Chapitre 2 : CINEMATIQUE DES FLUIDES

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.3. Mécanique des fluides	
4.3.1. Description d'un fluide en mouvement	
Champ eulérien des vitesses. Lignes de champ. Tubes de champ.	Définir et utiliser l'approche eulérienne.
Écoulement stationnaire.	Discuter du caractère stationnaire d'un écoulement en fonction du référentiel d'étude.
Dérivée particulaire de la masse volumique. Écoulement incompressible.	Établir l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique. Utiliser l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique pour caractériser un écoulement incompressible.
Débit massique. Débit volumique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur densité de courant de masse à travers une surface orientée. Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux du champ de vitesse à travers une surface orientée.
Équation locale de conservation de la masse.	Établir l'équation locale de conservation de la masse dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Citer et utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque à l'aide de l'opérateur divergence et son expression fournie.
Caractérisation d'un écoulement incompressible par la divergence du champ des vitesses.	Traduire localement, en fonction du champ de vitesses, le caractère incompressible d'un écoulement.
Dérivée particulaire du champ de vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer la dérivée particulaire de la vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Utiliser l'expression de l'accélération, le terme convectif étant écrit sous la forme (**v.grad**) **v.** Utiliser l'expression fournie de l'accélération convective en fonction de **grad** ($v^2/2$) et **rot v** x **v**.
Écoulement irrotationnel défini par la nullité du rotationnel du champ des vitesses en tout point ; potentiel des vitesses.	Traduire localement, en fonction du champ de vitesses, le caractère irrotationnel d'un écoulement et en déduire l'existence d'un potentiel des vitesses.

1. Description du fluide en mouvement ; champ des vitesses :

1.1. Description eulérienne :

On utilise la **description eulérienne**, utilisée pour tous les champs en physique.

Pour le **champ des vitesses**, elle consiste à donner la vitesse en tout point du fluide et à tout instant, par rapport au référentiel considéré, soit :

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_{/R}}(\vec{r}, t)$$

Les variables d'espace et de temps sont ici des variables **indépendantes**, appelées variables d'Euler.

1.2. Ecoulement stationnaire :

Définition : on appelle écoulement stationnaire un écoulement pour lequel tous les champs eulériens sont indépendants du temps (donc en particulier la vitesse).

Cela se traduit mathématiquement par :

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial t} = 0}$$

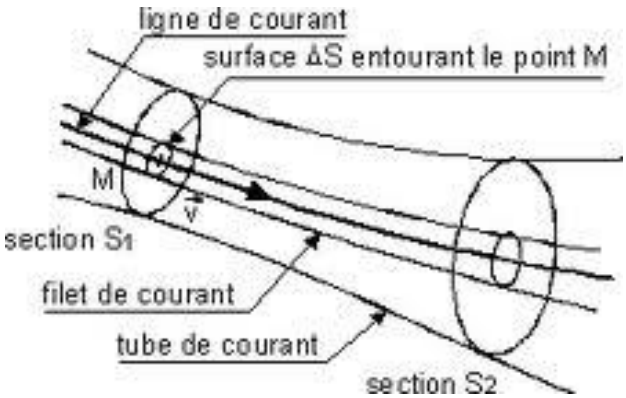
Dans ce cas la variable t n'apparaît pas dans l'expression de $\vec{v}$.

Le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel considéré.

1.3. Définitions :

Définition : Les **lignes de courant** sont les lignes de champ du vecteur vitesse ; elles se déforment au cours du temps, si l'écoulement n'est pas stationnaire.

Définition : Un **tube de courant** est la surface formée par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé C.

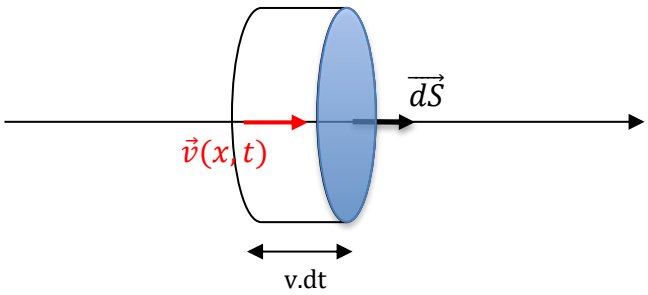


2. Débits :

2.1. Débit volumique :

Définition : le débit volumique Dv est le volume de fluide traversant une certaine surface **orientée** pendant l'unité de temps. Unité : $m^3.s^{-1}$.

$$D_v = \frac{dV}{dt}$$



Soit un écoulement parcouru par un fluide à vitesse $\vec{v}(\vec{r},t)$; le volume élémentaire traversant une petite surface $\overrightarrow{dS}$ pendant dt est :

$$d^2V = \vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS}.dt$$

Le volume traversant une surface S pendant dt est donc :

$$dV = \iint \vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS}.dt = \left(\iint \vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS}\right).dt$$

Le débit volumique s'écrit donc :

$$\boldsymbol{D_v = \iint \vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS}}$$

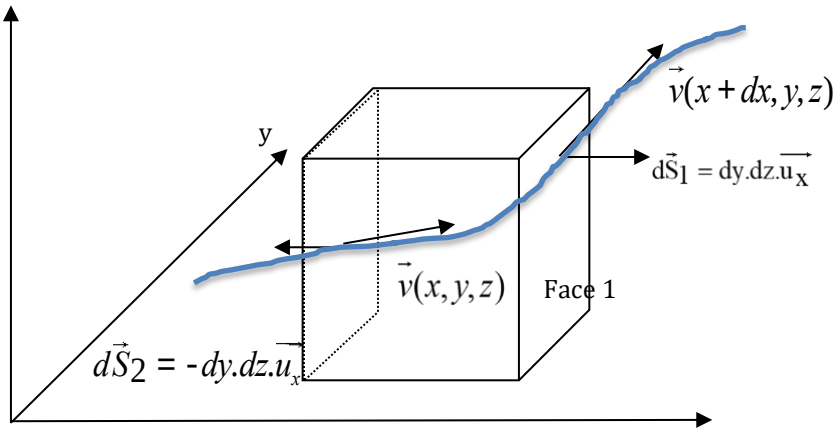
C'est le **flux** de $\vec{v}(\vec{r},t)$ à travers la surface S.

Cas simple et classique : écoulement à travers une surface S perpendiculaire à $\vec{v}$ et sur laquelle la vitesse $\vec{v} = v(x,t).\overrightarrow{e_x}$ est uniforme.

$$\boldsymbol{D_v(x,t) = v(x,t).S}$$

2.2. Flux volumique : opérateur divergence :

Calculons le débit à travers les faces d'un petit volume élémentaire dV = dx.dy.dz (6 faces) :



Le débit élémentaire s'écrit alors :

$$\begin{aligned} dD &= v_x(x+dx,y,z,t).dy.dz - v_x(x,y,z,t).dy.dz \\ &+ v_y(x,y+dy,z,t).dx.dz - v_y(x,y,z,t).dx.dz \\ &+ v_z(x,y,z+dz,t).dx.dy - v_z(x,y,z,t).dx.dy \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x}.dx.dy.dz + \frac{\partial v_y}{\partial y}.dy.dx.dz + \frac{\partial v_z}{\partial z}.dz.dx.dy$$

$$= + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).dx.dy.dz$$

On rappelle :

$$\boldsymbol{div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}}$$

La divergence est un **opérateur** ; elle a pour unité m^{-1}, elle s'applique à un champ de vecteurs et donne un scalaire : pour le rappeler il n'y a pas de flèche sur div.

Remarque : les expressions de la divergence en coordonnées cylindriques et sphériques sont beaucoup moins simples !

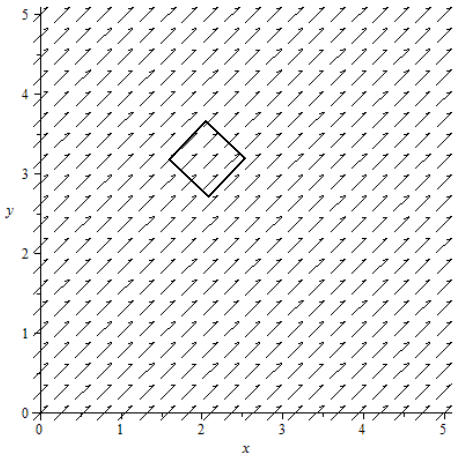
La divergence d'un vecteur exprime le flux volumique de ce vecteur en un point.

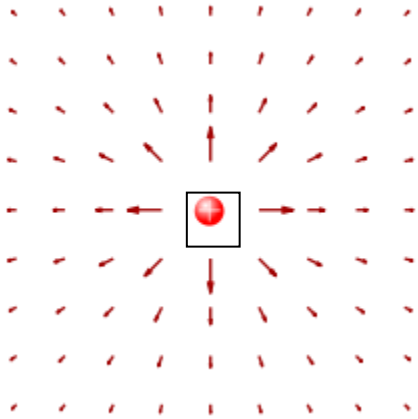
Théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_V div(\vec{v}).dV = \oiint_S \vec{v}.\overrightarrow{dS}$$

où V est le volume fermé par la surface S (fermée) orientée vers l'extérieur.

Exemples :





La divergence d'un champ de vecteurs est non-nulle lorsque à travers la surface fermant un petit volume il « sort plus de champ qu'il n'en rentre », ou qu'il « entre plus de champ qu'il n'en sort ».

2.3. Débit massique :

Définition : le **débit massique D_m** est la masse traversant une certaine surface orientée pendant l'unité de temps. Unité : $kg.s^{-1}$.

$$D_m = \frac{dm}{dt}$$

Avec un raisonnement analogue au précédent on a *:*

$$D_m = \iint \rho(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS}$$

Définition : le vecteur $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t)$ est appelé vecteur densité de courant de masse.

Généralisation (hors-programme) : le débit d'une grandeur G(t) quelconque – scalaire ou vectorielle - est égale au flux du vecteur :

$$\overrightarrow{J_G}(\vec{r},t) = g(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t)$$

où :

$$g = \frac{dG}{dV}$$

est la densité volumique de G(t).

3. Dérivée particulaire de la masse volumique :

Comme le champ des vitesses, le champ des masses volumiques dépend de $\vec{r}$ et de t.

Considérons une particule de fluide dans un écoulement : entre les instants t et t+ dt, elle se déplace du point M(x, y, z) au point M'(x+dx, y+dy,z+dz) avec :

$$dx = v_x(x,y,z,t)\,dt\ ;\ dy = v_y(x,y,z,t)\,dt\ ;\ dz = v_z(x,y,z,t)\,dt\ .$$

Sa masse volumique varie, car on change de point, et d'instant ; la dérivée correspondante est dite **particulaire** et notée $\frac{D\rho}{Dt}$, avec :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{dt\to 0}\left(\frac{\rho(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt)-\rho(x,y,z,t)}{dt}\right)$$

La variation de ρ s'écrit :

$$\rho(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt)-\rho(x,y,z,t) = \frac{\partial\rho}{\partial x}.dx+\frac{\partial\rho}{\partial y}.dy+\frac{\partial\rho}{\partial z}.dz+\frac{\partial\rho}{\partial t}.dt$$
$$= \frac{\partial\rho}{\partial x}.v_x.dt+\frac{\partial\rho}{\partial y}.v_y.dt+\frac{\partial\rho}{\partial z}.v_z.dt+\frac{\partial\rho}{\partial t}.dt = (\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\rho.dt+\frac{\partial\rho}{\partial t}.dt$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\frac{D\rho}{Dt} = (\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

L'opérateur D/Dt est appelée **dérivée particulaire** (ou en suivant le mouvement) ; le premier terme est la **dérivée convective**, due au fait qu'on regarde l'effet d'un changement de point à t donné, le second terme est la **dérivée locale** : on regarde en un même point la variation temporelle.

Définition : un écoulement incompressible est un écoulement pour lequel :

$$\boldsymbol{\frac{D\rho}{Dt} = 0}$$

Le caractère incompressible d'un écoulement ne dépend pas du référentiel considéré.

4. Equation locale de conservation de la masse.

4.1. Principe du bilan :

Le principe du bilan d'une grandeur G est toujours le même : un volume V donné de l'espace – fixe - en contient une certaine quantité à t .
On regarde la variation de G contenu dans V pendant dt.

Si cette quantité a varié, cela ne peut être que pour deux raisons :

- Soit du G est passé à travers la frontière de V ;
- Soit du G s'est converti en autre chose.

Ce dernier cas peut ne pas se produire, par exemple en mécanique classique la masse ne peut être convertie.

4.2. Équation locale de conservation de la masse :

Considérons un petit élément de volume dV=S .dx.

La grandeur dont on fait le bilan est la masse dM contenue dans dV.

On suppose des grandeurs ne dépendant que de x et de t : la vitesse du fluide est $\vec{v} = v(x,t).\overrightarrow{u_x}$,
La masse volumique est ρ(x,t).

Le bilan de masse s'écrit :

$$dM(t+dt) = dM(t) + dm_{entrante} - dm_{sortante}$$

avec

$$dM(t) = \rho(x,t).dV$$

$$dM(t+dt) = \rho(x,t+dt).dV$$

$$dm_{entrante} = \rho(x,t).\vec{v}(x,t).dt.S.\overrightarrow{u_x}$$

$$dm_{sortante} = \rho(x+dx,y,z,t).\vec{v}(x+dx,y,z,t).dt.S.\overrightarrow{u_x}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho.v_x)}{\partial x} = 0$$

Cette équation se généralise à trois dimensions par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho.v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho.v_z)}{\partial z} = 0$$

soit :

$$\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0}$$

Equation locale de conservation de la masse

4.3. Condition nécessaire et suffisante :

Formule d'analyse vectorielle (à ne pas retenir !) :

$$div(\rho\vec{v}) = \rho.div(\vec{v}) + \vec{v}.\left(\overrightarrow{grad}.\rho\right) = \rho.div(\vec{v}) + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right).\rho$$

L'équation de continuité peut s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho.div(\vec{v}) + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right).\rho = 0$$

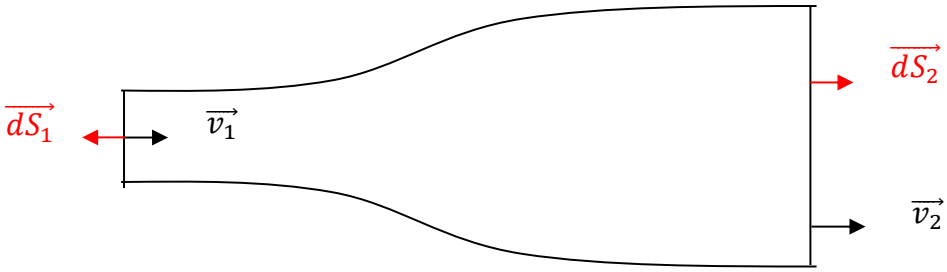
$$\Leftrightarrow \rho.div(\vec{v}) + \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Pour un écoulement incompressible :

$$\boldsymbol{div(\vec{v}) = 0}$$

L'équation intégrale correspondante s'écrit :

$$\oiint \vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS} = 0 \text{ : le débit volumique se conserve.}$$



On peut montrer qu'un critère d'incompressibilité est v<<c, où c est la célérité du son dans le fluide.

4.4. Cas particulier de l'écoulement stationnaire :

Dans ce cas l'équation de conservation de la masse s'écrit sous forme locale :

$$div(\rho\vec{v}) = 0$$

et sous forme intégrale :

$$\oiint \rho(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS} = 0 \text{ ; le débit de masse se conserve.}$$

Exemple : en supposant les vitesses et les masses volumiques uniformes sur S_1 et S_2 :

$$\oiint \rho(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS} = \iint_{S_1} \rho(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS} + \iint_{S_2} \rho(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS} = -\rho_1.v_1.S_1 + \rho_2.v_2.S_2$$

5. Dérivée particulaire du champ des vitesses : champ des accélérations :

La démonstration est similaire à celle effectuée pour la masse volumique.

On considère une particule dans un écoulement : entre les instants t et t+ dt, elle se déplace du point M(x, y, z) au point M'(x+dx, y+dy,z+dz) avec :

$$dx = v_x(x,y,z,t)\,dt \text{ ; } dy = v_y(x,y,z,t)\,dt \text{ ; } dz = v_z(x,y,z,t)\,dt \text{ .}$$

Son accélération au temps t est en description eulérienne notée :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \lim_{dt\to 0}\left(\frac{\vec{v}(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt) - \vec{v}(x,y,z,t)}{dt}\right)$$

La variation de $\vec{v}$ s'écrit :

$$d\vec{v} = \vec{v}(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt) - \vec{v}(x,y,z,t) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}.dx + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}.dy + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}.dz + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}.dt$$

$$= \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}.v_x.dt + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}.v_y.dt + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}.v_z.dt + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}.dt = \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right).\vec{v}.dt + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}.dt$$

On a donc :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Le premier terme est l'accélération **convective**, due au fait qu'on regarde l'effet d'un changement de point à t donné, le second terme est l'accélération **locale** : on regarde en un même point la variation temporelle.

Remarque : $(\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{v} \wedge \vec{v}$

4.3.Généralisation :

L'opérateur dérivée particulaire est :

$$\frac{D}{Dt} = (\vec{v}.\overrightarrow{grad}) + \frac{\partial}{\partial t}$$

6. Ecoulement rotationnel : vecteur tourbillon :

6.1. Circulation du champ des vitesses : opérateur « rotationnel » :

Définition : la circulation du champ $\vec{v}$ sur une courbe AB orientée :

$$C_{A\to B} = \int_A^B \vec{v}.d\vec{l}$$

Lorsque la courbe est fermée, elle est appelée contour fermé et l'on note :

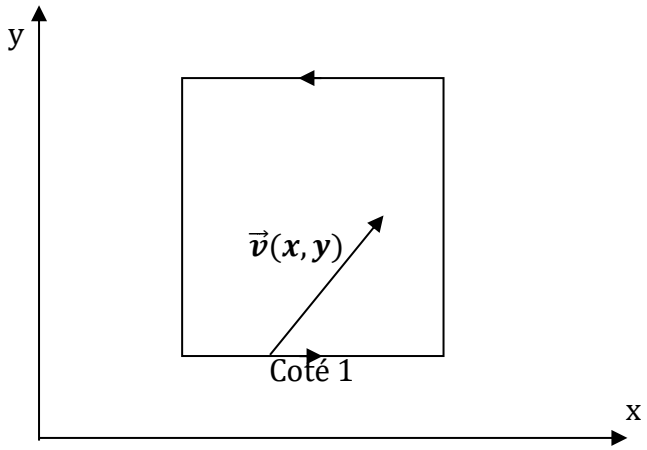
$$C_{A\to A} = \oint \vec{v}.d\vec{l}$$

Calculons la circulation élémentaire sur un contour plan orienté de cotés dx et dy en coordonnées cartésiennes.

Il faut orienter le contour - de manière arbitraire - , son vecteur surface sera orientée en concordance par la règle du tire-bouchon.

Ici la surface élémentaire de la boucle orientée est : $d\vec{S} = dx.dy.\overrightarrow{u_z}$

La circulation élémentaire du champ des vitesses est alors :



$$\begin{aligned} dC &= \vec{v}(x,y).dx.\overrightarrow{u_x} + \vec{v}(x+dx,y).dy.\overrightarrow{u_y} + \vec{v}(x,y+dy).(-dx.\overrightarrow{u_x}) + \vec{v}(x,y).(-dy.\overrightarrow{u_y}) \\ &= v_x(x,y).dx + v_y(x+dx,y).dy. - v_x(x,y+dy).dx - v_y(x,y).dy \\ &= v_x(x,y).dx - v_x(x,y+dy).dx + v_y(x+dx,y).dy - v_y(x,y).dy \\ &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).dy.dx = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).\overrightarrow{u_z}.d\vec{S} \end{aligned}$$

Le terme $\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$ est la composante selon z du **vecteur rotationnel** du champ des vitesses.

Remarque : on a omis les variables z et t pour ne pas surcharger.

En cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z}$$

Le rotationnel est un vecteur dont les composantes représentent une circulation par unité de surface.

Il est assez difficile de voir sur une carte de champ si un champ est à rotationnel nul ou pas ! On peut dire en première approximation qu'un champ à rotationnel non nul « tourne » localement.

6.2. Théorème de Stokes :

Soit une surface S ouverte et orientée en concordance avec le contour C sur lequel elle s'appuie :

$$\oint_C \vec{A}.\vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{A}).\vec{dS}$$

6.3. Vecteur tourbillon :

Dans le cas d'un écoulement rotationnel (ou tourbillonnaire) :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) \neq \vec{0}$$

Définition : le vecteur tourbillon est :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{rot}(\vec{v})$$

7. Ecoulement irrotationnel : potentiel des vitesses :

Définition : $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$

Or on a (formule d'analyse vectorielle) :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\varphi) = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad}\varphi$$

où φ est appelé **potentiel des vitesses**.

L'écoulement est alors dit « potentiel ».

Remarque : dans le cas particulier d'un écoulement irrotationnel incompressible , ϕ vérifie l'équation de Laplace :

$$div(\overrightarrow{grad}\varphi) = \Delta\varphi$$ où Δφ est le Laplacien de φ.

Le caractère irrotationnel d'un écoulement dépend du référentiel considéré.

8. Invariances d'un système physique :

Les invariances d'un système permettent de savoir de quelles variables dépend un champ physique, scalaire ou vectoriel. Il peut s'agir du champ de températures, de pression, d'un champ électrique, magnétique, ici ce seront souvent le champ des vitesses et le champ de pression.

Définition : un système est dit invariante par une transformation T de l'espace si ce système est inchangé dans la transformation T.

Les transformations considérées sont :

- Les translations (selon un certain axe) ;
- Les rotations (autour d'un certain axe).

On admet que si un système est invariant dans une transformation, les champs sont également invariants dans cette transformation.
C'est le **principe de Curie** : les symétries des causes se retrouvent dans les effets.

Exemples :

1 .Ecoulement d'un fluide dans un cylindre vertical d'axe Oz : $\vec{v} = v(r, \theta, z)\ \vec{e}_z$.
En coordonnées cylindriques, on a invariance :
par translation d'axe Oz
par rotation autour de l'axe Oz :
On en déduit : v = v(r).

2. Ecoulement dans un canal « large » :
On utilise des coordonnées cartésiennes. $\vec{v} = v(x, y, z)\ \vec{e}_x$
Si l'écoulement a une largeur l (selon Oy) très grande devant son épaisseur e (selon Oz), on admet souvent qu'il y a invariance par translation selon Oy.
On a alors : v = v(x,z).