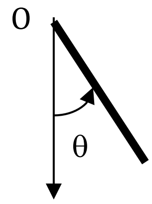
SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE – REVISIONS

1. Pendule pesant :

On considère un pendule pesant composé d'une tige rectiligne OA oscillant dans un plan vertical autour d'un axe horizontal passant par O (liaison pivot parfaite)
Son moment d'inertie par rapport à un axe passant par son extrémité est J.

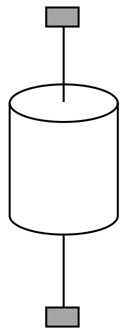
a) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la tige.
b) Quelle est sa solution dans le cas des petites oscillations ?



2. Pendule de torsion :

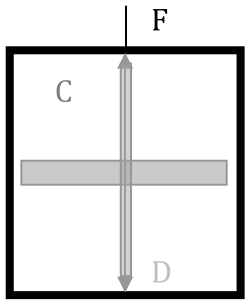
Un fil métallique vertical est lié à un cylindre homogène de masse m, rayon R et moment d'inertie J par rapport à son axe de symétrie Oz. Le fil est tendu et confondu avec l'axe Oz. Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre, chaque fil exerce un couple de rappel élastique proportionnel à θ avec une constante de torsion C.

a) Déterminer la fréquence des oscillations du système.
b) Que se passe-t-il si le système n'est pas vertical ?



3. Entraînement par frottement :

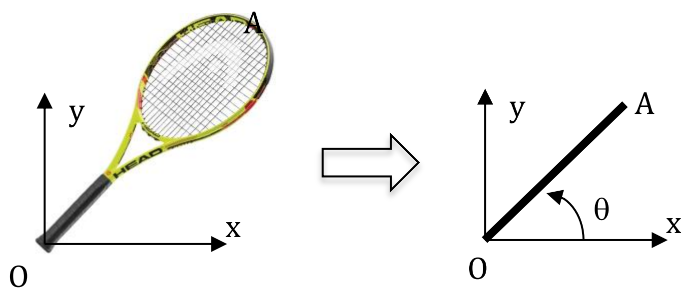
On étudie le système déformable représenté ci-contre.
D est un disque qui pivote sur le cadre C. Le fil F supportant l'ensemble est sans torsion (constante de torsion nulle). J_C et J_D désignent les moments d'inertie de C et D par rapport à l'axe de rotation A.
A l'instant t = 0 , C est au repos dans le référentiel galiléen R et D tourne à la vitesse angulaire ω_0. Le frottement solide au niveau du pivot a pour effet d'entraîner C. On suppose que le frottement solide introduit un moment constant de valeur absolue Γ par rapport à l'axe.



a) Calculer la vitesse angulaire finale ω_f du système et la variation d'énergie cinétique ΔE_C de l'ensemble.
b) Calculer les vitesses angulaires ω_C et ω_D en fonction du temps. Au bout de combien de temps la vitesse angulaire finale est-elle atteinte ?
c) Calculer la puissance totale des forces de frottement. En déduire l'énergie transformée en chaleur par les frottements et comparer à ΔE_C.

4. Raquette de tennis (d'après TIPE Hansjacob/Lamboley) :

Une raquette de tennis est modélisée par une tige mince homogène OA, de longueur a et de rayon R, de masse m et de moment d'inertie $J = ma^2/3$ par rapport à l'axe de rotation vertical Oz.
On modélise la liaison main-raquette par un pivot parfait d'axe Oz et l'on note $\vec{R} = R_x.\overrightarrow{u_x} + R_y.\overrightarrow{u_y}$ la résultante des actions exercées par la main sur la raquette.
On repère le mouvement de la raquette par l'angle θ. La raquette est initialement immobile en θ=0.
La raquette est frappée à l'instant t=0 en un point E(x=b,y=0) par la balle avec une force $\vec{F} = -F.\overrightarrow{u_y}$.



a) Quelle est l'accélération du centre de masse de la raquette en fonction de $\dot{\theta}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$? Justifier l'équation :

$$\frac{ma\ddot{\theta}(t)}{2} = R_y - F$$

c) Etablir une autre relation entre $\ddot{\theta}(t)$, a, b, m et F en supposant l'axe de rotation Oz fixe.
d) En déduire l'expression de la composante R_y en fonction de m, a , b et F. Vérifier qu'il existe une valeur optimale b_{opt} de b permettant d'annuler R_y.

Réponse : $b_{opt} = 2a/3$.

Marcher à son rythme pour aller loin (CCP TSI 2019) :

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'allié naturel de nos muscles pour permettre le déplacement.

On se propose ici de déterminer la période propre d'oscillations d'une jambe adulte en utilisant un modèle mécanique simple.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

On assimile la jambe à un solide rigide de masse m_o et de longueur d en rotation autour d'un axe horizontal $(O, \overrightarrow{e_x})$ fixe dans le référentiel d'étude. $(O, \overrightarrow{e_x})$ passe par la hanche du randonneur (il est sortant sur la **figure 2**, page 5). La liaison pivot en O est supposée parfaite. Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$ est noté J. On néglige tout frottement. On note H le centre d'inertie de la jambe situé à la distance d' de O. La jambe ne touche pas le sol dans cette étude. γ est l'angle entre la verticale passant par O et la droite (OH).

L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$ et supposée uniforme.

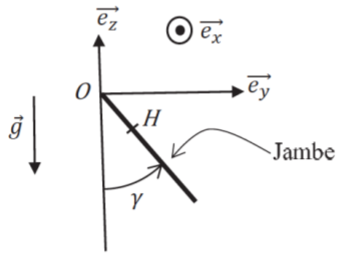


Figure 2 - Jambe et repère cartésien

Q16. Donner sans démonstration l'expression du moment cinétique scalaire, L_{Ox}, de la jambe par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$ en fonction de γ et J.

Q17. Que vaut le moment par rapport à $(O, \overrightarrow{e_x})$ de l'action mécanique de la liaison en O ? Justifier.

Q18. Déterminer l'expression du moment Γ_{Ox} du poids de la jambe par rapport à $(O, \overrightarrow{e_x})$ en fonction de g, m_o, d' et γ.

Q19. Établir l'équation différentielle vérifiée par γ, caractérisant le mouvement de la jambe.

On souhaite retrouver cette équation à l'aide d'une méthode énergétique.

Q20. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie cinétique de la jambe.

L'énergie potentielle de pesanteur de la jambe s'écrit :

$$E_p = -m_o g d' \cos(\gamma) + constante. \qquad (3)$$

Q21. Justifier que l'énergie mécanique de la jambe se conserve au cours du temps.

Q22. En déduire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par γ caractérisant le mouvement de la jambe.

Q23. En se plaçant dans l'approximation des petites oscillations, montrer que la période propre T d'oscillations de la jambe est :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_o g d'}}. \qquad (4)$$

Q24. Le moment d'inertie est de la forme : $J = k m_o d^2$ où k est une constante positive. Le centre d'inertie H de la jambe est situé à mi-hauteur de la jambe. En déduire que la période propre T de la jambe est indépendante de la masse et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe.

Q25. Un randonneur adulte a une jambe d'environ 90 cm. La période propre d'oscillations de sa jambe est de 1,6 s. Quelle est la période propre d'oscillations de la jambe d'un randonneur enfant dont la jambe mesure environ 40 cm ?

Q26. À l'aide d'une description simple du pas effectué, montrer que la vitesse du randonneur, lorsqu'il respecte sa période d'oscillations naturelle, est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de sa jambe. Montrer alors que la vitesse « naturelle » de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.

Marcher à son rythme pour aller loin : corrigé :

Remarques générales :

- Des confusions entre solide et point matériel (Q16) ;
- Des confusions entre moment par rapport à un point (vectoriel) et moment par rapport à un axe (scalaire) aux Q17 et Q18.
- Plus généralement des confusions sclaires/vecteurs ;
- Une mauvaise justification de la conservation de l'énergie (Q 21).

Q16. Moment cinétique scalaire : $\boldsymbol{L_{Ox} = J \times \frac{d\gamma}{dt} = J\dot{\gamma}}$

Q17. L'énoncé précise que la liaison pivot est <u>parfaite</u>. Le moment de l'action mécanique de la liaison par rapport à Ox , soit $\overrightarrow{\mathcal{M}_0}.\overrightarrow{e_x}$ est donc nul.

Q18. Moment du poids : le poids s'applique au centre d'inertie H, soit

$$\Gamma_{Ox} = \left(\overrightarrow{OH} \wedge \vec{P}\right).\overrightarrow{e_x} = \left(\left(-d'\cos(\gamma)\,\overrightarrow{e_z} + d'\sin(\gamma)\,\overrightarrow{e_y}\right) \wedge \left(-mg\,\overrightarrow{e_z}\right)\right).\overrightarrow{e_x} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma_{Ox} = -mg\,d'\sin(\gamma)}$$

Q19. Utilisons le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe Ox :

$$\frac{dL_{Ox}}{dt} = \Gamma_{Ox}\left(\sum \vec{F}\right) \Leftrightarrow J\frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \Gamma_{Ox}\left(\vec{P}\right) \Leftrightarrow J\ddot{\gamma} = -mg\,d'\sin(\gamma) \Leftrightarrow \boldsymbol{\ddot{\gamma} + \frac{mgd'}{J}\sin(\gamma) = 0}$$

Q20. Energie cinétique de la jambe :

$$E_c = \frac{1}{2}J\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}J\,\dot{\gamma}^2}$$

Q21. On néglige tout frottement : les seules forces à considérer sont le poids, qui est conservatif, et la liaison en O, de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_0}$ dont la puissance vaut :

$$P = \overrightarrow{\mathcal{M}_0}.\dot{\gamma}\overrightarrow{e_x} = \mathcal{M}_{0x}.\dot{\gamma} = 0$$

En vertu du théorème de l'énergie mécanique, l'**énergie mécanique se conserve**.

Q22. Calculons l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\,\dot{\gamma}^2 - m_0 g\,d'\cos(\gamma) + constante$$

L'énergie mécanique se conserve, E_m = cste donc :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}J \times 2\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} + m_0 g d'\sin(\gamma) \times \dot{\gamma} \Leftrightarrow \boldsymbol{\ddot{\gamma} + \frac{m_0 g d'}{J}\sin(\gamma) = 0}$$

On retrouve bien l'équation différentielle de la Q19.

Q23. Approximation des petites oscillations : $\sin(\gamma) \approx \gamma$. L'équation différentielle devient :

$$\ddot{\gamma} + \frac{m_0 g d'}{J}\gamma = 0$$

On reconnait l'équation de l'**oscillateur harmonique** et on pose $\omega_0^2 = m_0 g d'/J$, soit :

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_0 g d'}}}$$

Q24. On injecte l'expression de J dans l'expression de la période et avec $d' = d/2$:

$$T = \frac{2\pi\sqrt{k\,m_0\,d^2}}{\sqrt{m_0 g d/2}} = \boldsymbol{2\sqrt{2k}\pi \times \sqrt{d/g}}$$

k, et g étant des constantes, la période est bien proportionnelle à la racine de la longueur de la jambe.

Q25. Posons $K = 2\sqrt{2k}\pi/\sqrt{g}$; on a alors $T_{adulte} = K\sqrt{d_{adulte}}$ et $T_{enfant} = K\sqrt{d_{enfant}}$

Soit $T_{enfant} = T_{adulte} \times \sqrt{\frac{d_{enfant}}{d_{adulte}}} = 1{,}6 \times \sqrt{\frac{4}{9}} = 1{,}6 \times \frac{2}{3} \approx \mathbf{1{,}1\ s}$

Q26. La vitesse du randonneur est liée à la longueur du pas par:

$$v = 2\,\frac{l_{pas}}{T}$$

car un pas s'effectue en une demi-période d'oscillation.

En supposant que l'angle maximal γ_{max} est le même pour tous, on a :

$$l_{pas} = d.\sin(\gamma_{max}) = d.\gamma_{max}$$

On a alors :

$$v \propto \frac{d}{\sqrt{d}} \Longrightarrow \boldsymbol{v \propto \sqrt{d}}$$

Par conséquent :

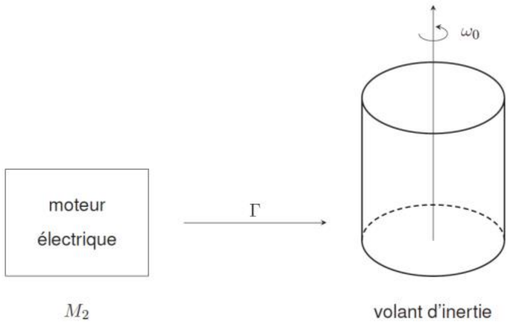
$$\frac{v_{adulte}}{v_{enfant}} \propto \sqrt{\frac{d_{adulte}}{d_{enfant}}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

La vitesse naturelle de l'adulte est 1,5 fois plus grande que celle de l'enfant.

E3A MP 2018 : volant d'inertie :

En 2009, les écuries Ferrari et McLaren ont intégré à leurs véhicules de Formule 1 un volant d'inertie ou SREC (Système de Récupération d'Energie Cinétique). L'objectif était de récupérer l'énergie pendant le freinage et de la restituer pendant certaines phases d'accélération. L'intérêt du SREC est une accélération plus intense que celles des voitures non équipées. L'inconvénient est, outre les coûts de développement, le poids du système qui pénalise la performance de la voiture. Ce système a notamment permis à Kimi Räikkönen de gagner le grand prix de Belgique en 2009 au volant de sa Ferrari.

L'énergie peut être récupérée de manière mécanique. Lors d'un freinage, les roues arrière font tourner une machine électrique M_1 fonctionnant en génératrice. L'énergie électrique produite est utilisée pour alimenter un moteur électrique M_2 qui lance le volant d'inertie à une vitesse pouvant aller jusqu'à 60000 tr/min au maximum. L'action de M_2 est modélisée par un couple moteur de valeur absolue Γ constant. L'énergie cinétique du véhicule est ainsi stockée sous forme d'énergie cinétique de rotation (volant d'inertie en rotation autour de son axe). Le volant d'inertie tourne en roue libre autour de son axe en attentant la phase de restitution demandée par le pilote.



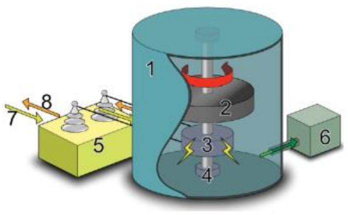


FIGURE 5 – Schéma de principe d'un volant associé à un système électrique pour stocker de l'énergie mécanique et rendre de l'énergie électrique. Dans cet exemple le volant d'inertie tourne dans une chambre sous vide pour limiter les frottements. 1 - chambre sous vide / 2 - volant d'inertie / 3 - moteur électrique / 4 - axe de rotation / 5 - convertisseur électrique / 6 - pompe à vide / 7 et 8 - lignes de tension (Source : wikipedia.org)

Le volant d'inertie sera assimilé à un cylindre homogène de masse m, de rayon R, de hauteur L, de masse volumique ρ en rotation par rapport à l'axe Δ axe de symétrie de révolution. On rappelle que le moment d'inertie J_Δ du cylindre par rapport à Δ est donné par :

$$J_\Delta = \iiint r^2 dm$$

où dm est une masse élémentaire situé à la distance r de l'axe Δ.

G1. Parmi les expressions ci-dessous, identifier la seule possibilité pour le moment d'inertie J_Δ et préciser pourquoi les autres propositions sont fausses.

$$J_\Delta = \frac{1}{2}mR$$

$$J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$$

$$J_\Delta = mRL$$

$$J_\Delta = 2\frac{mL}{R}$$

G2. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ lors de la mise en rotation du cylindre, sous l'action du couple Γ, en négligeant tout frottement.

Dans les questions G3 à G6, les frottements sont modélisés par un couple résistif γ constant.

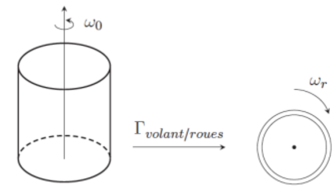
G3. Exprimer la durée d'arrêt Δt du cylindre pour une vitesse de rotation initiale ω_0.

G4. En déduire le nombre N de tours effectués par le cylindre avant l'arrêt en fonction des données de J_Δ, ω_0 et γ.

G5. On souhaite que le volant d'inertie soit en rotation pendant $\Delta t = 10$ min. Ce dernier étant un cylindre d'environ 20 cm de rayon, et le couple résistif étant de l'ordre de 20 N.m, évaluer la masse m du volant d'inertie qu'il faudrait mettre en place dans une Formule 1 en considérant que sa vitesse de rotation initiale vaut 60000 tour/min. Montrer que cette masse est de l'ordre de la centaine de kg.

G6. Évaluer (en tours/min) la vitesse de rotation ω_0' du volant d'inertie après 8 min.

Le volant d'inertie transfère ensuite son énergie cinétique de rotation aux roues. On considère toujours le volant d'inertie de la partie précédente de masse $m = 100$ kg et l'ensemble des quatre roues est modélisé par quatre cylindres homogènes de rayon $R_r = 33$ cm et de masse $m_r = 12$ kg chacun en rotation à la vitesse angulaire ω_r.



G7. On considère que la Formule 1 se déplace à une vitesse v de 200 km.h^{-1}, en supposant que les roues roulent sans glissement, exprimer puis calculer la vitesse angulaire ω_r des roues.

G8. Les pertes seront prises en compte en considérant une vitesse initiale de rotation du volant d'inertie qui vaut seulement $\omega_0 = 5000$ tr.min^{-1} au début de la restitution d'énergie. L'ensemble {Formule 1 + pilote} possède une masse $M = 800$ kg. En considérant que l'énergie cinétique de rotation du volant d'inertie sert à augmenter la vitesse de rotation des quatre roues et à augmenter la vitesse de la Formule 1 jusqu'à une nouvelle valeur v', exprimer la variation du carré de la vitesse par $\Delta(v^2) = v'^2 - v^2$ en fonction de M, m, R, ω_0 et m_r la masse d'une roue.

G9. Application numérique. Quelle nouvelle vitesse v' peut-on espérer atteindre alors ? Commenter.