MOUVEMENT D'UN SOLIDE

Programme PCSI 21

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.7. Mouvement d'un solide	
Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Couple.	Définir un couple.
Liaison pivot.	Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
Pendule de torsion.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement.
Pendule pesant.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement. **Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.** <u>Capacité numérique</u> **:** à l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.
Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.
Système déformable Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable.	Prendre en compte le travail des forces intérieures. Utiliser sa nullité dans le cas d'un solide. **Conduire le bilan énergétique du tabouret d'inertie.**

On considère le mouvement d'un solide par rapport à un référentiel R galiléen.

En rouge les éléments fondamentaux.

1. Description du mouvement d'un solide :

Définition : un solide est un corps dans lequel la distance entre 2 points quelconques est constante, soit :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = cte$$

Remarque : le solide est un système fermé.

Définition : la masse d'un solide est :

$$m = \iiint dm = \iiint \rho.dV = \iint \sigma.dS = \int \lambda dl$$

selon la géométrie du solide.

Définition : le centre de masse G est tel que :

$$m\overrightarrow{OG} = \iiint dm\overrightarrow{OM}, \text{ O étant un point quelconque.}$$

Définition : un solide est en translation lorsque les directions d'un repère lié au solide restent fixes par rapport au référentiel d'étude R.

Définition : un solide est en rotation autour d'un axe Oz fixe dans le référentiel d'étude R lorsque les points du solide appartenant à Oz restent fixes par rapport à R.

Par rapport à un référentiel R, le mouvement d'un solide peut se décomposer en une translation à vitesse $\vec{v}_G$ (G étant le centre de masse du solide) et une rotation.

Le programme dissocie l'étude ces deux mouvements particuliers.

2. Cas d'un mouvement de translation :

Propriété : tous les points du solide ont même vitesse et même accélération par rapport à R.

La translation est dite rectiligne si chacun des points a une trajectoire rectiligne par rapport à R.

La translation est dite circulaire si chacun des points a une trajectoire circulaire par rapport à R.

Définition : la quantité de mouvement d'un solide (résultante cinétique) est :

$$\vec{p} = \iiint dm\,\vec{v}(M)$$

Propriété :

$$\vec{p} = m\vec{v}(G)$$

Théorème de la quantité de mouvement pour un solide en translation :

$$m\frac{d\vec{v}(G)}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

3. Cas d'un mouvement de rotation :

On utilise dans ce cas des coordonnées cylindriques (r, θ, z), l'axe de rotation étant l'axe Oz.

3.1. Éléments cinétiques :

La position du solide est décrite par la seule variable θ : la liaison entre l'axe et le solide en rotation est appelée liaison pivot.

La position d'un point M du solide est donnée par :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

Remarque : les grandeurs r, z et le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ sont fixes par rapport à R.

La vitesse d'un point M du solide est donnée par :

$$\boldsymbol{\vec{v}(M) = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta},}$$

$$\boldsymbol{\dot{\theta}\ \text{est la vitesse angulaire du solide}}$$

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Oz s'écrit (admis) :

$$\boldsymbol{\vec{L} = J\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}}$$

J est appelé moment d'inertie du solide (en kg.m^2).

Remarque : J est défini par $J = \iiint_{\text{solide}} dm.r^2$ r étant la distance à l'axe de rotation.

Le moment d'inertie est donc d'autant plus grand que les masses sont plus éloignées de l'axe.

Les calculs de J ne sont pas au programme de PC.

Le moment cinétique scalaire d'un solide en rotation autour d'un axe Oz est :

$$\boldsymbol{L_z = \vec{L}.\overrightarrow{e_z} = J\dot{\theta}}$$

3.2. Théorème du moment cinétique :

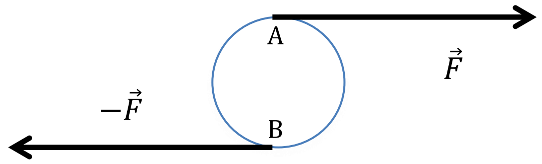
Rappel : le moment par rapport à un point O quelconque d'une force $\vec{F}$ exercée en un point M est :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Définition : Le moment M_{Oz} d'une force $\vec{F}$ s'exerçant en un point M par rapport à un axe Oz orienté par $\overrightarrow{e_z}$ est :

$$\boldsymbol{M_{Oz}(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\overrightarrow{e_z}}$$

Définition : un couple est système de forces dont la résultante est nulle et le moment résultant non nul.



Propriété : le moment d'un couple est indépendant du point ou on le calcule, ici :

$$\vec{M} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

Définition : une liaison pivot est une liaison entre deux solides n'autorisant qu'un degré de liberté entre les deux solides.

Dans notre cas l'un de ces deux solides est l'axe Oz.

Si le mouvement s'effectue sans frottements, la liaison pivot est dite « parfaite ». Le moment des forces exercées par l'axe sur le système par rapport à l'axe de rotation est alors nul.

Théorème du moment cinétique :
Le point O étant un point fixe du référentiel R :

$$\boldsymbol{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ext}})}$$

Théorème scalaire du moment cinétique dans le cas du mouvement autour d'un axe fixe Oz :

$$\boldsymbol{\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}(\overrightarrow{F_{ext}})}$$

Exemples : pendule de torsion, pendule pesant.

3.3. Approche énergétique :

Définition : l'énergie cinétique du solide est : $E_c = \iiint_{\text{solide}} \frac{1}{2}\text{dm.v}^2(\text{M})$

Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Oz fixe dans R :

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2}$$

Puissance d'une force dans le cas d'un solide en rotation à vitesse angulaire $\dot{\theta}$:

$$\boldsymbol{P = M_{Oz}\dot{\theta}}$$

La démonstration du théorème de la puissance cinétique dans le cas d'un mouvement autour d'un axe fixe Oz est au programme. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ext}})$$

$$\Leftrightarrow J\frac{d\dot{\theta}\vec{e_z}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ext}})$$

On multiplie scalairement par $\dot{\theta}\vec{e_z}$:

$$J\frac{d\dot{\theta}\vec{e_z}}{dt}\,\dot{\theta}\vec{e_z} = \sum \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ext}})\dot{\theta}\vec{e_z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right)}{dt} = \sum P(\overrightarrow{F_{ext}})$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{dE_c}{dt} = \sum P(\overrightarrow{F_{ext}})}$$

4. Cas d'un système déformable :

Dans le cas d'un système de solides, les forces intérieures (entre les différents solides) peuvent travailler. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P(\overrightarrow{F_{ext}}) + P(\overrightarrow{F_{int}})$$

Exemple : tabouret d'inertie.