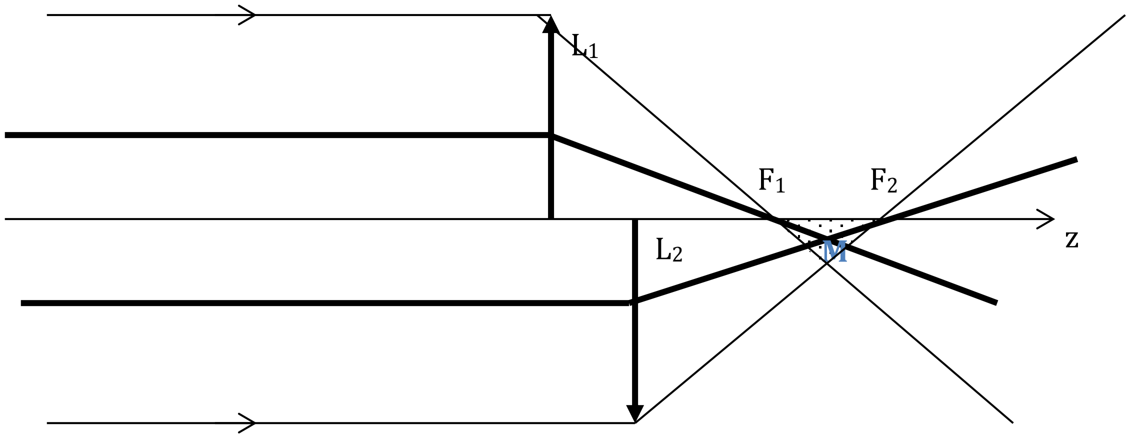
Interférences : quelques corrigés

Lentille de Meslin : corrigé :

a) On place un trou source de petites dimensions au foyer d'une lentille convergente.

b)



Pour avoir un champ d'interférences maximal, l'écran doit être placé dans le plan médiateur du segment F_1F_2.

c) On calcule $\delta_{géo}(M) = (SM)_2 - (SM)_1$.

Or $(SF_2) = (SF)_1 + e$

D'où $\delta_{géo}(M) = (SF_2) - (F_2M) - (SF_1) - (F_1M)$ avec $(F_1M) = (F_2M)$.

$$= e - \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{e^2}{4}} = -2(x^2+y^2)/e\ ;$$

$\delta(M) = -2(x^2+y^2)/e + \lambda/2$.

d) Les franges sont des demi-anneaux d'axe Oz.
Les franges sombres sont données par $\delta_{géo}(M) = (p + 1/2)\lambda$.

On en déduit r = $r_p = \sqrt{\frac{1}{2} p\lambda e}$.

L'intersection de l'écran avec l'axe optique est sombre.

Spectrométrie par transformée de Fourier (exercice difficile) : corrigé :

a) σ_0 est le nombre d'onde pour lequel f(σ) est maximale, il représente le nombre d'onde moyen qui décrit le paquet d'ondes.

b) La largeur à mi-hauteur Δσ est telle que $f(\sigma_0 \pm \Delta\sigma/2) = f(\sigma_0)/2$,

$$\Leftrightarrow \exp(-(\Delta\sigma/2a)^2) = ½$$

$$\Leftrightarrow \Delta\sigma = 2.a.\sqrt{\ln 2}\,.$$

a représente donc la largeur de la raie spectrale.

c) L'éclairement au centre F de la figure d'interférences due à une bande de largeur dσ est :

$$dE = 2.dE_0.(1+\cos(2\pi\delta\sigma)) = f(\sigma).d\sigma\ (\ 1+\cos(2\pi\delta\sigma))$$

avec δ = 2.e = 2.v.t (en supposant δ(t=0)=0) au centre.

On a donc $$E(e) = \int_{-\infty}^{\infty} 2.f(\sigma).d\sigma(1+\frac{1}{2}.\exp(4j\pi e\sigma)+\frac{1}{2}.\exp(-4j\pi e\sigma))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2.f(\sigma).d\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma).d\sigma.\exp(4j\pi e\sigma) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma).d\sigma.\exp(-4j\pi e\sigma)$$

$$=2.F(0) + F(2e)+F^*(2e).$$

En posant $u = \sigma - \sigma_0$, on obtient :

$$E(e) = 2.C.\hat{F}(0) + C.\hat{F}(2e).\exp(4j\pi\sigma_0 e) + C.\hat{F}(2e).\exp(-4j\pi\sigma_0 e)$$

$$= 2.C.a.\sqrt{\pi} + C.a.\sqrt{\pi}.\exp(-4\pi^2a^2e^2).2.\cos(4\pi\sigma_0 e)$$

$$\boxed{E(e)=\ 2.C.a.\sqrt{\pi}(1+\exp(-4\pi^2a^2e^2).\cos(4\pi\sigma_0 e))\,.}$$

On retrouve une forme « classique » d'éclairement ; on vérifie que si Δσ =0, on retrouve la formule des interférences pour une source monochromatique.

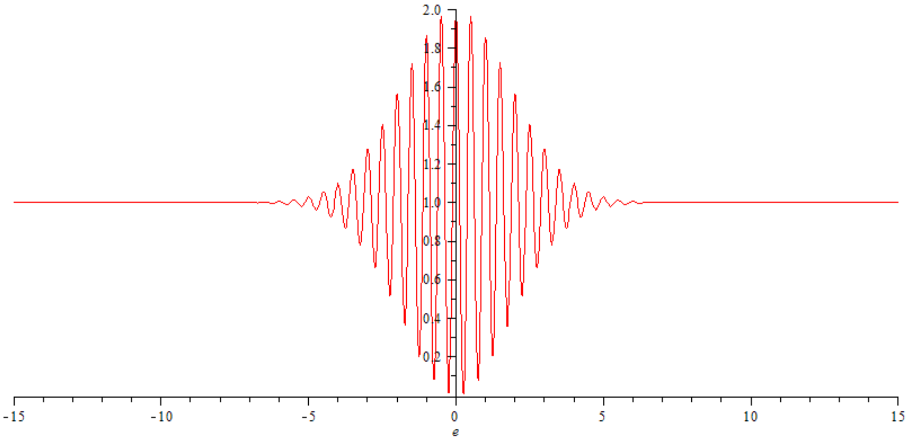


Figure : tracé de $E(e)/2Ca\sqrt{\pi}$ avec Δσ = 0.1

Le contraste (visibilité) vaut $V = \exp(-\ 4\pi^2a^2e^2)$; c'est l'enveloppe de la courbe ; son profil est gaussien.

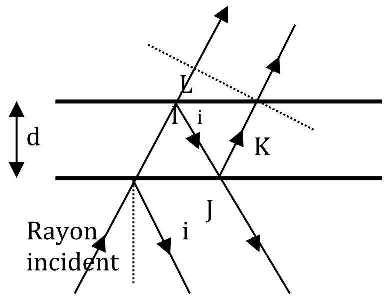
Sur l'enregistrement de E(e), on peut mesurer Δσ en mesurant la largeur à mi-hauteur de l'enveloppe, soit Δe.

On aura alors (calcul) : Δσ = 2.ln2 / π.Δe.

On doit pouvoir atteindre la différence de marche Δe/2.

La longueur de cohérence est $L_c = c.\tau = c/\Delta\omega = c/2.\pi.\Delta\nu = 1/2\pi\Delta\sigma$.

Corrigé : Perot-Fabry (attention exercice difficile) :



a) Considérons un rayon incident sur la première lame ; après sa première transmission, il arrive en I ou il se sépare en deux :

- Un premier rayon transmis ;
- Un second rayon réfléchi en I, en J, et transmis en K.

Les deux rayons transmis par la lame émergent parallèlement, et interférent donc à l'infini.
Traçons un plan d'onde passant par K et coupant le premier rayon en L.
La différence de marche du deuxième rayon par rapport au premier, en M à l'infini est :

$$\delta = (IM)_2 - (IM)_1 = (IJK) - (IL) = 2.[IJ]-[IL].$$

Le calcul est très similaire à celui effectué pour la lame à faces parallèles, mais ici tous les angles sont égaux à i, on a donc $\delta = 2.d.\cos(i)$ et $\varphi = 2\pi\delta / \lambda$.

Soit $\underline{s}_1(M) = s_0.\text{expj}(\omega t - 2\pi(SM)_1/\lambda)$ l'amplitude instantanée en M due au premier rayon transmis.

L'amplitude du deuxieme rayon transmis est $s_2 = r^2.s_0$, et son déphasage par rapport au premier rayon est φ, soit $\underline{s}_2(M) = r^2.s_0\ \text{expj}(\omega t - 2\pi(SM)_1/\lambda - \varphi) = r^2.\underline{s}_1(M).\exp(-j\varphi)$.

L'amplitude du troisieme rayon transmis est $s_3 = r^4.s_0$, et son déphasage par rapport au premier rayon est 2φ, soit $\underline{s}_3(M) = r^4.\underline{s}_1(M).\exp(-2j\varphi)$.

L'amplitude du nieme rayon transmis est $\underline{s}_n = r^{2(n-1)}.s_0$, et son déphasage par rapport au premier rayon est $(n-1)\varphi$, $\underline{s}_2(M) = r^{2(n-1)}.\underline{s}_1(M).\exp(-j(n-1)\varphi)$,etc !

L'amplitude totale transmise est donc, en notation complexe :
$\underline{s}(M) = \underline{s}_1(M) + \underline{s}_2(M) + ... \underline{s}_n(M)+...$

$= \underline{s}_1(M).(1 + r^2.\exp(-j\varphi) +...+r^{2(n-1)}.\exp(-j(n-1)\varphi)+...)$

$$=\underline{s}_1(M).\sum_{i=1}^{\infty} r^{2(n-1)}.e^{-j(n-1)\varphi.} \text{ avec } r < 1$$

$$= \underline{s}_1(M).\frac{1}{1-r^2.\exp(-j\varphi)}.$$

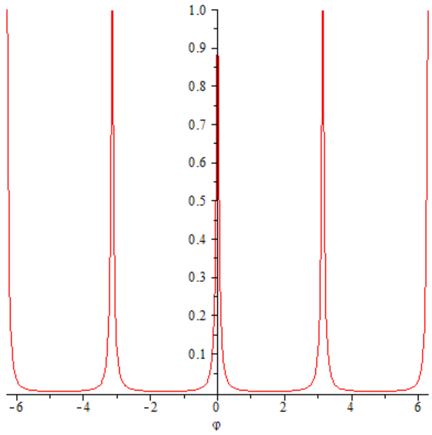
On en déduit :

$$I(M) = \underline{s}(M).\underline{s}^*(M) = |\underline{s}_1(M)|^2 \frac{1}{1-r^2.\exp(-j\varphi)}.\frac{1}{1-r^2.\exp(+j\varphi)} = \frac{s_0^2}{1+r^4-2r^2.\cos(\varphi)} \text{ avec } \cos(\varphi) = 1-2.\sin^2(\varphi/2) ;$$

$$= \frac{s_0^2}{1+r^4-2r^2+4r^2.\sin^2(\frac{\varphi}{2})} = \frac{s_0^2}{(1+r^2)^2+4r^2.\sin^2(\frac{\varphi}{2})} = \frac{\frac{s_0^2}{(1-r^2)^2}}{1+\frac{4r^2}{(1-r^2)^2}.\sin^2(\frac{\varphi}{2})}.$$

qui est bien le résultat proposé en posant $I_M = \frac{s_0^2}{(1+r^2)^2}$ et $F^2 = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} = \frac{4.\rho}{(1-\rho)^2}$.

La tracé donne une suite de pics d'autant plus fins que F est grand, et situé aux valeurs de φ telles que : $\varphi/2 = k.\pi$, soit $\delta = k.\lambda$, avec k entier ,ce qui est normal.



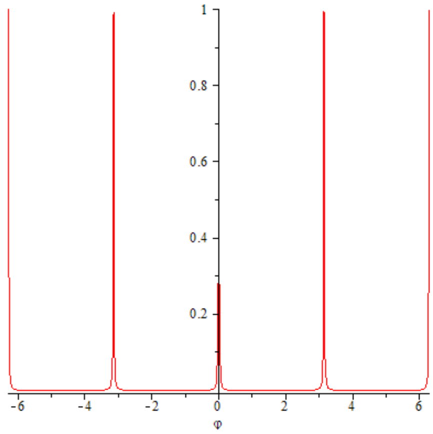


Figure : deux tracés de E(φ) pour F = 20 et F = 100.

Pour ρ = 0.95, on calcule F = 39, pour ρ = 0.98, on calcule F = 99.

La démonstration donnant les rayons des anneaux brillants est strictement identique à celle du cours, et donne pour le $k^{\text{ième}}$ anneau :

$$r_k = f'\sqrt{\frac{k.\lambda}{d}}$$

Calcul de la demi-largeur :

On doit réaliser $\dfrac{I_M}{1+F^2.\sin^2(\frac{\varphi}{2})} = \dfrac{I_M}{2} \Leftrightarrow \sin(\frac{\varphi}{2}) = \pm\frac{1}{F} \ll 1.$

Au voisinage d'un maximum on a $\varphi = 2k\pi+\varepsilon$, donc $\sin(\varepsilon/2) \approx \varepsilon/2 = 1/F$ et $\sin(-\varepsilon/2) \approx -\varepsilon/2 = -1/F$.
On en déduit $\varepsilon = \Delta\varphi = 2/F$.
C'est la largeur en phase ; déduisons-en la largeur angulaire.
On a $\varphi = 2\pi.2d.\cos(i)/\lambda$, d'où $d\varphi =- 2\pi.2d.\sin(i).di/\lambda$.,
Et $\Delta i = \Delta\varphi.\lambda/4\pi d\sin(i)$.

Pour un maximum, on a $2d\sin(i) = k\lambda$ avec k entier, soit
$\Delta i = \Delta\varphi.\lambda/2\pi k\lambda = 1/\pi kF$.
Cette largeur angulaire est d'autant plus petite que F est grand, les anneaux sont donc d'autant plus fins que F est grande, d'où le nom de ce paramètre !