ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LES PLASMAS ET LES METAUX

1. Phénomènes de propagation linéaires	
2.1 Ondes électromagnétiques dans les plasmas et dans les métaux	
Interaction entre une onde plane progressive harmonique et un plasma localement neutre sans collisions. Conductivité imaginaire pure. Interprétation énergétique.	Décrire le modèle. Construire une conductivité complexe en justifiant les approximations. Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée en moyenne temporelle entre le champ et les porteurs de charges.
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu localement neutre possédant une conductivité complexe : relation de dispersion, indice complexe. Dispersion, absorption.	Établir une relation de dispersion pour des ondes planes progressives harmoniques. Associer les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}$ aux phénomènes de dispersion et d'absorption.
Cas particulier d'une propagation unidirectionnelle dans un plasma sans collisions : onde évanescente dans le domaine réactif ($\omega < \omega_p$) ; absence de propagation de l'énergie en moyenne temporelle.	Reconnaître une onde évanescente (onde stationnaire atténuée).
Cas particulier d'un conducteur ohmique de conductivité réelle : effet de peau.	Repérer une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion. Connaître l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50Hz.

Les milieux matériels ont des comportements très différents selon que :

- les porteurs de charges sont libres de se déplacer (métaux, plasmas) ou liés (milieux isolants ou « diélectriques ») ;
- le milieu est plus ou moins « dilué », ce que traduit τ, temps de collision des porteurs ;
- les oscillations collectives des charges, de pulsation ω_p, répondent plus ou moins bien à la pulsation du champ excitateur.

1. Modèle microscopique de la conductivité :

1.1. Modélisation :

On considère un milieu matériel neutre dans lequel existent des porteurs de **charges libres**, portant une charge q et en densité volumique n, non relativistes.

Les interactions entre charges, sont modélisées par une force de frottement :

$$\overrightarrow{F_{frott}} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$$

Les charges interagissent avec les champs $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω.

1.2. Comparaison des forces électrique et magnétique :

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un porteur de charge s'écrit :

$$\mathrm{q}(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})-m\frac{\vec{v}}{\tau}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

En ordre de grandeur, la force électrique vaut $F_e \approx e\|\vec{E}\|$ et la force magnétique $F_m \approx e\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|$

Or l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{E}}=-j\vec{k}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-j\omega\underline{\vec{B}}$$

On en déduit :

$$\underline{\vec{B}}=\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}}$$

On a donc

$$\frac{F_m}{F_e}\approx\frac{v}{v_\varphi}\ll 1$$

On peut donc négliger la force magnétique devant la force électrique.

1.3. Conductivité complexe :

On se place en régime permanent sinusoïdal de pulsation ω.

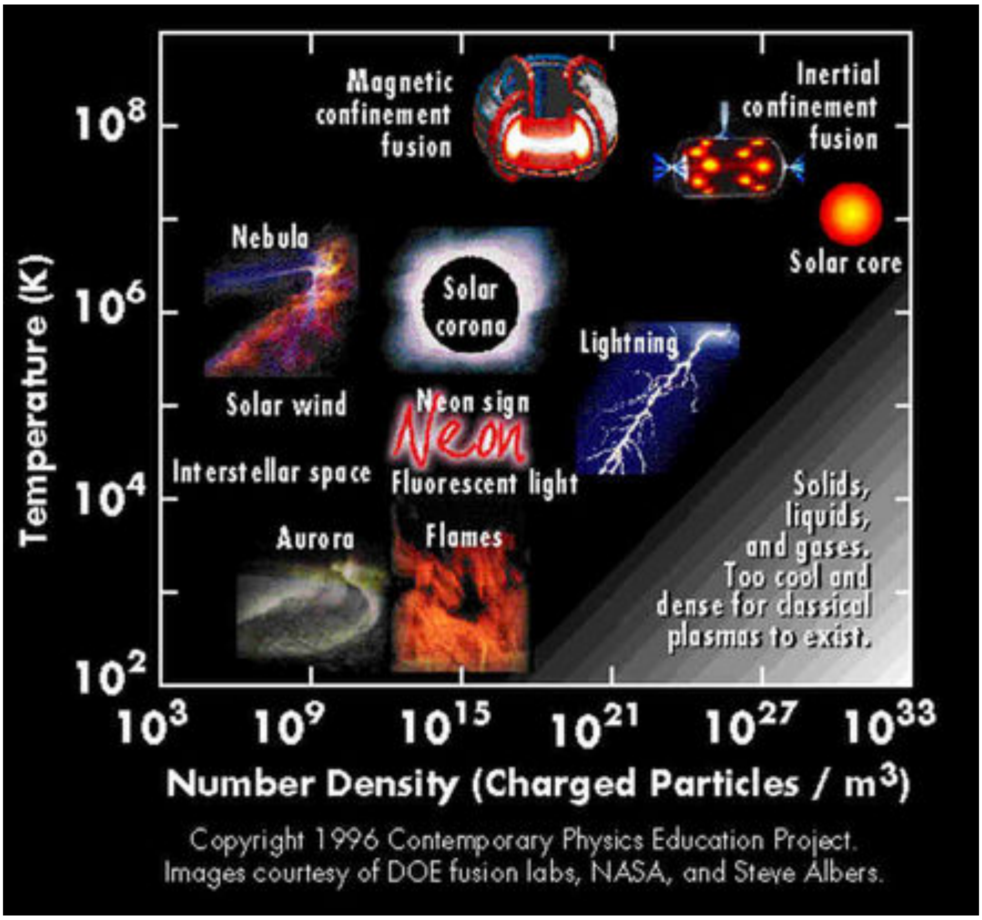
On en déduit la forme de la conductivité complexe :

$$\underline{\gamma(\omega)}=\frac{\gamma(0)}{1+j\omega\tau}\ avec\ \gamma(0)=\frac{n.q^2.\tau}{m}$$

2. Propagation d'une OPPH dans un plasma localement neutre :

2.1. Description du modèle :

Un plasma est un milieu ou les atomes sont partiellement ou totalement ionisés, les électrons et les ions se mouvant **librement** .
L'ionosphère, couche de l'atmosphère comprise entre 50 et 1000 km d'altitude, est partiellement ionisée par les rayonnements solaires UV et X.
Au repos, les nombres volumiques d'électrons et d'ions ont même valeur n.
On supposera la masse des ions très grande devant celle des électrons, de sorte que l'on peut considérer les ions comme fixes.



On supposera de plus le plasma suffisamment dilué pour négliger les interactions entre les charges : on a donc :

$$\boldsymbol{\tau} \rightarrow \infty$$

La conductivité du plasma est donc :

$$\underline{\gamma(\omega)} = \frac{n.q^2}{j\omega m}$$

2.2. Interaction champ-plasma :

On étudie la propagation dans ce plasma d'une onde progressive plane transverse et monochromatique se propageant suivant x et décrite par un champ électrique défini par :

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\,.\cos\,(\omega t - kx)$$
$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\,.exp\,j(\omega t - kx)$$

et un champ magnétique de valeur moyenne temporelle nulle.

Cette onde met en mouvement les électrons : on note $\vec{v}(M,t)$ la vitesse de l'électron passant au point M à l'instant t et on suppose que la valeur moyenne temporelle $\overrightarrow{\langle v \rangle}$ est nulle en tout point M.

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$$div\underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On calcule :

$$div\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

d'où :

$$\rho = 0$$

On en déduit que le plasma reste localement neutre en présence de l'onde

2.3. Puissance moyenne fournie aux charges :

La conductivité complexe est :

$$\underline{\gamma(\omega)} = \frac{n_0 e^2}{jm\omega} = \frac{n_0 e^2}{m\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

La densité de courant s'écrit ainsi en notation réelle :

$$\vec{j} = |\gamma(\omega)| \overrightarrow{E_0} \sin(\omega t - kx)$$

La puissance volumique cédée aux charges est :

$$p_v = \vec{j}.\vec{E}$$

Sa valeur moyenne temporelle est nulle : l'onde ne fournit aucune puissance aux charges.

2.4. Relation de dispersion :

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit en complexes :

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$
$$\Leftrightarrow -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\gamma}\underline{\vec{E}} + j\omega \frac{1}{c^2}\underline{\vec{E}}$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit en complexes :

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{E}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$
$$\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}$$

On en déduit l'équation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0 c^2} = \frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}$$

Une onde ne peut se propager que si sa pulsation est supérieure à une pulsation critique ω_P appelée **pulsation plasma** et définie par :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}}$$

Ce domaine de fréquences est appelé **domaine de transparence.**

Exemple : dans l'ionosphère : $n_0 = 10^{10}$ électrons.m^{-3} ;

on calcule $f_P = \omega_P / 2\pi = 900$ kHz

La vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

3. Analyse harmonique :

Que se passe-t-il pour $\omega < \omega_p$?

Pour savoir si une onde plane peut se propager dans ce milieu, on réalise une **analyse harmonique** en cherchant des solutions sous la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\,.\,exp\, j(\omega t - \underline{k}x)$$

avec ω réel positif **mais k éventuellement complexe**.

Si la pulsation ω de l'onde est inférieur à la pulsation plasma ω_P, $\underline{k}$ est imaginaire pur :

$$\underline{k} = \pm j\sqrt{\frac{{\omega_p}^2 - \omega^2}{c^2}}$$

Le champ électrique de l'onde s'écrit alors :

$$\vec{E}(t) = \overrightarrow{E_0}\,.\cos{(\omega t)}.\exp{(\pm\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}x)}$$

Le choix du signe est contraint par le système : si le milieu s'étend dans la direction $x \to \infty$, on doit choisir le signe -.

L'onde ne se propage plus ; on dit qu'elle est **évanescente**.

L'onde est réfléchie sur le plasma: la réflexion des ondes hertziennes sur l'ionosphère (couche de l'atmosphère débutant à 50 km environ) est utilisée pour propager ces ondes en des points non reliés en ligne droite à l'émetteur, ce qui augmente considérablement sa portée.

4. Propagation d'une onde dans un milieu conducteur non dilué :

On considère à nouveau un milieu non dilué, par exemple un conducteur ohmique, dans lequel les porteurs de charges sont des charges libres, portent une charge q et sont en densité n ; on tient cette fois compte de la force de frottement traduisant les interactions entre charges.
On a donc :

$$\boldsymbol{\tau\ fini}.$$

La conductivité est complexe et s'écrit :

$$\underline{\gamma(\omega)} = \frac{\gamma(0)}{1 + j\omega\tau}\ avec\ \gamma(0) = \frac{n.q^2.\tau}{m}$$

4.1. Relation de dispersion :

L'équation de propagation appliquée à une solution harmonique donne la **relation de dispersion :**

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\underline{\gamma(\omega)}$$

$\underline{k}$ est donc complexe.

On obtient alors :

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) - jk''(\omega) \text{ avec } k'(\omega) = Re(\underline{k}) \text{ et } k''(\omega) = -Im(\underline{k}).$$

On a alors :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}.exp\, j(\omega t - k'x).\exp(-k''x)$$

et

$$\vec{E}(t) = Re(\underline{\vec{E}}) = \overrightarrow{E_0}.\cos(\omega t - k'x).\exp(-k''x)$$

Remarque : dans notre exemple, l'onde se propage selon les x croissant ; on doit avoir :

$$k' > 0 \text{ et } k'' > 0$$

4.2. Vitesse de phase ; dispersion :

Définition : la vitesse de phase V_φ est la vitesse de propagation des plans d'onde :

$$\boldsymbol{V_\varphi = \omega/k'}.$$

Si cette célérité dépend de ω, on dit que le milieu est **dispersif.**

4.3. Absorption :

Le terme exp(-k"x) traduit un amortissement de l'onde ; on dit qu'il y a **absorption**.

Remarque : certains systèmes peuvent donner une amplification de l'onde (exemple : laser).

5. Effet de peau dans un conducteur ohmique :

Dans le cuivre, on a : $\tau = 10^{-14}$ s : on se place ici dans un cas où $\omega\tau \ll 1$.

La conductivité est réelle et s'écrit alors :

$$\gamma = \gamma(0) = \frac{n.e^2.\tau}{m}$$

5.1. Relation de dispersion :

La relation de dispersion s'écrit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n_0 e^2 \tau}{m\varepsilon_0 c^2}\omega = \frac{\omega^2}{c^2} - j\frac{\gamma}{\varepsilon_0 c^2}\omega$$

En ordre de grandeur, les termes du second membre valent $\mu_0\gamma\omega$ et $\frac{\omega^2}{c^2}$.

Comparons ces deux termes ; le dernier est négligeable si :

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$$

Dans un bon conducteur comme le cuivre : $\gamma = 6.10^7\ S.m^{-1}$.

On pourra donc négliger le dernier terme jusqu'aux rayons X.

La relation de dispersion s'écrit alors :

$$k^2 = -j\mu_0\gamma\omega$$

5.2. Epaisseur de peau :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

Epaisseur de peau du conducteur ohmique.

Ordre de grandeur dans le cuivre :

- f = 50 Hz : δ = 9,3 mm
- f = 1 MHz : δ = 66 µm

On calcule alors pour un champ polarisé rectilignement selon Oy :

$$\vec{E}(x,t) = E_0.\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right).\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right).\overrightarrow{u_y}$$

$$\vec{B}(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega}E_0.\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right).\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$