MAGNETOSTATIQUE – EXERCICES

1. Câble coaxial :

Soit un câble coaxial cylindrique infini, constitué d'un conducteur central cylindrique de rayon R_1 dans lequel passe un courant uniforme I et d'un conducteur coaxial périphérique de rayon R_2 et d'épaisseur négligeable dans lequel le courant I revient.

a) Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace.
b) Calculer l'inductance par unité de longueur de ce câble.

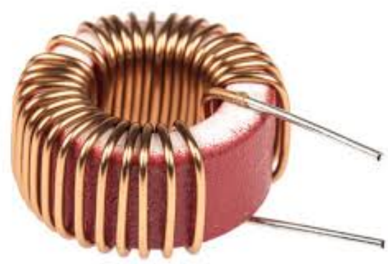
Réponses : $r < R_1$: $B = \mu_0 Ir/2\pi R_1^2$; $R_1 < r < R_2$: $B = \mu_0 I/2\pi r$; $r > R_2$: $B = 0$.

2. Résolution de problème :

On donne quelques caractéristiques du cuivre :
T_{fusion} = 1063°C ; chaleur massique C = 380 $J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}$; conductivité thermique λ = 401 $W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$; module de Young E = 128 GPa ; masse volumique 8,96 $g\cdot cm^{-3}$, conductivité électrique $\gamma = 6.10^7$ $S.m^{-1}$.
Quel est le courant maximal que l'on peut faire circuler dans un solénoide de laboratoire de N = 1000 spires?

3. Champ créé par une bobine torique :

On considère en coordonnées cylindriques d'axe Oz une spire rectangulaire S contenue dans le plan θ = 0 ayant ses côtés définis par $r = r_1$, $r = r_2$ et $z = \pm h/2$.
Une bobine torique est modélisée comme une distribution de N spires (N >> 1) déduites de S par rotation autour de Oz et parcourues par la même intensité I.

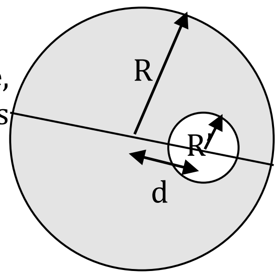


a) En un point M de coordonnées (r, θ, z), déterminer la direction de $\vec{B}(M)$ et montrer que sa norme B est constante le long d'une ligne de champ.
b) Calculer $\vec{B}(M)$ en distinguant les régions extérieures et intérieures au tore.
c) Calculer L, inductance propre du tore.

4. Champ magnétique créé par un conducteur creux (*) :

Un conducteur rectiligne, infini, parcouru par une densité de courant $\vec{j}$ uniforme, est formé de l'espace compris entre deux cylindres de rayons R et R' et de centres O_1 et O_2 avec R > R', d'axes parallèles distants de d < R - R'.
Calculer le champ magnétique à l'intérieur de la cavité de rayon R'.

Réponse : $\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{j} \wedge \overrightarrow{O_1O_2}$.



5. Modèle classique de l'électron(*) :

On modélise un électron par une sphère de rayon a uniformément chargée en volume, et de charge totale –e, et de masse m uniformément répartie également.
Cette sphère est en rotation autour de l'un de ses diamètres à la vitesse angulaire ω constante.

a) En décomposant le volume en spires élémentaires, calculer le moment magnétique M de l'électron.
b) Calculer de même son moment cinétique. Remarque ?

6. Précession de Larmor (*)

On considère un atome de moment magnétique $\vec{M}$ placé dans un champ magnétique extérieur : $\vec{B} = B.\vec{u_z}$.

a) Ecrire le théorème du moment cinétique à l'atome, et en déduire une équation différentielle en $\vec{M}$.

b) Déduire de cette équation que le module du moment magnétique reste constant.

c) Déduire de cette équation que le produit scalaire $\vec{M}.\vec{B}$ reste également constant.

d) En déduire que le mouvement de $\vec{M}$est une précession à une vitesse angulaire :

$$\vec{\omega} = \gamma.\vec{B}$$

e) Que vaut cette pulsation pour un moment magnétique orbital électronique ? Calculer numériquement la fréquence correspondante, nommée fréquence de Larmor, en $Hz.T^{-1}$.

f) On voudrait savoir si cette précession avait une influence sur l'expérience de Stern et Gerlach. Comparer la période de Larmor à la durée qu'a mis l'atome pour traverser l'entrefer. Que peut-on alors dire de $\langle M_x \rangle$ et $\langle M_y \rangle$? Conclure.

Données : vitesse moyenne des atomes d'argent : v = 500 $m.s^{-1}$; longueur de l'entrefer : d = 5 cm.

I Une mesure du champ géomagnétique

Dans cette première partie, nous nous intéressons à la mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, de norme B_H, grâce à un dispositif de type « bobines de Helmholtz » qui peut être réalisé facilement avec du matériel courant.

I.A – Une spire de rayon R, d'axe $\vec{u}_x$ et située en $x = 0$ est parcourue par un courant électrique continu d'intensité I. Elle crée en un point M d'abscisse x de son axe un champ magnétique $\vec{B}_{\text{spire}}(x)$ dont l'amplitude s'exprime par

$$B_{\text{spire}}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{-3/2} \tag{I.1}$$

À l'aide d'un schéma, préciser la direction de ce champ magnétique et discuter de son sens. En déduire une expression vectorielle $\vec{B}_{\text{spire}}$ si la spire est orientée positivement par rapport à l'axe de la spire, lui-même orienté par $\vec{u}_x$.

I.B – Déterminer alors le champ magnétique $\vec{B}_{\text{bobines}}(x)$ créé en un point M d'abscisse x de l'axe commun à deux bobines d'épaisseur négligeable, comprenant chacune N spires, parcourues par des courants de même sens et de même intensité et situées respectivement en $x = -e/2$ et $x = +e/2$. Faire un schéma représentant le système.

I.C –

I.C.1) Tracer qualitativement l'amplitude $B_{\text{bobines}}(x)$ du champ $\vec{B}_{\text{bobines}}(x)$ en fonction de x, en faisant apparaitre la contribution de chaque bobine. On distinguera différents cas selon que e est plus grand ou plus petit qu'une valeur critique e_0 (qu'on ne cherchera pas à déterminer). Quel est l'intérêt pratique du cas $e = e_0$?

I.C.2) À partir de l'étude de la courbe $B_{\text{spire}}(x)$ et de l'observation de ses points d'inflexion, justifier sans aucun calcul que, pour cette valeur particulière e_0 de e, la fonction $B_{\text{bobines}}(x)$ puisse être considérée comme constante à l'ordre 3 au voisinage de 0. On ne cherchera pas à calculer e_0, mais uniquement à décrire les variations de $B_{\text{bobines}}(x)$ au voisinage de 0 pour $e = e_0$.

I.D – On positionne les bobines de façon à ce que $e = e_0 = R/2$. En $x = 0$, on place une petite boussole constituée d'une aiguille aimantée susceptible de tourner librement autour d'un axe vertical passant par son milieu. La norme du moment magnétique de cette aiguille est notée M et on note J son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.

L'axe des bobines est aligné avec les lignes de champ de la composante horizontale du champ magnétique terrestre de telle sorte qu'en $x = 0$, l'amplitude B du champ magnétique total s'écrit $B = B_{\text{bobines}}(x = 0) + B_H$.

Le moment $\vec{\Gamma}$ du couple subit par un dipôle magnétique de moment $\vec{M}$ plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}_{\text{ext}}$ est donné par $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$. Préciser la position stable de l'aiguille.

I.E – On appelle T_1 la période des petites oscillations de l'aiguille par rapport à sa position d'équilibre. Montrer que T_1 peut s'exprimer en fonction de J, B et M. On justifiera les différentes hypothèses simplificatrices.

I.F – On appelle T_2 la période des petites oscillations de l'aiguille lorsque le sens du courant dans les bobines est inversé par rapport à la question précédente. Exprimer B_H en fonction de T_1/T_2. Préciser l'intérêt de la méthode.