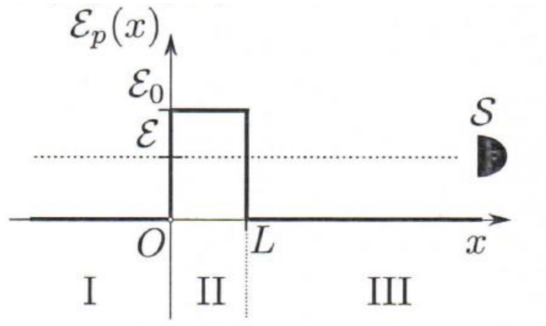
QUANTIQUE – EXERCICES (4)

1. Effet tunnel (d'après ICNA 2016) :

Une source S émet avec un débit $q_s = 10^5\ s^{-1}$ constant des objets physiques d'énergie E et de masse m dans le sens d'un axe Ox décroissant. Ils sont soumis à une barrière d'énergie potentielle $E_p(x)$ de hauteur $E_0 > E$ stationnaire et de largeur L.
On décrit quantiquement ces objets par une fonction d'onde $\Psi(x,t)$.
On rappelle l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + E_p(x).\Psi(x,t)$$

i étant l'unité imaginaire ($i^2 = -1$), $\hbar$ la constante de Planck réduite, t désigne le temps.



L'espace est divisé en trois régions :

I : $x < 0$: $E_p(x) = 0$
II : $0 \le x \le L$: $E_p(x) = E_0$
III : $x > L$: $E_p(x) = 0$

1. Quelle région est classiquement interdite et pourquoi ?
2. On cherche des états stationnaires sous la forme :

$$\Psi(x,t) = \varphi(x).\exp(-iEt/\hbar)$$

Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\varphi(x)$?

3. Dans les régions I, II et III, $\varphi(x)$ s'écrit respectivement $\varphi_I(x)$, $\varphi_{II}(x)$, $\varphi_{III}(x)$:

$$\varphi_I(x) = A_1.e^{ikx} + B_1.e^{-ikx}$$
$$\varphi_{II}(x) = A_2.e^{\alpha x} + B_2.e^{-\alpha x}$$
$$\varphi_{III}(x) = A_3.e^{ikx} + B_3.e^{-ikx}$$

où les A_i et B_i sont des constantes.
Laquelle de ces constantes est nulle et pourquoi ?

4. Exprimer k et α en fonction de m, $\hbar$, E et E_0.
5. En déduire la relation de dispersion de l'onde dans la région I.
6. Montrer que la vitesse de groupe dans la région I s'identifie à la vitesse de la particule.

7. Le rapport des amplitudes B_1/B_3 vaut :

$$\frac{B_1}{B_3} = \frac{2\exp(-ikL)}{\exp(\alpha L) + \exp(-\alpha L) + iM[\exp(\alpha L) - \exp(-\alpha L)]}\ avec\ M = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\alpha}\right)$$

Le facteur de transmission T en intensité, à travers une barrière épaisse ($\alpha L >> 1$) se met sous la forme :

$$T = T_0\exp(\eta\alpha L)$$

où T_0 est fonction de M uniquement et η est un entier relatif.
Exprimer T_0 et η.

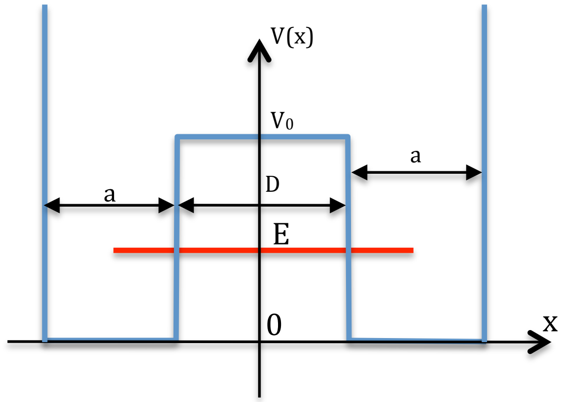
8. On peut montrer que :

$$T_0 = \frac{16E(E_0 - E)}{E_0^2}$$

Calculer E_0 sachant que $\exp(\eta\alpha L) \simeq 10^{-4}$, T = 0,04 % et E = 5 eV.

9. Quel est alors le débit q_f d'objets traversant la barrière ?

2. Double puits symétrique (*) :



On considère le potentiel suivant et une particule d'énergie $E < V_0$.

a) Dans quels domaines pourrait-on trouver une particule classique ? Une particule quantique ?

b) Dans le cas fréquent où :

$$E << V_0 \text{ et } k_2 D >> 1.$$

les états d'énergie sont donnés par :

$$\tan(k_1 a) \approx -\frac{k_1}{k_2}.(1 \pm 2\exp(-k_2 D))$$

avec $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$; $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} \approx \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} \gg k_1$

Comment trouver graphiquement les états d'énergie ?

c) Faire un schéma des états d'énergie.

d) Montrer par un développement limité au voisinage de $k_1 a = \pi$ que :

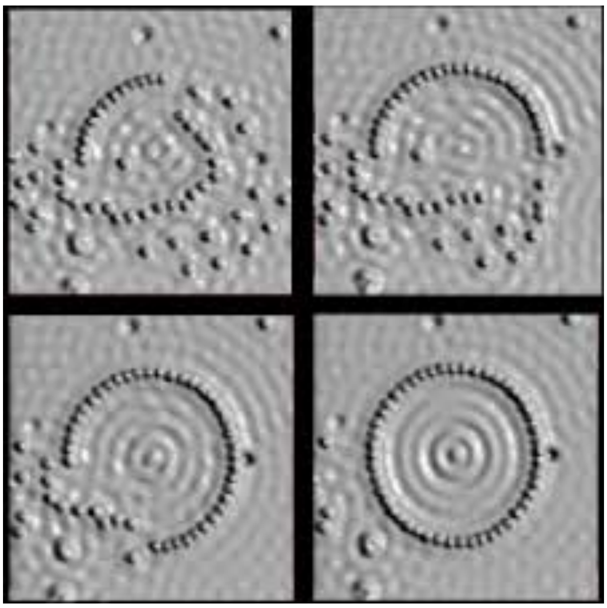
$$\Delta E = E_A - E_S = \frac{4\hbar^2\pi^2}{ma^2}\frac{\exp(-k_2 D)}{k_2 a}$$

e) Aux deux valeurs de l'énergie E_A et E_S correspondent deux fonctions d'onde $\Psi_S(x,t)$, symétrique et $\Psi_A(x,t)$, antisymétrique.

Ecrire les fonctions $\Psi_G = (\Psi_S + \Psi_A)/\sqrt{2}$ et $\Psi_D = (\Psi_S - \Psi_A)/\sqrt{2}$ et faire apparaître la pulsation d'inversion de la molécule.

f) Pour la molécule d'ammoniac on mesure $\Delta E = 10^{-4}$ eV. Calculer la fréquence d'inversion.

3. Microscope a effet tunnel :



a) Quel grossissement maximal peut-on avoir avec un microscope optique ?

On s'intéresse maintenant au microscope à effet tunnel. Le travail d'extraction d'un métal est de l'ordre de W = 4 eV.

b) Schématiser la barrière de potentiel et calculer la profondeur de pénétration δ en supposant que l'énergie de l'électron est très inférieure à W. A quelle distance typique faut-il s'approcher de l'échantillon ?

c) Le courant tunnel est donné par :

$$I = I_0 \exp(-2d/\delta) .$$

A quelle variation relative de l'intensité correspond un

d) On observe des atomes de fer sur un substrat de cuivre (doc IBM). Expliquer à quoi est du le contraste de l'image.