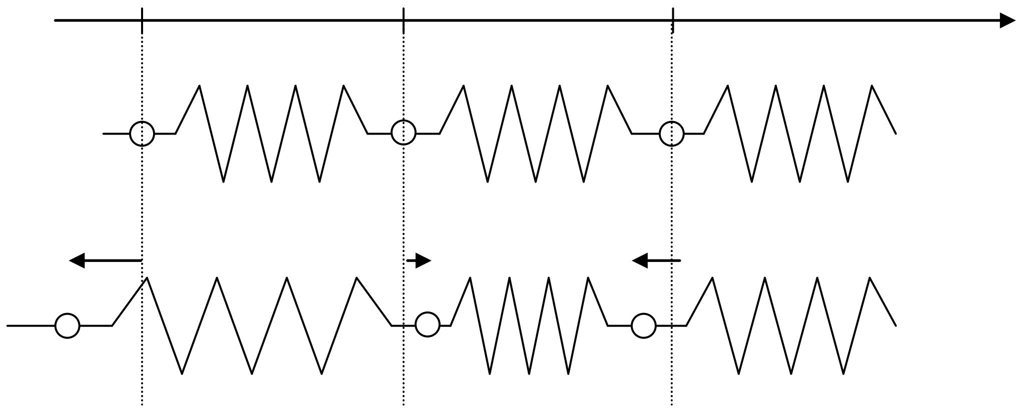
Chap 1 : PHENOMENES DE PROPAGATION UNIDIMENSIONNELS NON DISPERSIFS ; EQUATION DE D'ALEMBERT

1.Onde dans un solide cristallin :

1.1.Modèle :

On modélise un solide unidimensionnel par une chaine infinie d'oscillateurs constituée de masses m, situées aux abcisses x_n = n.a, et reliées par des ressorts identiques de raideur K et de longueur à vide L_0, dont la tension lorsque la chaine est à l'équilibre vaut T_0 ; on a donc $T_0 = K(a-L_0)$.



L'équation du mouvement de la masse m_n, d'**élongation** $u_n(t)$, s'écrit :

$$m\frac{d^2u_n(t)}{dt^2} = -K\,(u_n(t) - u_{n-1}(t) + a-L_0) + K\,(u_{n+1}(t)-u_n(t) + a-L_0)$$

$$m\frac{d^2u_n(t)}{dt^2} = -K\,(2u_n(t) - u_{n-1}(t) - u_{n+1}(t)) \qquad \text{Equation (1)}$$

1.2. Approximation des milieux continus :

Considérons une fonction C^2 u(x, t) telle u (x = na, t) = $u_n(t)$.

L'équation (1) s'écrit alors :

$$m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -K(\,2u(x,t)-u(x-a,t) -u(x+a,t))$$

Si la distance a devient très petite devant la distance caractéristique des variations spatiales de u(x,t), que l'on appellera longueur d'onde λ, on peut faire un développement limité de la fonction u(x,t) au voisinage de u(na,t).

Cela constitue l'approximation des milieux continus : $a \ll \lambda$.

On a alors : $u(x+a,t) = u(a,t) + \left(\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)_{x=na}.a + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)_{x=na}.a^2$

et $u(x-a,t) = u(a,t) - \left(\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)_{x=na}.a + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)_{x=na}.a^2$ au second ordre

1.3. Equation de d'Alembert :

On aboutit ainsi à l'équation :

$$m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = K.a^2.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

On peut l'écrire :

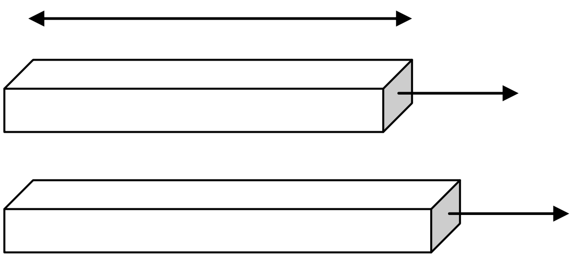
$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{où } c = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}}$$

Cette forme d'équation d'onde est appelée **équation de d'Alembert** (1717-1783) à une dimension.
C'est une équation linéaire.

La constante c a la dimension d'une vitesse et est appelée **celérité de l'onde**.

1.4. Module d'Young :

La raideur K, la masse m et le pas a sont des grandeurs microscopiques, peu adaptées à une description macroscopique. On définit en physique des solides le module d'Young E.



Considérons une petite surface dS d'une face d'un solide de longueur L soumis à une force dF ; on constate que, pour des petites élongations (domaine élastique) l'élongation relative ΔL/L est proportionnelle à dF.

On écrit : $\mathbf{dF = E.\frac{\Delta L}{L}.dS}$ **(loi de Hooke)**

Le coefficient de proportionnalité E est le module d'Young, unité : Pa .
Ordre de grandeur : Acier $E \approx 10^{11}$ Pa.

Relions E à K, m et a :
Dans une maille de longueurs a, b et c on trouve une masse m ; la masse volumique du solide est donc :

$$\mu = m / abc.$$

Pour une section dS de solide, le nombre de chaines en parallèle est n = dS / bc.
Chacune de ces chaines compte L / a ressorts de raideur K, l'élongation de l'un de ces ressorts est ΔL / (L/a) = a.ΔL / L ; on a donc dF = n.K.a.ΔL / L = dS. K.a. .ΔL / (Lbc).

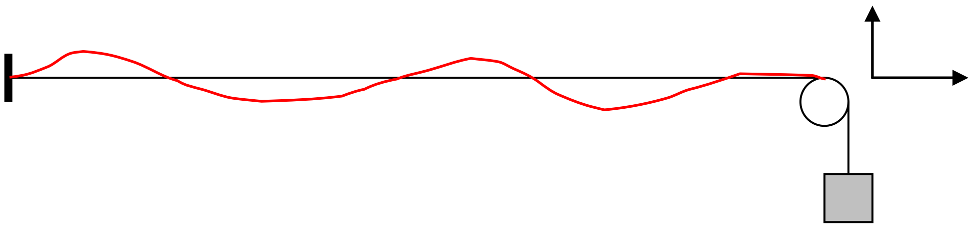
On a donc par identification : E = Ka /(bc) .

La célérité s'exprime alors : $c = \sqrt{\dfrac{Eabc}{m}}$ soit $c = \sqrt{\dfrac{E}{\mu}}$ Exemple : fer $\mu = 7900\ kg.m^{-3}$ d'où $c \approx 3600\ m.s^{-1}$.

2.Corde vibrante sous tension :

On considère une corde homogène et sans raideur de masse linéïque μ et tedue avec une tension T_0 à l'équilibre. On néglige le poids devant la tension. Les mouvements de la corde sont transversaux et petits.

Equilibre
Hors équilibre



On considère un petit élément de corde de longueur au repos dx ; il est soumis à deux forces :

- la tension $\vec{T}$ (x+dx,t) exercée par la partie de corde d'abcisses supérieurs à x+dx ;
- la tension $-\vec{T}$ (x,t) exercée par la partie de corde d'abcisses inférieure à x ;

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce petit élément de corde s'écrit :

$$\mu.dx.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}.\vec{u}_y = \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t)$$

En projection sur Ox : $\left\|\vec{T}(x+dx,t)\right\|.\cos(\alpha(x+dx,t)) - \left\|\vec{T}(x,t)\right\|.\cos(\alpha(x,t)) = 0 \Rightarrow \left\|\vec{T}\right\|.\cos(\alpha) = cte = T_0$

En projection sur Oy : $\mu.dx.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \left\|\vec{T}(x+dx,t)\right\|.\sin(\alpha(x+dx,t)) - \left\|\vec{T}(x,t)\right\|.\sin(\alpha(x,t))$

On en déduit l'équation vérifiée par y(x,t) :

$$\mu\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

C'est une équationde d'Alembert ; la célérité est ici : $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

Remarque 1 : $T_y = T_0.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$: analogue à la loi de Hooke.

Remarque 2 : l'opérateur d'Alembertien (à une dimension) est noté $\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$;

3.Solutions générales de l'équation de d'Alembert :

Les solutions s'écrivent s(x, t) = f(x - ct) + g(x+ ct) , c étant la célérité des ondes.

On dit qu'une onde s(x, t) se propage sur un axe Ox si sa valeur en x à l'instant t est liée à sa valeur en x_0 à t_0 par : $x - x_0 = c\,(t - t_0)$.

La solution f (x -ct) décrit une **onde progressive** progressant dans le sens des x croissants au cours du temps.

La solution g (x + ct) décrit une **onde régressive** progressant dans le sens des x décroissants au cours du temps.

A un instant t donné, f et g sont même valeur dans un plan x = cte ; on les appelle **ondes planes**.
Les plans x = cte sont appelés plans d'onde.

4.Cas de l'onde plane progressive harmonique (OPPH) :

Toute onde f(x-ct) peut être considérée comme une somme (discrète ou continue) de fonctions sinusoïdales de la variable x-ct.

Définition : une onde plane progressive harmonique est une onde de la forme : $f(x-ct) = A.\sin(\omega t-kx+\phi)$.

Définition : $\vec{k} = k.\vec{u}_x$ est le vecteur d'onde associé à l'onde.

L'OPPH possède une double périodicité :

- temporelle, de période $\mathbf{T = 2\pi / \omega}$, ω étant sa pulsation ;
- spatiale, de période $\boldsymbol{\lambda = 2\pi / k}$, appelée longueur d'onde.

L'OPPH vérifiant l'équation de d'Alembert, on a : $\boldsymbol{\omega = k.c}$ **et** $\boldsymbol{\lambda = c.T}$.

Vitesse de phase : les plans d'amplitude constante se propagent à la vitesse $v_\varphi = \omega/k$ appelée vitesse de phase.

5.Ondes planes stationnaires :

Si le milieu est infini, une onde émise en O à t = 0 se propage indéfiniment.
En général, le milieu est fini, et à ses extrémités se produisent des réflexions.

a) Exemple :

On considère une corde fixée à l'extrémité x = 0 sur laquelle arrive une onde $y(x, t) = f(x -ct)$.
En x = 0 , on doit avoir $y(0, t) = 0$, ce que ne vérifie pas f.
Il existe donc une onde réfléchie, soit $g(x + ct)$, telle que :
$y(0, t) = f(-ct) + g(ct) = 0 \Rightarrow f(-ct) = - g(ct)$

On a donc
$$\begin{aligned} y(x,t) &= f(x - ct) + g(x + ct) \\ &= f(x - ct) - f(-(x + ct)) \\ &= f(x - ct) - f(-x - ct). \end{aligned}$$

Comment s'écrit y(x,t) si l'onde incidente progressive est plane sinusoidale ?

On définit le coefficient de réflexion en amplitude par $r = [g / f]_{x=0}$.
Ici r = - 1.
Remarque : dans le cas général d'un changement de milieu en x = 0 , une partie de l'onde est transmise et une partie réfléchie ; on définit alors le coefficient de transmission en amplitude par $t = [g / h]_{x=0}$, h étant l'onde transmise.

b)Définition :

Une onde stationnaire est une onde qui s'écrit : $\mathbf{s(x, t) = F(x).G(t)}$.

Cette onde **ne se propage plus**.

On montre que les seules solutions acceptables physiquement sont :

$$s(x,t) = A.\cos(kx + \phi).\cos(\omega t + \varphi).$$

On appelle **noeud de vibration** les points pour lesquels $s(x,t) = 0 \ \forall t$.
On appelle **ventre de vibration** les points pour lesquels l'amplitude de vibration est maximale.

La distance entre deux noeuds de vibration consécutifs est égale à $\lambda/2$, la distance entre un ventre et un noeud consécutifs est $\lambda/4$.

Une onde stationnaire peut être considérée comme la superposition de deux ondes progressives de même amplitude se propageant en sens contraires.

De même, une onde progressive peut être considérée comme la superposition de deux ondes stationnaires de même amplitude et en quadrature.

Il est donc équivalent pour un problème donné de rechercher des solutions stationnaires ou progressives.

6. Modes propres d'une corde sous tension : régime libre.

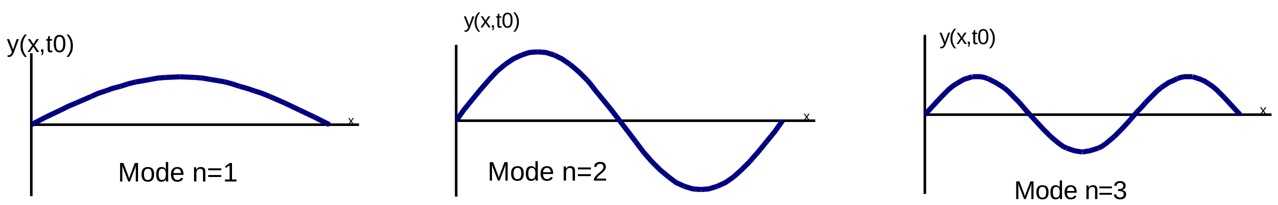
On considère une corde de longueur L fixée aux deux extrémités, sur laquelle aucune action extérieure n'est exercée : la corde oscille alors en régime libre.

On a alors $y(x, t) = A.\cos(kx + \phi).\cos(\omega t + \varphi)$

Les conditions aux limites imposent :
$y(0, t) = 0 \Rightarrow \cos(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2$.
$y(L, t) = 0 \Rightarrow \cos(kL + \pi/2) = -\sin(kL) = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{L = n.\ \pi/k = n.\lambda / 2}$ avec $n \in N^*$.

Les différentes valeurs de n correspondent aux différents **modes propres** de la corde.

Les pulsations propres de la corde sont donc $\boxed{\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}}$



Pour n = 1, on observe le mode fondamental.
Les modes supérieurs sont appelés modes harmoniques :
le mode n = 2 correspond au premier harmonique, etc...

Le mouvement général de la corde est une superposition des différents modes propres :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\sin(k_n x).\cos(\omega_n t + \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\sin(n\pi x / L).\cos(n\pi c t / L + \varphi_n)$$

Les constantes A_n et φ_n sont fixées par les conditions initiales, c.à.d par la donnée de $y(x, 0)$ et $(\partial y/\partial t)(x, 0)$.

A t = 0 , on a en effet :

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\sin(k_n x).\cos(\varphi_n)$$

$$\text{et } \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n.(n\pi c / L).\sin(k_n x).\sin(\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n.\sin(k_n x).$$

On reconnait les développements en série de Fourier de deux fonctions impaires de période 2L ; la connaissance de y(x, 0) et ($\partial y/\partial t$) (x,0) sur l'intervalle [0,L] est donc suffisante pour en obtenir le développement en série de Fourier, si l'on prolonge ces fonctions en les rendant périodiques de période 2L.

7.Régime forcé : corde de Melde :

Corde de Melde (1852) : la corde de Melde est une corde dont les extrémités sont considéréres comme fixes, animée par un vibreur de pulsation ω variable.

La corde entre en résonance lorsque ω est égale à l'une des fréquences propres de la corde, soit

$$\omega = \omega_n = \frac{n\,\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}\ .$$

8. Notions musicales :

Une octave est l'intervalle de fréquence f, 2f.

Deux notes à l'octave sonnent de manière semblable, aussi portent-elles le même nom ; on les différencie par un numéro d'octave placé en indice.

Une octave est divisée en 12 demi-tons formée des notes successives :

DO-DO♯-RE-RE♯ (appelé plutot MI♭)-MI-FA-FA♯-SOL-SOL♯-LA-LA♯ (appelé plutôt SI♭)-SI-DO

♯ = dièse : élève la note d'un demi-ton ;
♭ = bémol : abaisse la note d'un demi-ton.

Dans la gamme tempérée, deux demi-tons successifs ont un rapport de fréquence constant et égal à $2^{1/12}$.

La relation « nom-fréquence » nécessite une référence : le La_3 de fréquence f = 440 Hz.

Certains intervalles sonnent de manière plus harmonieuse que d'autres :
- la quinte correspondant à 7 demi-tons : exemple : do-sol $f_2 / f_1 = 3/2 \approx 2^{7/12}$ (à 0,1 % près) ;
- la tierce majeure correspondant à 4 demi-tons : exemple : do-mi.

Un son musical n'est pas composé que d'une seule fréquence, mais comporte en général de nombreux harmoniques ; on le caractérise par 3 grandeurs :
- l'intensité, liée à l'amplitude des vibrations ;
- la hauteur, liée à la fréquence fondamentale du son ;
- le timbre, lié au spectre du son.