DS DE PHYSIQUE N°4
SAMEDI 28 JANVIER 2023 – 4 HEURES

1) Principe de la microbalance à quartz (CCP PC 09) :

Ce problème porte sur la variation de fréquence d'un dispositif vibrant lorsqu'on y dépose une masse perturbatrice. Il modélise le principe de fonctionnement de la microbalance à quartz.

I. Ondes stationnaires le long d'une corde tendue

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique μ, de longueur 2L, est soumise a une tension d'équilibre T. Ses déformations dans le plan (x,y) sont décrites par une fonction de hauteur y =h(x, t). Dans tout le problème, les déformations de la corde par rapport à l'axe horizontal sont supposées suffisamment faibles pour que :

- l'angle α(x,t) que fait la courbe h avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1,comme la dérivée $\frac{\partial h}{\partial x}$.
- les déplacements d'un point matériel lie à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisses respectives $x_A = 0$ et $x_B = 2L$. Le milieu de la corde est note C, d'abscisse x_C (Figure 1). Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

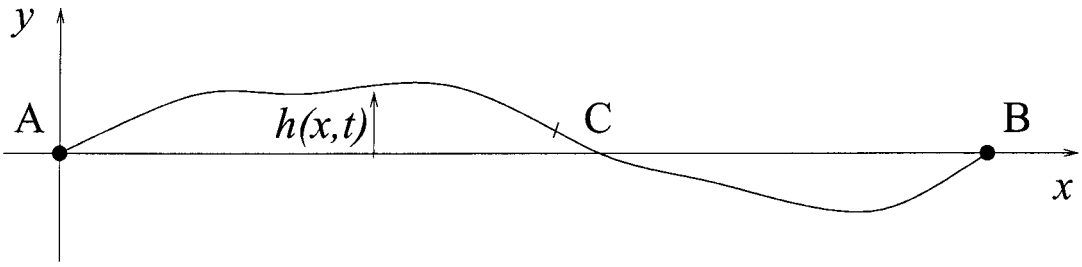


Figure 1

Q1. Soit un point M d'abscisse x situé dans l'intervalle [AB]. La partie de la corde située a droite du point O exerce à chaque instant sur la partie de la corde située à sa gauche une certaine force $\vec{F}(x,t)$.
Comment s'exprime, en fonction de T et d'une dérivée de h(x,t) , la composante verticale (suivant y) de cette force ?

Q2. Établir, dans le cadre des hypothèses énoncées ci-dessus, l'équation de d'Alembert vérifiée par h(x,t). Exprimer la célérité c associée en fonction des paramètres μ et T.

La corde est fixée en ses deux extrémités A et B à une hauteur nulle, soit $h(x_A,t)=0$ et $h(x_B,t)=0$.
On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x,t) = Z sin(kx + \Phi)\cos(\omega t)$$

ou Z est une amplitude arbitraire.

Q3. Démontrer la relation entre ω, *k* et c.

Q4. Les valeurs admissibles de *k* (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes k_n, *ou n* = 1, 2, 3 ... est entier positif.
Démontrer l'expression des k_n admissibles, des pulsations propres ω_n et des fréquences f_n associées.

Q5. Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental k_1 , telle qu'on pourrait l'observer a l'aide, par exemple, d'une caméra rapide ou d'une lampe stroboscopique.
Tracer de la même façon l'allure des déformations associées à la première, deuxième et troisième harmonique (respectivement k_2, k_3, k_4)

Compter et faire figurer sur votre schéma, à chaque fois, le nombre de nœuds et de ventres associés à ces modes de vibration.

Q6. On peut montrer que l'énergie mécanique **par unité de longueur** e(x, t) associée à l'onde est égale à :

$$e(x,t) = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]$$

Calculer la valeur moyenne temporelle <e> en un point quelconque e de la corde, pour le mode de vibration fondamental.

Q7. En déduire l'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental. On exprimera le résultat en fonction de la tension *T* de la corde, de sa demi-longueur L et de l'amplitude Z des vibrations.
Application numérique . Que vaut l'amplitude Z des vibrations lorsque l'énergie totale du mode est égale a 0,1 J, avec = 1 m, T = 100 *N* ?

II. Perturbation par une masse

On accroche à la corde une perle de masse m, située exactement au milieu de la corde, au point d'abscisse x_C = L (Figure 2). Cette masse est supposée ponctuelle.

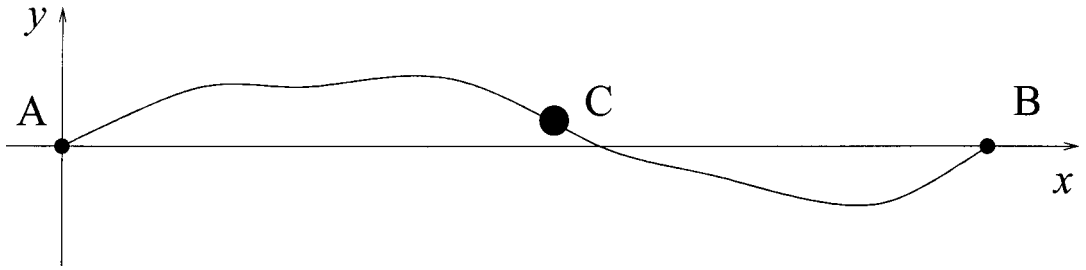


Figure 2

Q8. Quels sont les modes de vibration susceptibles d'être modifiés (changement de fréquence propre) par la présence de la masse m ? De la même façon quels sont les modes qui ne devraient pas être modifiés par la présence de la masse ?

Q9. En présence de cette masse supposée ponctuelle, les dérivées à gauche et à droite de $\frac{\partial h}{\partial x}$ ne sont pas nécessairement égales (la dérivée $\frac{\partial h}{\partial x}$ est discontinue en L).
En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouver une relation entre T, m, $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(L,t)$, $\frac{\partial h}{\partial x}(L^-,t)$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(L^+,t)$. Illustrer votre relation par un schéma.

Q.10. On recherche le mode de vibration fondamental sous la forme d'une fonction symétrique par rapport à L, c'est-a-dire telle que h(x,t)=h(2L-x,t), et donnée sur l'intervalle de gauche $0 \leq x < L$ par :

$$h(x,t) = \sin(Kx)\cos(\omega t)$$

ou *K* est un vecteur d'onde à déterminer, et ω et *K* vérifient la relation de dispersion habituelle. Montrer que les conditions aux limites imposent désormais la condition de quantification suivante sur les valeurs possibles de ω et N :

$$cotan(KL) = \frac{\cos(KL)}{\sin(KL)} = \frac{m\omega^2}{2KT}$$

Q11. Montrer que si la masse m est nulle, on retrouve comme cas particulier de l'équation ci-dessus le vecteur d'onde k_1 de la fréquence de vibration de la corde homogène.

Q12. Lorsque m est faible, on recherche un développement limité à l'ordre 1 en m du vecteur inconnu K :

$$K = k_1 + \beta m$$

ou β est une constante à déterminer en fonction de ω, c, T et L. On utilisera en particulier le développement limité suivant de la fonction cotangente, valable pour de petites valeurs de ε :

$$cotan\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \approx -\varepsilon$$

K est-il plus grand ou plus petit que k_1 ?

Q13. Déduire de la question précédente la variation relative de fréquence du mode de vibration fondamental de la corde lorsque l'on passe du vecteur *k* au vecteur *K.* Exprimer le résultat en fonction de *m,* et L.

La détermination expérimentale de la nouvelle fréquence de vibration permet donc de déterminer la masse m déposée sur la corde.
Application numérique : Calculer *m* lorsque L = 1 m, T = 100 N, $\mu = 10^{-2}$ kg.m^{-1}, Δf_1 = -1 Hz.

2) Propagation et réflexion d'ondes dans un câble coaxial (CCP PC 11) :

Les câbles coaxiaux sont utilisés comme moyen de transmission d'informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audio-numériques, ainsi que pour les interconnexions dans les réseaux informatiques.

Un signal qui se propage dans un câble coaxial peut subir plusieurs modifications. Il peut être déformé (milieu dispersif), atténué (milieu dissipatif). Il peut aussi subir des réflexions au niveau des connexions.
Ce sujet aborde la modélisation du câble coaxial et les phénomènes de réflexion d'ondes lorsque le câble est connecté sur une charge.

I.Modélisation :

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs de même longueur ℓ, l'un entourant l'autre. Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon R_1, le conducteur (2) a un rayon R_2 (figure 1). Ces deux conducteurs ont même longueur ℓ. On a : R_1= 0,25mm , R_2 = 1,25mm , ℓ = 100m.

Vu que ℓ >>R_2, on négligera les effets de bord : le câble est considéré comme infini dans cette partie.
L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide sauf explicitation contraire.

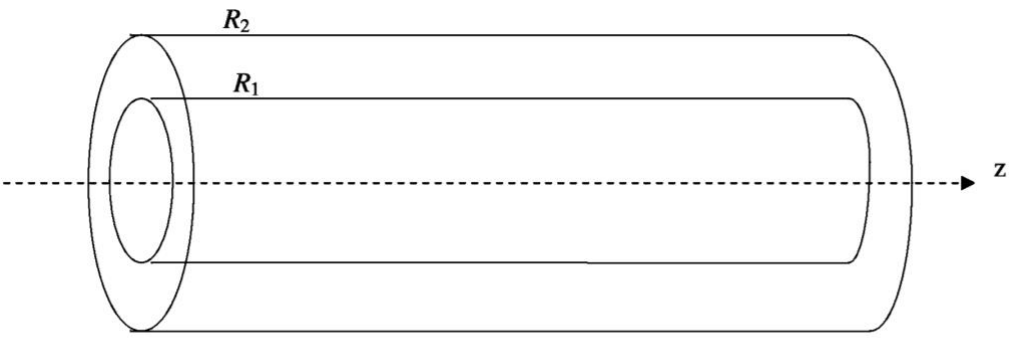


Figure 1 : Portion de câble

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$la base de coordonnées cylindriques.

II. Capacité linéique C du câble :

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et –Q. Elles sont uniformément réparties en surface.

Q1. Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ dans l'espace inter-conducteur.

Q2. Pour $R_1<r<R_2$, en utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, montrer que E(r) = A/r, où A est à exprimer en fonction de ℓ, r, Q et ε_o.

Q3. Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2, constants. Par un calcul de circulation, exprimer V_1-V_2 en fonction de Q, ℓ, R_1, R_2 et ε_o.

Q4. On définit la capacité C_ℓ du câble de longueur ℓ par $C_\ell = \frac{Q}{V_2 - V_1}$. Exprimer C_ℓ en fonction de ℓ , R_1, R_2, et ε_o puis la capacité linéique C du câble coaxial en fonction de R_1, R_2 et ε_o.

Q5. En pratique, l'espace inter-conducteur n'est pas du vide , mais comporte un isolant de permittivité relative ε_r=3,1. On a alors $C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$.
Déterminer la valeur numérique de C.

III. Propagation et réflexion des ondes dans le câble coaxial :

La gaine est maintenant reliée à la masse (V_2=0), et l'âme, portée au potentiel $V_1(z,t)$=V(z,t), est parcourue par un courant i(z,t). On adopte le modèle bifilaire local de la portion de câble coaxial de longueur dz de la figure 2 où L et C désignent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble coaxial.

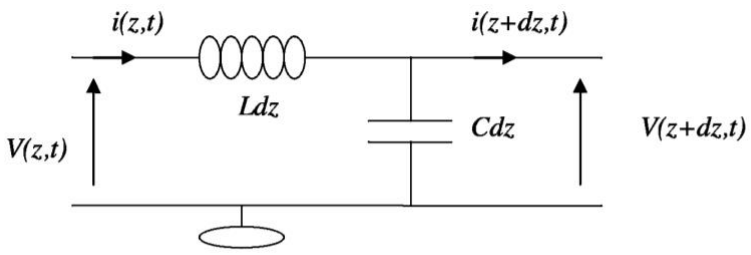


Figure 2 : Modèle bifilaire d'une portion de câble

A] Equation de propagation :

Q6. Explicitez le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fonctions V(z,t) et i(z,t). On ne demande pas d'établir les équations de d'Alembert.

Q7. La célérité de l'onde dans le câble n'est fonction que de L et C, inductance et capacité linéiques. Donner sa forme par analyse dimensionnelle.

B] **Détermination de l'impédance caractéristique du câble coaxial :**

On considère une onde incidente sinusoïdale de pulsation ω :

$$V_i(z,t)=V_{im}.\cos(\omega t-kz+\varphi) \; ; \; I_i(z,t)=I_{im}.\cos(\omega t-kz+\varphi')$$

A laquelle on associe une onde complexe :

$$\underline{V_i}(z,t)=\underline{V_{im}}.e^{j(\omega t-kz)} \; ; \; \underline{I_i}(z,t)=\underline{I_{im}}.e^{j(\omega t-kz)} \quad \text{où} \quad \underline{V_{im}}=V_{im}.e^{j\varphi} \; ; \; \underline{I_{im}}=I_{im}.e^{j\varphi'}$$

Q8. On définit l'impédance caractéristique du câble par : $Z_c = \frac{\underline{V_i}(z,t)}{\underline{I_i}(z,t)}$. Exprimer Z_c en fonction de l'inductance linéique L et de la capacité linéique C du câble.

Q9. Application numérique : L = 320 nH.m^{-1} ; C = 107 pF.m^{-1} ; calculer la valeur de Z_c.

C] Phénomène de réflexion en bout de câble :

Le câble étant fini, il existe également une onde de tension réfléchie $V_r(z,t)$ telle que l'onde totale s'écrit :

$$V(z,t)=V_i(z,t)+V_r(z,t)$$

Q10. Donner la forme générale de $V_r(z,t)$, d'amplitude V_{rm}, puis sa forme complexe associée $\underline{V_r}(z,t)$, d'amplitude complexe $\underline{V_{rm}}$.

Q11. Le câble est en court-circuit, ou refermé sur une résistance nulle (R=0) à l'extrémité située en z=ℓ. Expliciter la condition limite $\underline{V}(\ell,t)$ vérifiée par la fonction $\underline{V}(z,t)$ en z=ℓ.
En déduire le coefficient de réflexion r par : $r = \frac{\underline{V_r}(\ell,t)}{\underline{V_i}(\ell,t)}$.

Q12. Le câble est en circuit ouvert, ou refermé par une résistance infinie ($R = +\infty$) à son extrémité située en z=ℓ. Expliciter, très brièvement, sur une grandeur physique bien appropriée, la condition limite en z=ℓ.
On admettra dans ce cas que r =1.

Q13. Le câble est maintenant chargé à son extrémité en z=ℓ, par une résistance R. En admettant que le coefficient de réflexion r est réel, et en considérant que pour l'onde réfléchie $\underline{V_r}(z,t) = -Z_c\underline{I_r}(z,t)$, montrer qu'il existe une valeur critique de R notée R_c pour laquelle il n'y a pas d'onde réfléchie. Comment qualifie-t-on ce fonctionnement ?
Dans la suite du problème, on admettra que $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

IV] Etude expérimentale :

Un générateur basses fréquences, branché à l'entrée du câble en z=0, délivre, comme onde incidente, une tension périodique « carré », entre les niveaux 0 et V_o. L'autre extrémité du câble est refermée sur une résistance R.

A l'aide d'un oscilloscope, on observe en z=0 la superposition de l'onde incidente délivrée par le générateur et de l'onde réfléchie (figure 3). Les oscillogrammes de la figure 4 ont été réalisés pour différentes valeurs de R.

Q14. Donner une valeur approchée de l'impédance interne du générateur basses fréquences que vous avez utilisé en travaux pratiques.

A] Cas d'un court-circuit : R=0.

L'extrémité z=ℓ est en court-circuit : R=0.

Q15. On schématise l'onde incidente, à l'entrée du câble en z=0, par la figure 3 ci-contre.

En prenant en compte les phénomènes de réflexion et de propagation, et sachant que le retard dû à la propagation est inférieur à T/4, où T est la période de l'onde incidente, schématiser la forme des ondes réfléchie et totale notées $V_r(0,t)$ et $V_{tot}(0,t)$ au point z=0.

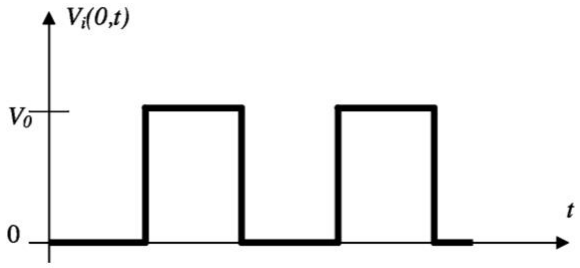
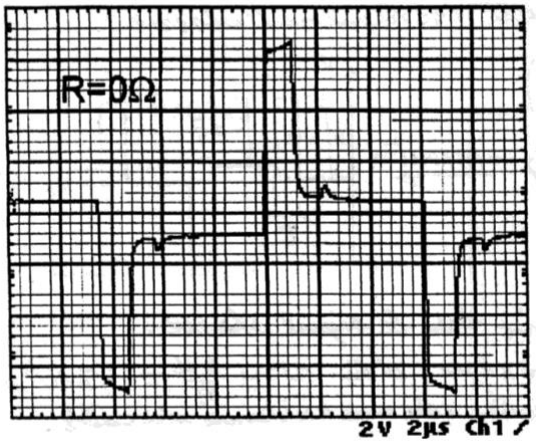


Figure 3 : Onde incidente

Q16. En utilisant l'oscillogramme correspondant à R=0, déterminer une valeur approchée de la vitesse de propagation le long du câble. Celle-ci est-elle en accord avec les valeurs de L et C obtenues précédemment ?



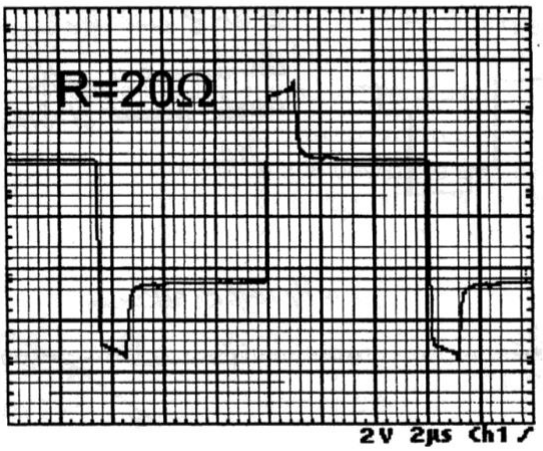


Figure 4

3) Prospection électromagnétique en Antarctique (TPC 22) :

L'Antarctique, continent situé autour du pôle Sud, est recouvert à 98 % d'une couche de glace pouvant atteindre 4 000 mètres d'épaisseur. C'est pourquoi la morphologie de son sous-sol reste encore peu connue, voire inconnue. La prospection électromagnétique est dès lors un outil très utile pour l'étude des sols et est actuellement largement utilisée pour étudier l'Antarctique.

Document 1 - Principe de la prospection électrique

La prospection électrique repose essentiellement sur l'interprétation de la résistivité électrique ρ d'un terrain. Sachant que l'on ne peut pas procéder à cette mesure en laboratoire sur un échantillon prélevé sur le terrain et sorti de son environnement, il est nécessaire de la réaliser in situ (**figure 10**).
On dispose en A une électrode parcourue par un courant I stationnaire qui se répartit uniformément dans le sol. Une contre-électrode placée en B permet de recueillir ce courant.
C'est par la mesure d'une différence de potentiel d'une part et d'une intensité d'autre part que l'on accède à la valeur de cette résistivité.

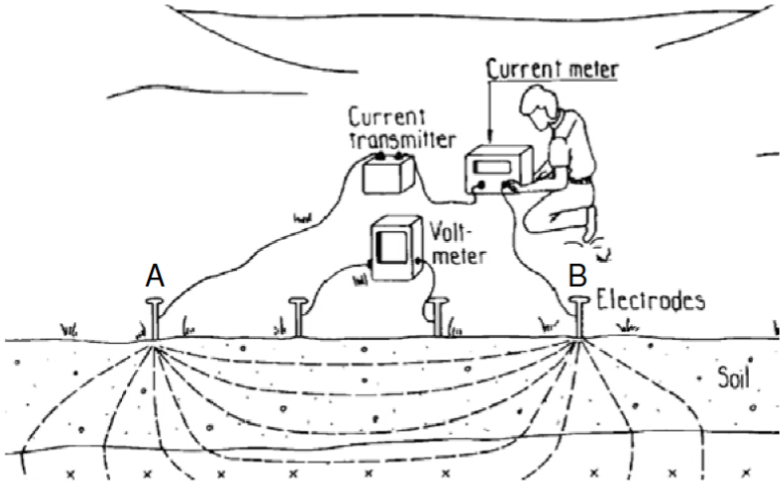


Figure 10 - Principe de la prospection électrique

Dubois Diament Cogné (2011), *Géophysique*, DUNOD

On assimile le sol à un milieu conducteur ohmique de résistivité

$$\rho = 1/\gamma$$

<u>Attention : cette résistivité ne doit pas être confondue avec la charge volumique, notée ici μ(M).</u>

On modélise l'électrode en A du **document 1** par le schéma de la **figure 11**. Dans le sol, on suppose que le vecteur densité volumique de courant en un point M placé à une distance *r* de A est de la forme $\vec{j}(M) = j(r)\overrightarrow{u_r}$ en coordonnées sphériques (**figure 11**).

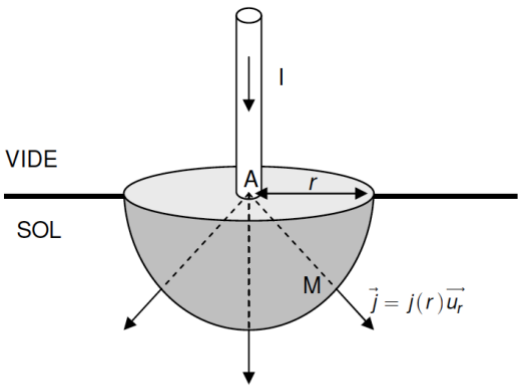


Figure 11 - Électrode au point A

Q1. Rappeler l'équation locale de conservation de la charge reliant $\vec{j}(M)$ à la densité volumique de charges μ(M). Simplifier cette équation en régime stationnaire. Comment peut-on alors qualifier le champ $\vec{j}(M)$?

Q2. Montrer alors que $j(M) = \frac{I}{2\pi r^2}$.

Q3. À l'aide de la loi d'Ohm locale que l'on rappellera, établir l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$.

Q4. En déduire que le potentiel au point M, dû à la présence de l'électrode en A, est donné par :

$$V(M) = \frac{I}{2\pi\gamma r} = \frac{\rho I}{2\pi r}$$, en choisissant le potentiel à l'infini nul.

La contre-électrode placée dans le sol en B permet de recueillir le courant injecté en A et de fermer le circuit électrique (**figure 12**).

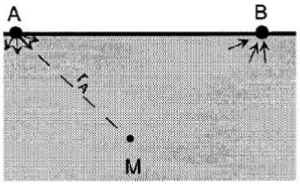


Figure 12 - Deux électrodes placées en A et B

Q5. Par analogie, établir l'expression du potentiel $V_B(M)$ créé en M par l'électrode placée au point B, en fonction de ρ, I, r_A *et* r_B, distances respectivement AM et BM.

Lors d'une expérience sur le terrain, on injecte du courant dans le sol grâce à une batterie ou à un groupe électrogène relié aux deux électrodes A et B plantées dans le sol. On lit l'intensité du courant injecté sur un ampèremètre. On mesure des différences de potentiel sur le sol entre deux points M et N grâce à un voltmètre et deux autres électrodes plantées dans le sol (**figure 13**).

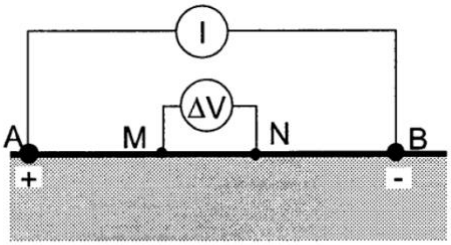


Figure 13 - Montage à quatre électrodes

On pose ΔV=V(M)-V(N) la différence de potentiel entre les points M et N.

Q6. Montrer que la résistivité du sol s'écrit alors : $\rho = \frac{2\pi\Delta V}{fI}$ où *f* correspond au facteur géométrique du montage à exprimer en fonction des distances AM, BM, AN et BN.

Q7. Montrer que le plan contenant la médiatrice du segment AB est une surface équipotentielle de potentiel nul.

La **figure 14** représente quelques courbes équipotentielles d'un sol homogène pour un courant injecté à l'électrode I = 100mA. Les équipotentielles à -0,002 V et + 0,002 V sont repérées sur la figure.

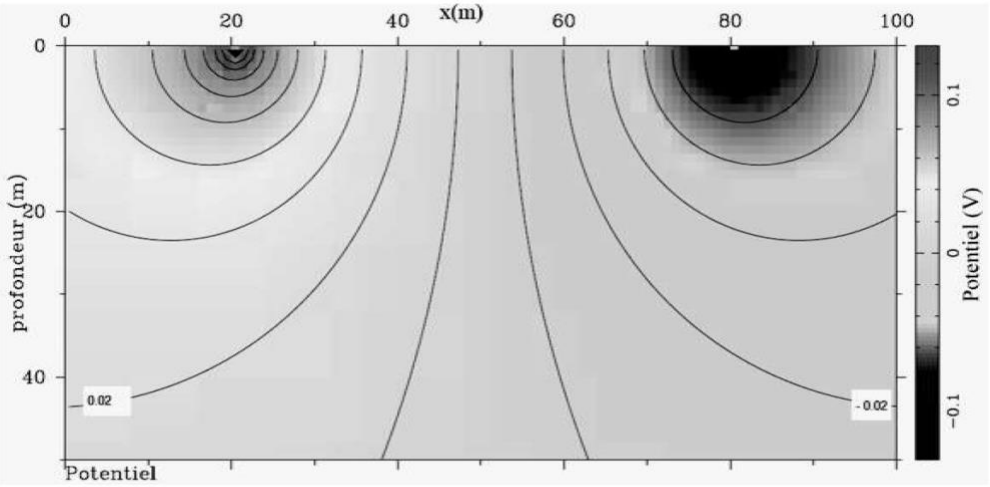


Figure 14 - Carte des équipotentielles, courant 100 mA, résistivité homogène

Q8. D'après cette carte, estimer la valeur de la résistivité du sol grâce aux données du tableau 1. Conclure sur la nature du milieu.

Eaux ou roches	Résistivité (enΩ·m)
Eau de mer	0,2
Eau de nappes	10 - 30
Eau de sources	1 000 - 10 000
Sables et graviers secs	50 - 500
Sables et graviers imbibés d'eau douce	2 - 20
Sables et graviers imbibés d'eau salée	300 - 10 000
Argiles	50 - 300
Marnes	300 -10 000
Calcaires	20 - 100
Grès argileux	300 - 10 000
Grès, quartzites	0,5 - 5
Cinérites, tufs volcaniques	100 - 300

Tableau 1

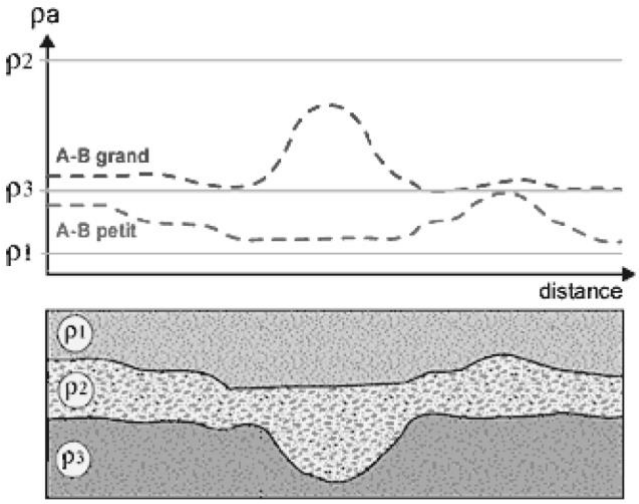


Figure 15 - Résistivité apparente pour un segment A-B petit et grand

Dans le cas d'un sol inhomogène, on qualifie la résistivité de résistivité apparente ρ_a. La connaissance du facteur géométrique d'une part et la mesure de ΔV et I d'autre part permettent alors de tracer des cartes de résistivités apparentes exploitables en géologie.

Q9. D'après la **figure 15**, un géologue souhaitant sonder le sol en forte profondeur doit-il utiliser une grande distance A-B entre les électrodes ou une faible distance ? Peut-il conserver cette distance pour sonder le sol en surface seulement ?

Données : en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{grad}V(r) = \frac{\partial V(r)}{\partial r}\overrightarrow{u_r}$

Propagation et réflexion d'ondes dans un câble coaxial (CCP PSI 2011) :

Q1) Soit un point M de l'espace. Les plans $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ et $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ sont des plans de symétries pour le système de charge, donc le champ électrique en M est selon l'intersection de ces deux plans donc radial, qu'on peut écrire $\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\vec{u}_r$.

D'autre part, le système de charge est invariant par rapport une rotation d'angle θ et par rapport à une translation d'axe Oz (on néglige les effets de bords), donc E(r,θ,z)=E(r).

Q2) La surface de Gauss est un cylindre, d'axe Oz, de rayon r, et de longueur ℓ.
Le flux de $\vec{E}$ est $\iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E(r).2\pi r l$
La charge intérieure est Q.
On obtient grâce au théorème de Gauss : $E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \ell r}$.

Q3) En statique, la relation liant le champ électrique et le potentiel électrique est

$$dV = -\vec{E}.d\overrightarrow{OM} = -E(r)dr.$$

On intègre cette relation entre (R_1,V_1) et (R_2,V_2), ce qui donne :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \ell} Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Q4) On obtient : $C_\ell = \frac{2\pi\varepsilon_o \ell}{Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ puis $C = \frac{2\pi\varepsilon_o}{Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$.

Q5) C = 107 pF.

Q6) Par la loi des mailles et la loi des nœuds, on obtient :

$$L\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial z}\ ;\ C\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial z}$$

Q7) On peut par exemple passer par les impédances : [L] = Ohm.s.m^{-1} , et [C] = Ohm^{-1}.s.m^{-1}.
Le produit LC est donc en s^2.m^{-2}, d'où $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Q8) On utilise l'une des équations de la question 6 en complexe.

$$L\frac{\partial \underline{I}}{\partial t} = jL\omega\underline{I}\ ;\ -\frac{\partial \underline{V}}{\partial z} = jk\underline{V}$$

On en déduit :

$$Z_c = \frac{L\omega}{k} = Lc = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Q9) On calcule :

$$Z_c = 54{,}7\ \Omega$$

Q10) $V_r(z,t)=V_{rm}.\cos(\omega t+kz+\varphi'')$; $\underline{V_r}(z,t)=\underline{V_{rm}}.e^{j(\omega t+kz)}$.

Q11) : $\underline{V}(\ell,t) = 0$, soit; $\underline{V_i}(l,t) + \underline{V_r}(l,t) = 0$.
On en déduit r = -1.

Q12) On a maintenant : $\underline{i}(\ell,t) = 0$,

Q13) On a :

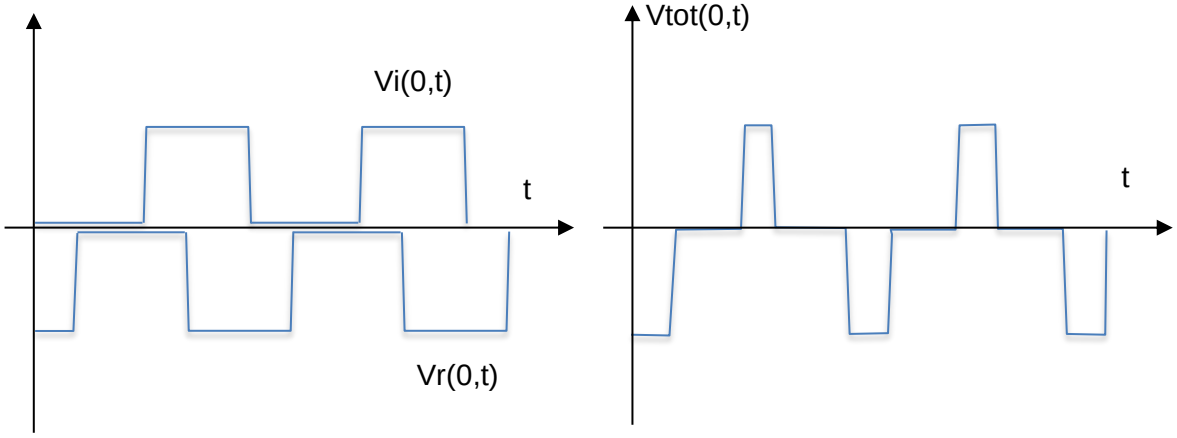
$$\underline{V}(\ell,t) = R\underline{i}(\ell,t)$$
$$\Leftrightarrow \underline{V_i}(\ell,t) + r.\underline{V_i}(\ell,t) = R(\underline{I_i}(\ell,t) + \underline{I_r}(\ell,t))$$
$$\Leftrightarrow \underline{V_i}(\ell,t) + r.\underline{V_i}(\ell,t) = R(\frac{\underline{V_i}(\ell,t)}{Z_c} - \frac{\underline{V_r}(\ell,t)}{Z_c})$$
$$\Leftrightarrow \underline{V_i}(\ell,t) + r.\underline{V_i}(\ell,t) = R(\frac{\underline{V_i}(\ell,t)}{Z_c} - r\frac{\underline{V_i}(\ell,t)}{Z_c})$$
$$\Leftrightarrow 1 + r = \frac{R}{Z_c}(1-r)$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}$$

Il n'existe pas d'onde réfléchie si :

$$R = Z_c$$

Q14) La résistance « usuelle » d'un GBF est de 50Ω.

Q15)



On obtient globalement la forme expérimentale proposée à la figure 4.

34) L'aller-retour fait 200m et provoque un retard d'environ 0,6 carreau, soit 1,2µs.
On calcule donc une vitesse de propagation c = $1{,}7.10^8$ m.s^{-1} dont la valeur numérique correspond bien à $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

1 La prospection électrique

Q25. Équation locale de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\vec{j}\right) = 0 \tag{14}$$

avec μ la densité volumique de charges et $\vec{j}$ la densité volumique de courants.
Dans le cas stationnaire cette équation se résume à :

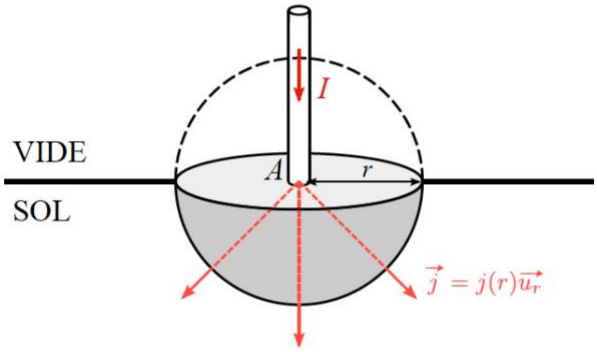
$$\mathrm{div}\left(\vec{j}\right) = 0 \tag{15}$$

ce qui permet alors de dire que le champ $\vec{j}$ est à **flux conservatif**.

Q26. Calculons le flux total de $\vec{j}$ à travers une sphère de rayon r centrée en A. Dans le sol, la densité de courant se répartit uniformément sur la demi-sphère car on écrit $\vec{j}(M) = j(r)\vec{u_r}$ en coordonnées sphériques. De l'autre côté, le flux total entrant (donc négatif) est le courant I.
Il vient :

$$\begin{aligned}\oiint \vec{j}.\vec{\mathrm{d}S} &= \iint_{\text{sol}} \vec{j}.\vec{\mathrm{d}S} + \iint_{\text{air}} \vec{j}.\vec{\mathrm{d}S} \\ &= +j(r) \times 2\pi r^2 - I\end{aligned}$$

et $$\oiint \vec{j}.\vec{\mathrm{d}S} = 0$$



car $\vec{j}$ est à flux conservatif. On a donc :

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \tag{16}$$

Q27. La loi d'Ohm local dans un conducteur ohmique de conductivité électrique γ est :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \tag{17}$$

donc ici le champ électrique a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}\vec{u_r} \tag{18}$$

Q28. Le potentiel électrostatique V est défini à partir du champ électrique par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) \tag{19}$$

On en déduit l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\vec{E}.\vec{u_r} &= -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \\ -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} &= \frac{I}{2\pi\gamma r^2} \\ \text{d'où} \quad V(r) &= \frac{I}{2\pi\gamma r} + \text{constante} \\ \text{et on choisit} \quad V(r \to \infty) &= 0 = \text{constante} \\ \text{donc} \quad V(r) &= \frac{I}{2\pi\gamma r} = \frac{\rho I}{2\pi r}\end{aligned}$$

en notant $\rho = \frac{1}{\gamma}$ la résistivité électrique.

Q29. La contre électrode placée en B agit exactement de la même façon que l'électrode placée en A, avec un courant de sens opposé. On peut donc utiliser les expressions précédentes en remplaçant I par $-I$. Les potentiels électriques en un point M sont :

$$V_A(M) = \frac{\rho I}{2\pi r_A} \qquad \text{et} \qquad V_B(M) = \frac{-\rho I}{2\pi r_B}$$

Par additivité, le potentiel résultant au point M est :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{20}$$

Q30. La différence de potentiel entre les points M est N est :

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(M) - V(N)\\ &= \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_A(M)} - \frac{1}{r_B(M)}\right) - \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_A(N)} - \frac{1}{r_B(N)}\right)\\ &= \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}\right)\end{aligned}$$

donc en faisant apparaître un facteur géométrique f lié aux distances, il vient

$$\rho = \frac{2\pi}{f}\frac{\Delta V}{I} \qquad \text{avec} \qquad f = \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \tag{21}$$

Q31. Pour tous les points K appartenant au plan médiateur du segment AB, c'est-à-dire tels que $AK = BK$, on a :

$$V(K) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{AK} - \frac{1}{BK}\right) = 0$$

Ce plan est donc une surface équipotentielle de potentiel nul.
On peut également le justifier avec des propriétés de symétrie en électrostatique.

Q32. On s'appuie sur la carte de potentiel fournie (figure 14), et sur les deux lignes équipotentielles données à $\pm 0,02$ V. On prend alors pour points M et N la position des ces lignes pour la profondeur zéro.
On a alors $\Delta V = 2 \times 0,02 = 0,04$ V. Le courant est $I = 100$ mA. Le distances sont : $AM \simeq BN \simeq 20$ m et $AN \simeq BM \simeq 40$ m. Ceci nous permet de calculer le facteur géométrique. On trouve finalement :

$$\rho = \frac{2\pi}{f}\frac{\Delta V}{I} \simeq 50\ \Omega.\mathrm{m} \tag{22}$$

On peut supposer par exemple que ce sol est fait de calcaires (voir tableau).
Plusieurs matériaux pourraient correspondre ici.

Q33. La figure 15 donnée n'est pas très explicite sur ce qu'elle signifie. On suppose que le premier graphique est un tracé de la résistivité apparente ρ_a en fonction de la distance d'exploration, pour deux distances $A - B$ utilisée; et que sont reportées horizontalement les valeurs de résistivité de trois types de sols.
Le second graphique semble être un schéma des couches géologiques du sous-sols déduites de ces mesures.
En regardant la correspondance des motifs, il semblerait qu'une grande distance $A - B$ soit plus adaptée pour sonder le sol profond (frontière entre les couches ② et ③), mais qu'une distance $A - B$ faible soit plus adaptée pour sonder le sol en surface seulement (frontière entre ① et ②).