

BILANS DYNAMIQUES - EXERCICES

1. Écoulement de Poiseuille :

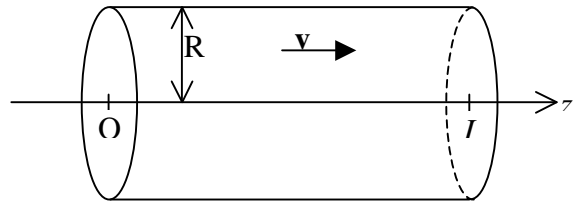
On considère une canalisation horizontale d'axe Oz, de rayon R, longueur L, dans laquelle coule un fluide incompressible et visqueux, de viscosité η .

On néglige le poids du fluide devant les forces de pression.

On appelle $\Delta P = P(0) - P(L) > 0$ la différence de pression entre les extrémités du tube.

On recherche le champ des vitesses de l'écoulement stationnaire, qu'on suppose du type :

$$\vec{v} = v(r) \cdot \vec{u}_z$$



On considère le système formé par le fluide contenu à l'instant t dans un cylindre d'axe Oz, de rayon $r \leq R$, de longueur L + la masse de fluide dm qui va entrer entre t et t+dt dans le cylindre.

a) Faire un schéma du système à l'instant t et à l'instant t+dt, et calculer sa variation de quantité de mouvement $D\vec{p}$ entre t et t+dt.

b) La contrainte visqueuse s'écrit ici : $\vec{\sigma} = \eta \frac{dv}{dr} \cdot \vec{e}_z$.

En déduire la résultante des forces de viscosité exercée sur le système.

c) Quelle est la résultante des forces de pression exercées sur le système ?

d) Déduire des questions précédentes l'expression du champ des vitesses.

2. Force exercée sur une canalisation :

Soit un écoulement stationnaire de fluide parfait et incompressible dans une canalisation à symétrie cylindrique, d'axe Ox, dont la section passe de S_1 à S_2 .

La vitesse du fluide dans la section S_1 est V_1 et sa pression P_1 .

Déterminer la composante sur Ox de la force exercée par le fluide sur la canalisation en fonction de S_1 , S_2 , V_1 et P_1 .

Réponse :
$$F = P_1(S_1 - S_2) - \frac{1}{2} \rho V_1^2 S_1 \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \right)^2$$

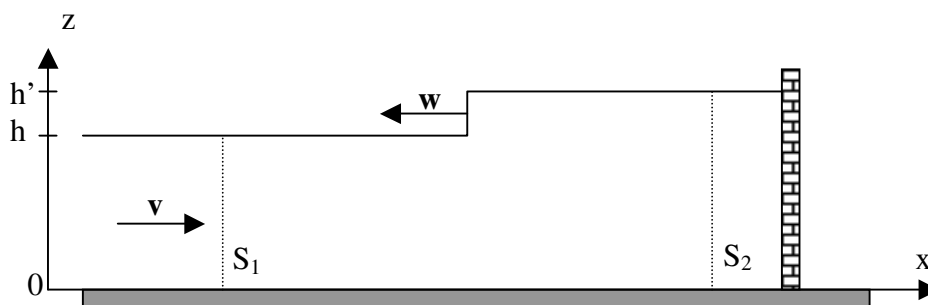
3. Génération d'une onde de ressaut (CCP PSI 02) :

Un canal de largeur L est obstrué par une paroi verticale (fermeture « brutale » d'une écluse). Une vague remonte alors le canal à une célérité w dans le référentiel terrestre.

La hauteur d'eau en amont du ressaut est h, et la vitesse du courant est v. En aval du ressaut, la hauteur d'eau est h' et la vitesse nulle. Les grandeurs h, h' et v sont constantes.

On étudie dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le système fermé (S) de fluide délimité par les sections (en pointillés) amont S_1 et aval S_2 . Le fluide est incompressible.

Pour simplifier, on supposera que le front de la vague est vertical.

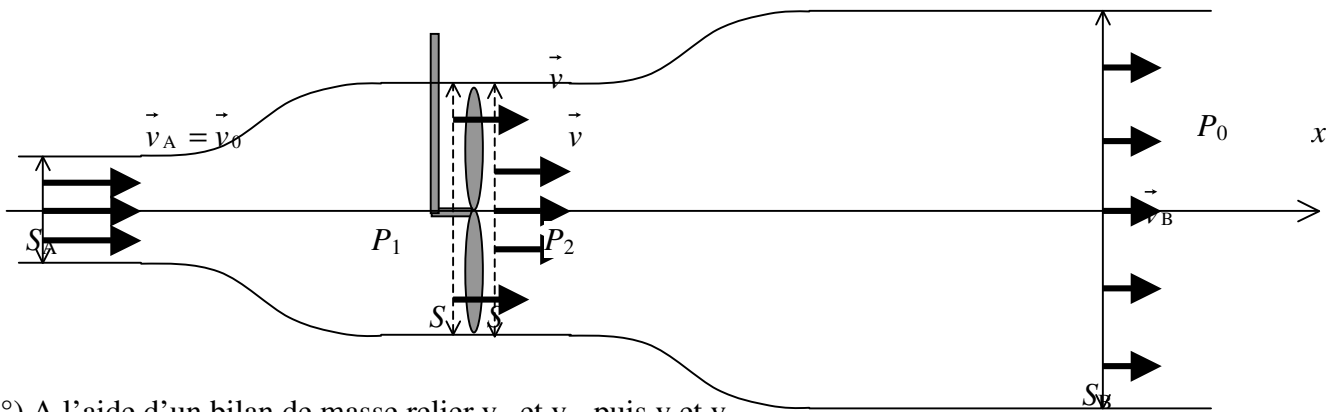


a) En traduisant la conservation de la masse, établir une relation entre v, w, h et h'.

- b) Faire le schéma du système à t et à $t+dt$. En déduire la variation de la composante horizontale de la quantité de mouvement du système et montrer qu'elle s'écrit $dP_x/dt = -\rho.L.h.g(v,w)$ où $g(v,w)$ est une fonction à expliciter.
- c) La pression étant P^o à la surface du fluide, calculer la pression régnant dans l'eau en amont puis en aval du ressaut, en appliquant la relation fondamentale de la statique des fluides.
- d) Que vaut la résultante des forces de pression sur la section gauche S_1 de (S) ? Même question sur la section droite S_2 de (S) et pour le front de vague qui est supposé vertical.
- En déduire l'expression de la résultante des forces extérieures s'appliquant sur (S) en fonction de ρ , g , L , h et h' .
- e) En déduire alors que $h(v+w)v = \frac{1}{2}.g.f(h,h')$ où $f(h,h')$ est une fonction à expliciter.
- f) En déduire la célérité de la vague en fonction de g , h et h' . Que vaut-elle si $h \approx h'$?

4. Etude d'une hélice :

Une hélice tourne autour d'un axe Ox . Elle est immergée dans l'air, fluide parfait en écoulement incompressible, de masse volumique ρ . Loin de l'hélice, le fluide est animé d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, constante et uniforme. Le schéma ci-dessus représente un tube de courant qui englobe l'hélice. A l'extérieur de ce tube de courant, la pression est uniforme, égale à P_0 . La vitesse et la pression du fluide sont uniforme sur une section droite du tube. Loin en amont de l'hélice, la section du tube est S_A , la pression de l'air P_0 et sa vitesse $\vec{v}_0$. Loin en aval de l'hélice, la section du tube est S_B , la pression de l'air est P_0 et sa vitesse $\vec{v}_B$. Au voisinage immédiat de l'hélice, la section du tube de courant est S , la vitesse de l'air est $\vec{v}$, la pression de l'air est P_1 à gauche de l'hélice et P_2 à droite. Les tourbillons sont localisés au voisinage immédiat de l'hélice.



- 1°) A l'aide d'un bilan de masse relier v_B et v_0 , puis v et v_0 .
Exprimer les pressions P_1 et P_2 en fonction de P_0 , ρ , v_0 , v_B et v .
- 2°) Déterminer la force $\vec{F}$ exercée par l'air sur l'hélice :
 - a) en effectuant un bilan de quantité de mouvement pour le fluide situé au voisinage immédiat de l'hélice ;
 - b) en effectuant un bilan de quantité de mouvement pour un volume de fluide de grande dimension, entourant l'hélice.
- 3°) En déduire une relation entre $\vec{v}_0$, $\vec{v}_B$ et $\vec{v}$.
- 4°) Effectuer un bilan d'énergie cinétique pour le volume de fluide situé au voisinage immédiat de l'hélice. En déduire la puissance P fournie par le fluide à l'hélice. Vérifier que $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$.
On pose $u = v / v_0$. Tracer les courbes $F(u)$ et $P(u)$. Commenter. Donner l'expression de la puissance maximale de la puissance de l'hélice en fonction de ρ , S et v_0 .