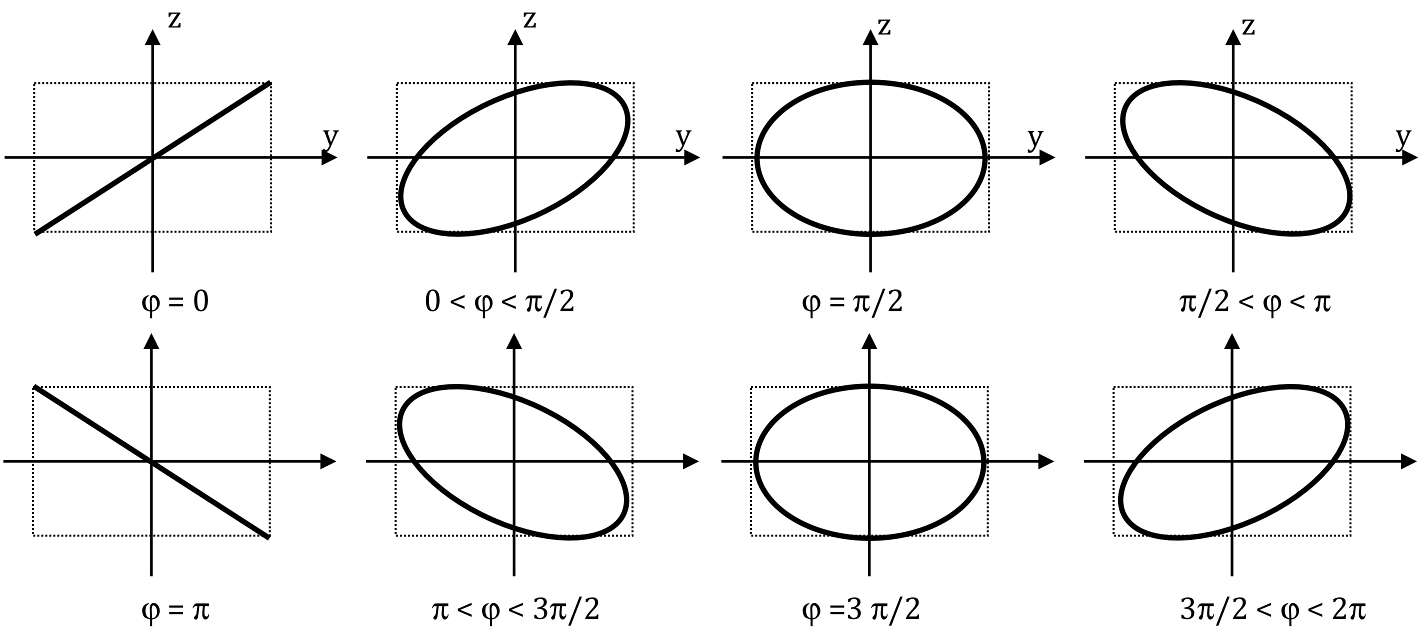
On se place dans le plan x = 0 ; à t = 0 Ey est maximal ; on calcule :

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} = -\omega E_{0z} sin\varphi$$

Si $0 < \varphi < \pi$, E_z décroit ; l'ellipse est parcourue dans le sens horaire.

Lorsqu'on regarde arriver l'onde, celle-ci est dite **elliptique droite** si l'ellipse est décrite dans le sens horaire à x fixé ; on a alors $0 < \varphi < \pi$: elle est dite **elliptique gauche** dans le cas contraire : on a alors $\pi < \varphi < 2\pi$.

Remarque : le sens de rotation change de sens si l'on regarde à t fixé en fonction de x .



4.3. Cas particuliers :

a) Polarisation rectiligne :

L'onde est polarisée rectilignement si E décrit une droite, c.à.d. si

$$E_y / E_z = \text{cte.}$$

Cela n'est possible que si :

b) Polarisation circulaire.

L'ellipse est un cercle si

$$E_{0y} = E_{oz} \text{ et } \varphi = \pm \pi/2.$$

Remarque 2 : toute polarisation elliptique peut se décomposer en deux polarisations rectilignes.

Exercice : montrer qu'une onde polarisée rectiligne se décompose en deux ondes polarisées circulairement et de sens contraires.

5. Réalisation expérimentale d'un état de polarisation :

La polarisation des ondes électromagnétiques est très utilisée en optique. Comment produire alors des ondes polarisées de manière rectiligne, circulaire ou elliptique ?

5.1. Production d'une lumière polarisée rectiligne :

On utilise le plus souvent un polariseur dichroïque : c'est une lame d'épaisseur négligeable possédant dans son plan une direction $\vec{u}$ privilégiée, telle que la lame soit transparente pour $\vec{E}$ parallèle à $\vec{u}$ et absorbante pour $\vec{E}$ perpendiculaire à $\vec{u}$.
Un polariseur dichroïque projette donc le champ sur sa direction de polarisation $\vec{u}$.
Le polariseur permettra également de distinguer les différents types de lumière polarisée ; il est alors appelé « analyseur ».

5.2. Lame à retard :

Une lame mince dite **biréfringente** est constituée d'un milieu **anisotrope**, propageant le champ avec des indices différents selon qu'il est polarisé selon l'une ou l'autre de deux directions perpendiculaires appelés **axes** (ou lignes) **neutres** de la lame, appartenant au plan de la lame, et placées perpendiculairement à l'axe optique.

Si le champ est polarisé selon l'un des axes, l'indice est n_1, s'il est polarisé selon l'autre axe, l'indice est n_2.
Si on suppose $n_2 > n_1$, on a $c_1 > c_2$, aussi les axes sont-ils appelés **axes lent et rapide**.
Supposons que l'axe lent (n_2) de la lame et Oy et l'axe rapide(n_1) est Oz.
La lame a une épaisseur e.

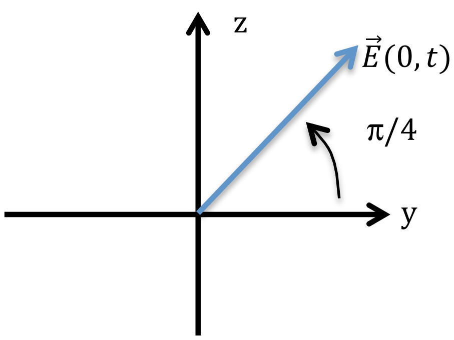
On considère une onde incidente polarisée rectiligne selon Oy, représentée par un champ électrique d'amplitude E_0.

Sa forme à l'entrée de la lame (x=0) est , en choisissant arbitrairement $\varphi_y = 0$:

$$\vec{E}(0,t) = E_0.\cos(\omega t).\overrightarrow{u_y}$$

Sa forme à la sortie de la lame (x = e) est :

$$\vec{E}(e,t) = E_0.\cos\left(\omega t - n_2.\frac{\omega}{c}e\right).\overrightarrow{u_y}$$



Si l'onde incidente est initialement polarisée rectiligne selon Oz, on aura en sortie de lame :

$$\vec{E}(e,t) = E_0.\cos\left(\omega t - n_1.\frac{\omega}{c}e\right).\overrightarrow{u_z}$$

Si l'onde est polarisée rectiligne suivant une direction faisant un angle $\alpha = \pi/4$ avec l'axe Oy, on a en entrée de lame :

$$\vec{E}(O,t) = E_0.\cos(\omega t).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\overrightarrow{u_y} + E_0.\cos(\omega t).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\overrightarrow{u_z}$$

Et en sortie de lame :

$$\vec{E}(e,t) = E_0.\cos\left(\omega t - n_2.\frac{\omega}{c}e\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\overrightarrow{u_y} + E_0.\cos\left(\omega t - n_1.\frac{\omega}{c}e\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\overrightarrow{u_z}$$

Le déphasage φ de la composante E_z par rapport à la composante E_y est :

$$\varphi = (n_2 - n_1).\frac{\omega}{c}e$$

5.3. Réalisation d'une polarisation circulaire :

Il est possible en calculant bien l'épaisseur de la lame de réaliser :

$$\varphi = (n_2 - n_1).\frac{\omega}{c}e = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow (n_2 - n_1).e = \frac{\lambda_0}{4}$$

La lame est dite **« quart-d'onde »** : elle déphase les deux composantes d'un déphasage correspondant à un quart de longueur d'onde.

Le champ en sortie de lame s'écrit :

$$\vec{E}(e,t) = E_0.\cos\left(\omega t - n_2.\frac{\omega}{c}e\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\overrightarrow{u_y} + E_0.\cos\left(\omega t - n_2.\frac{\omega}{c}e + \frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{E}(e,t) = E_0.\cos\left(\omega t - n_2.\frac{\omega}{c}e\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\overrightarrow{u_y} - E_0.\sin\left(\omega t - n_2.\frac{\omega}{c}e + \frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\overrightarrow{u_z}$$

La lumière est **polarisée circulaire** gauche.

Remarque : une lame n'est quart d'onde que pour une longueur d'onde donnée λ_0.

On a donc transformé un champ polarisé de manière quelconque en champ polarisé circulairement grâce à l'association d'un polariseur rectiligne et d'une lame quart d'onde, réalisant un **polariseur circulaire.**

L'analyse des états de polarisation sera étudiée exclusivement en TP.