DS DE PHYSIQUE N°2
VENDREDI 21 OCTOBRE 2022 – 4 HEURES

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*

I. Etude d'un système frigorifique avec un cycle de Brayton inversé (Banque PT 22) :

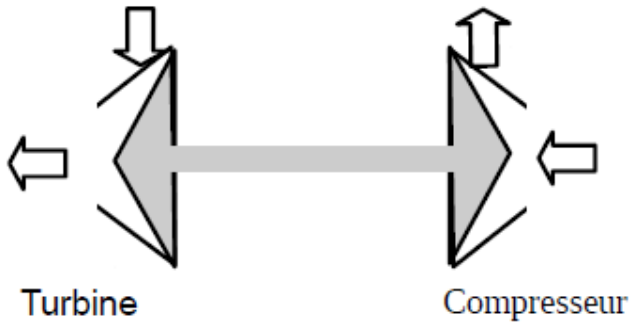
Document 1 : **Description d'un cycle de Brayton inversé avec l'air pour fluide**

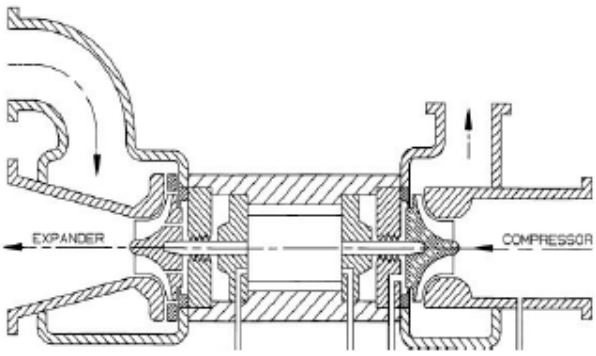
Ce cycle utilisant l'air sert à réfrigérer un fluide à -70 °C, il est schématisé en annexe. Les variations d'énergies potentielle et cinétique entre chaque organe du cycle sont négligées par rapport aux variations d'enthalpie. Les 2 compressions et le turbinage sont considérés comme isentropiques. La transmission de puissance est supposée intégrale entre la turbine et le premier compresseur (cf document 2). Les échangeurs (représentés comme des « grilles ») sont considérés comme isobares, ils sont sans pièces mobiles.

Le fluide utilisé est l'air qui est de température initiale -20 °C (état A) à 1,0 bar. L'air est comprimé de 1,0 bar à 10 bar de manière isentropique par deux compresseurs. Le premier compresseur est entraîné par la turbine du turbo-détendeur et amène l'air à l'état (B). L'air sort à l'état (C) à -10 °C après avoir parcouru un échangeur alimenté au frigorigène R134a. La sortie du deuxième compresseur est l'état (D) à 10 bar. Ce compresseur est entraîné par un moteur électrique. L'air est ensuite refroidi à -10 °C dans un deuxième échangeur au frigorigène R134a et sort à l'état (E). L'air toujours compressé entraîne ensuite la turbine en se détendant jusqu'à 1,0 bar (état F). Pour finir, l'air en traversant deux échangeurs augmente en température. Entre la température de -140 °C et -75 °C, l'air refroidit un fluide qu'on cherche à réfrigérer à -70 °C et sort à l'état (G). Ensuite l'air refroidit le fluide R134a jusqu'à revenir à l'état (A).

Il faut d'autre part refroidir le fluide R134a par un système complémentaire.

Document 2 : **Description d'un turbo-détendeur cryogénique**





L'objectif de cet organe n'est pas la compression mais l'expansion du gaz à travers la turbine afin d'abaisser la température du gaz. Le design de l'admission et de la partie tournante de la turbine donnent d'abord une grande vitesse au gaz avant qu'il soit détendu par l'augmentation du volume disponible autour de l'axe. Cette détente donne un travail mécanique qu'on récupère sur l'axe et qui peut servir à compresser sur le même axe.

Question 1 : Rappeler le premier principe avec l'enthalpie massique pour un écoulement stationnaire unidimensionnel d'un système à une entrée et une sortie.

Question 2 : Compléter le schéma en annexe avec les lettres des différents états du cycle.

Question 3 : En utilisant le diagramme {log(P), h} de l'air (R729) fourni en annexe (unité des isothermes en °C, unité des isentropes en $kJ.kg^{-1}.K^{-1}$), exprimer puis calculer le travail massique utile reçu par l'air lors de la détente isentropique de (E) à (F). En déduire le travail massique reçu par l'air lors de la compression de (A) à (B).

Question 4 : Compléter le tableau de l'annexe, placer les points et tracer le cycle sur le diagramme {log(P), h} de l'air en annexe. On montrera que P(C) = 4,0 bars (à 0,5 bar près).

Question 5 : Exprimer et calculer le transfert thermique reçu par l'air en contact avec le fluide qui est à maintenir à -70 °C.

Question 6 : On considère deux sources à -70 °C et -25 °C. Redémontrer, exprimer puis calculer l'efficacité de Carnot dans le cas d'une machine réversible qui refroidit la source froide grâce à du travail apporté par l'extérieur.

Question 7 : En considérant que le travail du compresseur électrique soit la seule énergie dépensée, exprimer et calculer l'efficacité du cycle. Commenter.

Question 8 : Quelle dépense supplémentaire faudrait-il compter pour calculer l'efficacité du cycle ?

Question 9 : Exprimer et calculer le transfert thermique massique reçu du R134a par l'air dans les trois échangeurs « R134a ». En déduire le transfert thermique total reçu par le R134a.

Question 10 : On considère une efficacité égale à 2 pour refroidir le fluide R134a par un système complémentaire afin de compenser les échanges avec l'air. Exprimer et calculer une nouvelle efficacité pour le système.

II. Le manchot empereur (CCP PC 21) :

Le manchot empereur *Aptenodytes forsteri* est la plus grande espèce de manchots, avec en moyenne une taille de 1,2 m et une masse corporelle de 30 kg. Ce manchot est capable d'affronter sur de longues durées les conditions climatiques extrêmes de l'Antarctique, caractérisées par des températures moyennes de – 40 °C lors des longues nuits polaires du mois de juin et des températures ressenties atteignant les – 200 °C lorsque le blizzard souffle au plus fort. Le secret de cette exceptionnelle capacité d'isolation thermique réside dans toute une série d'adaptations, en particulier physiologiques et comportementales.

Du point de vue des échanges thermiques, on modélise un manchot par un cylindre d'axe $(O,\vec{u}_z)$, de rayon $R = 10$ cm, de longueur $\ell = 1,2$ m, recouvert successivement :

- d'une couche de graisse d'épaisseur $e_g = 2,0$ cm et de conductivité thermique $\lambda_g = 0,20\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- d'une couche de filaments duveteux enfermant une épaisseur $e_a = 1,0$ cm d'air de conductivité thermique $\lambda_a = 0,026\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- d'une couche très dense de plumes courtes et raides, disposées en diagonale et imbriquées les unes dans les autres pour former un véritable « coupe-vent » imperméable à l'eau, d'épaisseur $e_p = 2,0$ cm et de conductivité thermique $\lambda_p = 0,035\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

En régime stationnaire, le métabolisme de l'animal fournit une puissance $\mathcal{P}_m$ permettant de maintenir sa température interne T_i constante.

II.1 - Généralités

On considère deux cylindres de même axe $(O,\vec{u}_z)$, de longueur ℓ et de rayons R_1 et R_2, de surfaces latérales isothermes portées aux températures respectives T_1 et $T_2 < T_1$ (**figure 4**).

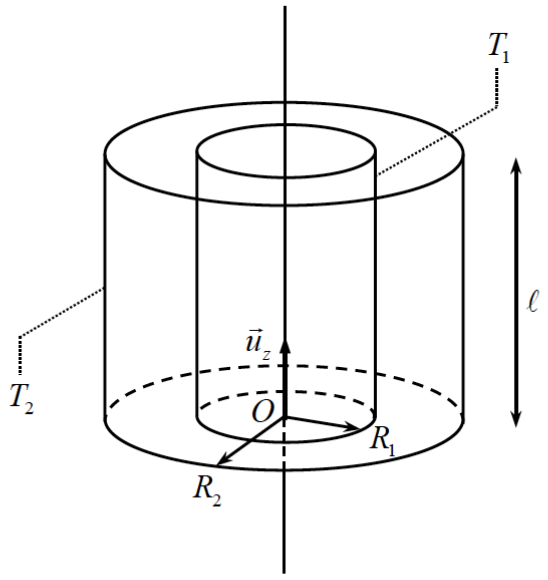


Figure 4 - Conducteur thermique à symétrie cylindrique

Le milieu séparant ces deux surfaces, homogène, isotrope, de conductivité thermique λ, est le siège d'un phénomène de transfert thermique uniquement radial en négligeant tout effet de bord. On suppose le régime stationnaire atteint. En tout point M du milieu, repéré par ses coordonnées cylindriques dans le repère $(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$, la température y est donc fonction uniquement de la distance ρ à l'axe $(O,\vec{u}_z)$: $T(M)=T(\rho)$.

Q10. Le vecteur associé au flux thermique Φ_{th} est le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$.

Que représente physiquement la norme de ce vecteur ? Préciser son unité.

Q11. Justifier que $\vec{j}_{th}=-\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho}\vec{u}_\rho$. Justifier physiquement le signe moins.

Q12. Effectuer en régime stationnaire un bilan thermique, entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$, pour la portion du milieu comprise entre les cylindres d'axe $(O,\vec{u}_z)$, de longueur ℓ, de rayons ρ et $\rho+\mathrm{d}\rho$ $(R_1<\rho<R_2)$. En déduire que l'expression du champ de température $T(\rho)$ en tout point M du milieu est : $T(\rho)=\dfrac{T_1-T_2}{\ln(R_1/R_2)}\ln(\rho/R_1)+T_1$.

Q13. Définir la résistance thermique R_{th} du milieu. Montrer qu'elle s'écrit : $R_{th}=\dfrac{1}{2\pi\lambda\ell}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$.

II.2 - Détermination du métabolisme d'un manchot

Q14. Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur adoptée du rayon R du cylindre modélisant un manchot supposé uniquement constitué d'eau.

Q15. En régime stationnaire, justifier que le flux thermique Φ_{th} dégagé par un manchot est égal à la puissance $\mathcal{P}_m$ due à son métabolisme.

Q16. Comment sont associées les résistances thermiques de chacune des couches recouvrant un manchot ? Justifier. À partir du résultat de **Q13**, donner l'expression de la résistance thermique $R_{th,1}$ équivalente à cette association en fonction notamment des conductivités thermiques et des épaisseurs des différentes couches. Calculer la valeur de $R_{th,1}$.

Q17. Les transferts thermiques entre la face extérieure du plumage du manchot à la température T_p et l'air extérieur à la température T_e sont modélisés par une densité de courant thermique conducto-convectif : $\vec{j}_{th,cc}=h(T_p-T_e)\vec{u}_\rho$ où h est le coefficient de transfert conducto-convectif. En se limitant à la surface latérale du cylindre d'aire S modélisant le manchot, exprimer en fonction de h et S la résistance thermique $R_{th,cc}$ associée à ce transfert.

Q18. En considérant que le manchot et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs de températures respectives T_p et T_e très proches, on admet que le flux radiatif surfacique φ_r émis par le manchot, s'écrit : $\varphi_r\cong 4\sigma T_e^3(T_p-T_e)$ où σ est la constante de Stefan.

Exprimer, en fonction de σ, T_e et S, la résistance thermique R_r associée à ce transfert si on se limite ici aussi à la surface latérale du cylindre modélisant le manchot.

Q19. Comment sont associées les résistances thermiques correspondant aux transferts conducto-convectifs et radiatifs ? Justifier. Donner l'expression de la résistance thermique $R_{th,2}$ équivalente à cette association en fonction de σ, T_e, h et S. Calculer la valeur de $R_{th,2}$ lorsque le manchot se trouve dans un environnement à la température $T_e = -17\ °C$ en présence d'un vent de vitesse $V = 5{,}0\ m \cdot s^{-1}$. On admettra que le coefficient de transfert conducto-convectif s'écrit : $h = 5{,}7 + 3{,}5 \cdot V$ où V est exprimé en $m \cdot s^{-1}$ et h en $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$.

Q20. Donner l'expression en la justifiant de la résistance thermique totale $R_{th,tot}$ du manchot en fonction de $R_{th,1}$ et $R_{th,2}$. En déduire la valeur de la puissance $\mathcal{P}_m$ due au métabolisme nécessaire à un manchot pour maintenir une température interne $T_i = 37{,}7\ °C$ dans un environnement à la température $T_e = -17\ °C$ et en présence d'un vent de vitesse $V = 5{,}0\ m \cdot s^{-1}$. Vérifier que la puissance $\mathcal{P}_m$ est de l'ordre de 50 W.

En plus de ses exceptionnelles capacités d'isolation thermique, le manchot empereur a développé une ultime stratégie pour réduire ses déperditions de chaleur : la thermorégulation sociale consistant à s'assembler en très grands groupes compacts de plusieurs centaines d'individus.

Des travaux de recherche menés en 2007 par l'équipe française de Caroline Gilbert ont évalué expérimentalement les bénéfices de ce comportement. Ils ont pour cela mesuré la puissance $\mathcal{P}_m$ due au métabolisme sur trois groupes de manchots, à partir de leur perte de poids en fonction du temps. Les premiers étaient seuls, isolés dans des enclos. Les seconds étaient parqués dans des enclos par petits groupes de 5 à 10 individus. Les troisièmes étaient libres de se déplacer et pouvaient s'assembler en très grands groupes. Les trois populations étaient soumises aux mêmes conditions d'environnement : température extérieure moyenne de – 17 °C et un vent moyen de $5{,}0\ m \cdot s^{-1}$. Le tableau suivant rassemble leurs observations (**tableau 1**).

	Isolé	Petits groupes	Grands groupes
$\mathcal{P}_m$ (W)	85	52	43

Tableau 1 - Puissance due au métabolisme dans trois groupes de manchots différents

Q21. À la lumière des résultats de l'équipe de recherche de Caroline Gilbert, discuter la modélisation effectuée dans cette partie. Expliquer brièvement pourquoi les grands rassemblements de manchots réduisent la puissance due à leur métabolisme.

Données

- Opérateur gradient d'un champ scalaire U :
  - $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes
  - $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \dfrac{\partial U}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques

III. Oscillateur de relaxation :

Cet oscillateur est construit autour d'un amplificateur linéaire intégré idéal, noté U0, alimenté sous les tensions ± 15 V. On considère que la tension de saturation est V_{sat} = 14 V.
On rappelle le modèle idéal de l'ALI :

- Pour tous régimes les courants d'entrée (pattes + et -) sont nuls
- En régime linéaire, la tension différentielle $\varepsilon = V^+ - V^-$ est nulle
- En régime saturé : si $\varepsilon > 0$ alors la tension de sortie de l'ALI $v_s = +V_{sat}$
  si $\varepsilon < 0$ alors la tension de sortie de l'ALI $v_s = -V_{sat}$

1. Comparateur à hystérésis

Dans un premier temps on considère le circuit suivant (Figure 1). On choisit des résistances parmi la série E12 à 10 % de précision : R_1 = 1,8 kΩ et R_2 = 2,2 kΩ.

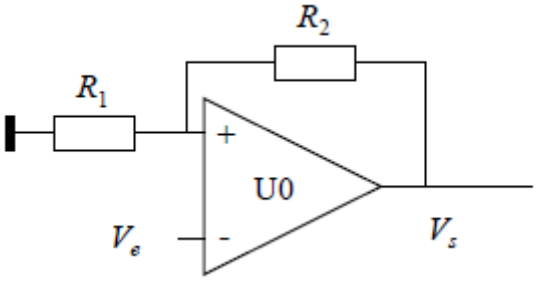


Figure 1 **:** Comparateur à hystérésis.

Q1. Pourquoi l'ALI fonctionne-t-il ici en régime saturé ?

Q2. Exprimer la tension de l'entrée (+), notée V^+, en fonction des éléments du schéma et de la tension V_s.

Q3. La tension V_e croit de – 15 V à + 15 V. Montrer qu'initialement $V_s = +V_{sat}$, et qu'il existe une valeur de V_e notée V_{e1} provoquant le basculement de la tension de sortie à $-V_{sat}$. Tracer la courbe donnant V_s en fonction de V_e ; préciser quelques valeurs numériques permettant un tracé relativement satisfaisant de cette courbe.

Q4. Même question si maintenant la tension V_e décroit de + 15 V à – 15 V. Faire apparaitre une valeur V_{e2} de V_e, et tracer la courbe donnant V_s en fonction de V_e sur le même graphe qu'à la question précédente, mais avec une couleur différente.

Pour tester le comparateur à hystérésis on impose à présent, à l'aide d'un générateur de fonctions, une tension $V_e(t)$, triangulaire, symétrique, de période T et d'amplitude E = 15 V (voir Figure 2).

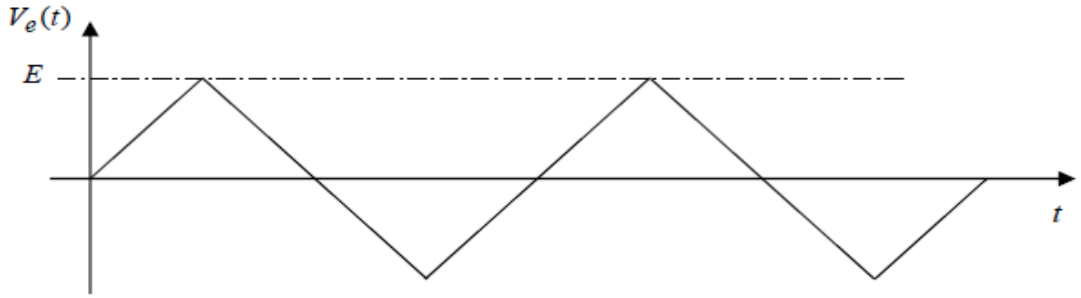


Figure 2 **:** Signal de test appliqué au comparateur.

Q5. Reproduire cette courbe sur la copie et y superposer le tracé de la courbe donnant $V_s(t)$ en fonction du temps, à la même échelle.

2. Application du circuit comparateur : oscillateur de relaxation

Le comparateur étudié précédemment est maintenant associé à un circuit RC selon le schéma de la Figure 3.

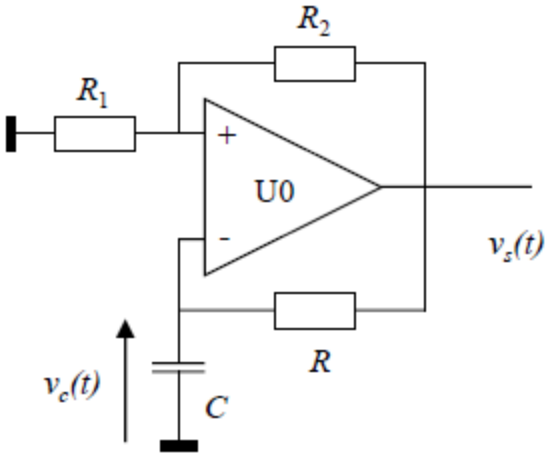


Figure 3 **:** Schéma de l'oscillateur.

A la mise sous-tension on observe assez rapidement un régime périodique avec une succession de phases de croissance puis de décroissance de v_C. La Figure 4 ci-dessous donne les enregistrements à l'oscilloscope de $v_S(t)$ (voie C1) et de $v_C(t)$ (voie C2) en fonction du temps.

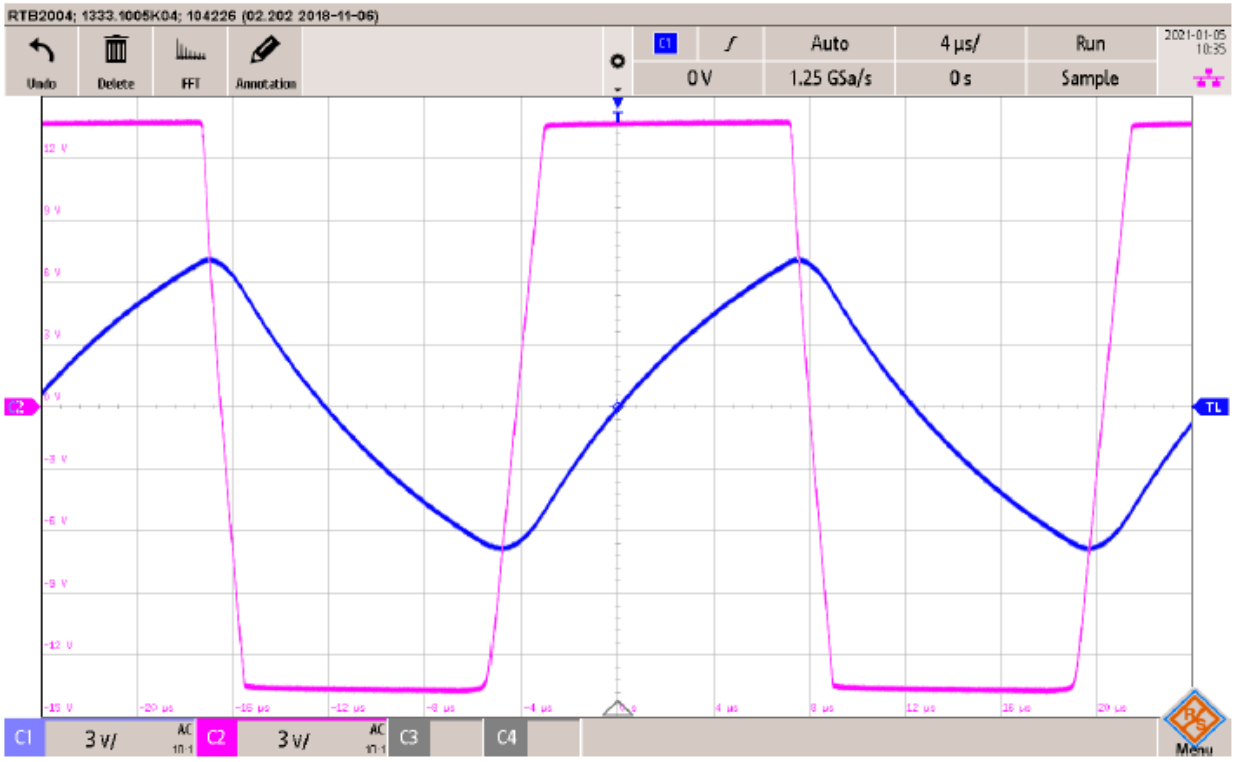


Figure 4 **:** Enregistrement des signaux fournis par l'oscillateur de relaxation.
La base de temps est de 4 µs/div et l'amplification est de 3 V/div pour les deux voies de mesure.

⇒ Etude de la phase de croissance

Q6. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le condensateur chargé sous la tension V_{e2} et que la tension de sortie de l'amplificateur U0 vaut + V_{sat}. Etablir l'équation différentielle régissant la tension $v_c(t)$:

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = V_{sat}$$

Q7. En déduire l'équation horaire de $v_c(t)$ et l'instant t_1 de fin de cette phase.

⇒ Étude de la phase de décroissance

Q8. Expliquer pourquoi v_c se met à décroitre à partir de l'instant t_1.

Q9. Établir l'équation différentielle de v_c dans cette phase.

Q10. En déduire l'équation horaire de $v_c(t)$, et l'instant t_2 de fin de cette phase.

Q11. Déterminer, d'après la durée de la deuxième phase, l'expression littérale de la période de v_c.

Q12. Déduire de l'enregistrement de la Figure 8 les valeurs numériques approchées des quantités suivantes : V_{sat} ; le rapport R_2 / R_1 et le produit RC.

3. Simulation Python de l'oscillateur :

On veut simuler le fonctionnement du comparateur.
On se réfère au script donné en annexe qui sera rendu avec la copie.
Dans ce script on a discrétisé le temps et les tensions Vc et Vs en tableaux de N éléments.

Q13. Les lignes 18 à 25 codent le comportement du comparateur à hystérésis. Compléter les lignes 19, 21, 23 et 25.

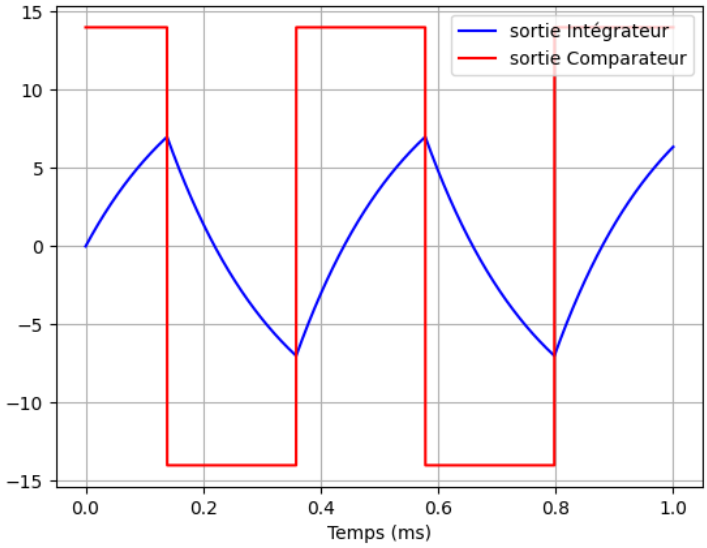
Q14. La ligne 27 code le comportement du RC passe-bas. A l'aide de la question 6, écrire Vc[i+1] en fonction de Vc[i], Vs[i], dt et tau.

Q15. Le graphe obtenu est donné à la suite du script. Pourquoi la tension Vc(t) débute-t-elle à la valeur 0 ?

ANNEXE A RENDRE EN FIN D'EPREUVE

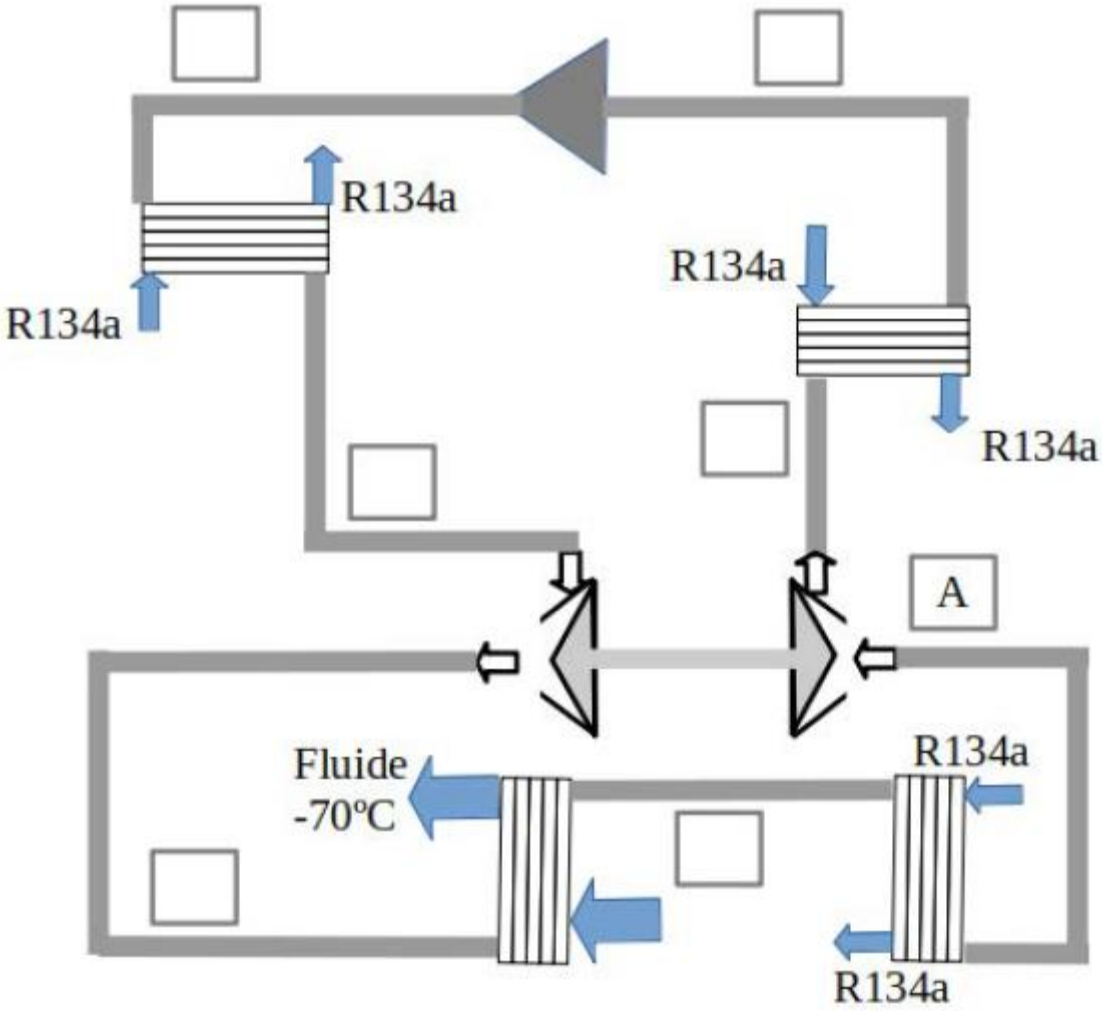
```
# importation des librairies
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

T=1            #Durée totale de la simulation en ms
Vsat = 14      #tension de saturation en V
U0 = 7         #seuil de basculement en V
tau=.2         #temps de réponse du passe-bas en ms
N = 10000      #nombre de points de calcul
dt=T/N         #pas temporel de calcul

t = np.linspace(0,1,N)

Vs=np.ones(N)  #sortie du comparateur
Vc=np.zeros(N) # tension aux bornes de la capacité

for i in range(N-1):
        if Vc[i] < U0 and Vs[i]>0:
            Vs[i:]= . . . . .
        elif Vc[i] > U0 :
            Vs[i:]= . . . . .
        elif Vc[i] > -U0 and Vs[i]<0 :
            Vs[i:]= . . . . .
        elif Vc[i] < -U0 :
            Vs[i:]= . . . . .

        Vc[i+1]=. . . . . . . .

### Représentation graphique
plt.clf()
plt.plot(t,Vc, label="sortie Intégrateur",color='b')
```

```
plt.plot(t,Vs, label="sortie Comparateur",color='r')
plt.legend(loc ="upper right")
plt.xlabel('Temps (ms)')
plt.grid()
plt.show()
```



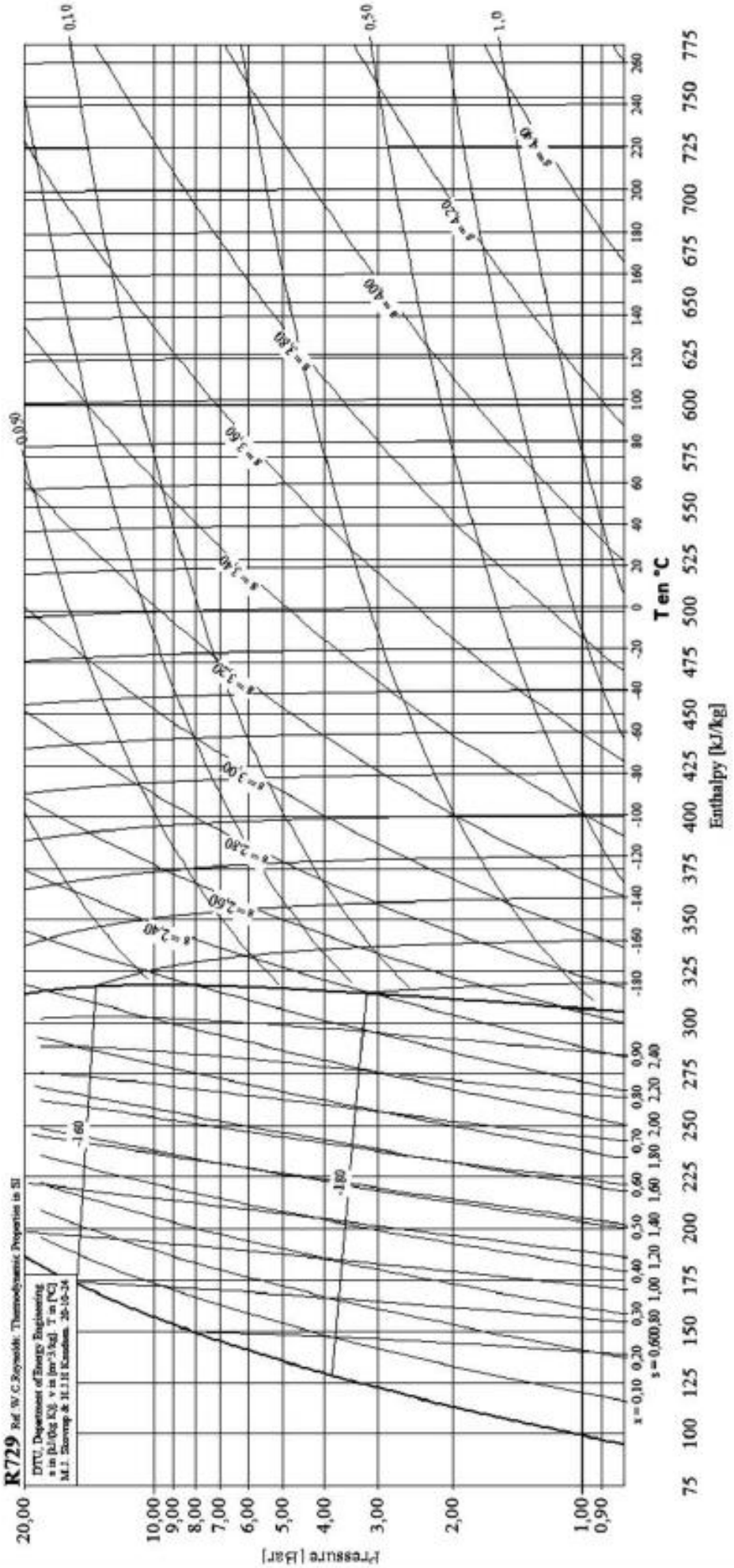
ANNEXES A RENDRE EN FIN D'EPREUVE

Question 2



Question 4

Etats		Pression (bars)	Température (°C)	h (kJ.kg^{-1})
A	Entrée compresseur	1,0	-20	
B	Entrée échangeur			
C	Entrée compresseur		-10	
D	Entrée échangeur	10		
E	Entrée turbine	10	-10	
F	Entrée échangeur	1,0		
G	Entrée échangeur	1,0	-75	


R729
Pressure [bar]
T en °C
Enthalpy [kJ/kg]

Oscillateur de relaxation (d'après Banque PT 21) : corrigé

1. L'ALI fonctionne en régime saturé car la rétroaction est sur l'entrée non-inverseuse.

2. En appliquant la formule du diviseur de tension :

$$V^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_S$$

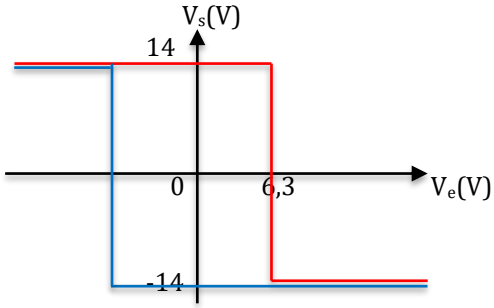
3. Initialement V_e = – 15 V et

$$V^+ = \pm \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{Sat} = \pm 6{,}3\ V$$

On a donc $V^+ > V_e$, soit $\varepsilon > 0$: la sortie est donc en saturation haute : $V_s = +V_{sat}$, et $V^+ = 6{,}3$ V.

Cette tension bascule lorsque ε s'annule, soit :

$$V_{e1} = V^+ = 6{,}3 \text{ V}$$



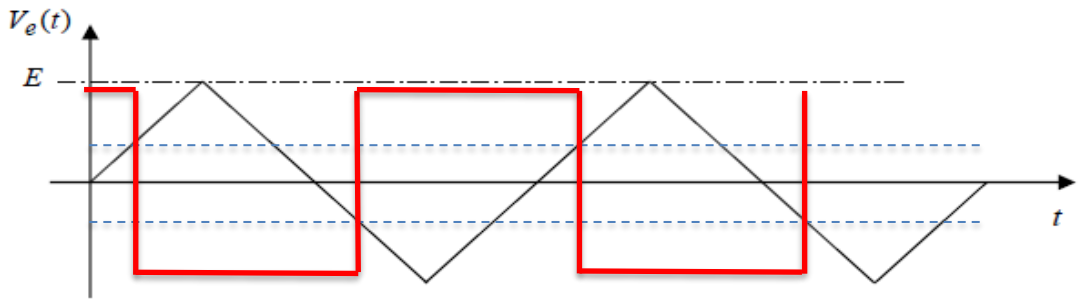
4. La tension de sortie est en saturation basse : $V_s = -V_{sat}$.
On a donc :

$$V^+ = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{Sat} = -6{,}3\ V$$

La tension de sortie rebascule à $+V_{sat}$ lorsque ε s'annule, soit :

$$V_{e2} = V^+ = -6{,}3 \text{ V}$$

5.



6. En nommant i le courant circulant dans la capacité et la résistance, on a :

$$v_c + R.i(t) = V_{sat} \text{ avec } i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \text{ d'où le résultat.}$$

7. Solution : $v_c(t) = A.e^{-t/\tau} + V_{sat}$ avec $\tau = RC$; $v_c(0) = V_{e2}$ d'où $A = V_{e2} - V_{sat}$, et :

$$v_c(t) = (V_{e2} - V_{sat})e^{-t/\tau} + V_{sat}$$

Cette phase se termine lorsque :

$$v_c(t_1) = V_{e1}$$

On en déduit :

$$t_1 = \tau ln\left(\frac{V_{e2} - V_{sat}}{V_{e1} - V_{sat}}\right)$$

8. A partir de t_1 la tension de sortie du comparateur bascule, et $v_C(t)$ décroit.

9. L'équation différentielle de v_c dans cette phase est :

$$v_c + RC\frac{dv_c(t)}{dt} = -V_{sat}$$

10. Solution : $v_c(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} - V_{sat}$ avec $v_c(0) = V_{e1}$ d'où $A = V_{e1} + V_{sat}$, et :

$$v_c(t) = (V_{e1} + V_{sat})e^{-\frac{t}{\tau}} - V_{sat}$$

Cette phase se termine lorsque :

$$v_c(t_2) = V_{e2}$$

On en déduit :

$$t_2 = \tau ln\left(\frac{V_{e1} + V_{sat}}{V_{e2} + V_{sat}}\right) = \tau ln\left(\frac{-V_{e2} + V_{sat}}{-V_{e1} + V_{sat}}\right) \; car \; V_{e2} = -V_{e1}$$

11. La période est :

$$T = t_1 + t_2 = \tau ln\left(\frac{V_{e2} - V_{sat}}{V_{e1} - V_{sat}}\right) + \tau ln\left(\frac{V_{e1} + V_{sat}}{V_{e2} + V_{sat}}\right) = 2\tau ln\left(\frac{V_{e1} + V_{sat}}{V_{e2} + V_{sat}}\right)$$

12. On mesure : V_{sat} = 14,0 V ; V_{e2} =- 7,0 V = $-\frac{R_1}{R_1+R_2}V_{Sat}$ d'où R_2 / R_1 = 1.
On mesure T = 6,2*4=25 µs d'où RC = 11 µs.

13. et 14.

```
17. for i in range(N-1):
18.         if Ve[i] > -U0 and Vs[i]<0 :
19.             Vs[i:]=-Vsat
20.         elif Ve[i] < -U0:
21.             Vs[i:]=Vsat
22.         elif Ve[i] < U0 and Vs[i]>0:
23.             Vs[i:]=Vsat
24.         elif Ve[i] > U0:
25.             Vs[i:]=-Vsat
26.         Ve[i+1]=Ve[i]+(Vs[i]-Ve[i])*2*np.pi*dt/tau
```

15. La ligne 15 montre que Vc a été initialisée à 0, on a donc Vc[0]=0.