Chapitre 2 : ELECTROSTATIQUE

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.2. Électrostatique	
5.2.1. Champ électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique et le potentiel créés par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
Propriétés du champ électrostatique Symétries.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique. Équations locales.	Relier l'existence d'un potentiel électrostatique à la nullité du rotationnel du vecteur champ électrostatique. Justifier l'orthogonalité des lignes de champ avec les surfaces équipotentielles et leur orientation dans le sens des potentiels décroissants.
Théorème de Gauss et équation locale de Maxwell-Gauss.	Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss.
Lignes de champ électrostatique. Équipotentielles.	Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ électrostatique. Repérer, sur une carte de champ électrostatique, d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme du champ électrostatique à l'évasement des tubes de champ loin des sources. Relier équipotentielles et lignes de champ électrostatique. Évaluer la norme du champ électrostatique à partir d'un réseau de lignes équipotentielles.
5.2.2. Exemples de champs électrostatiques	
Plan infini uniformément chargé en surface.	Établir l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
Condensateur plan. Capacité. Densité volumique d'énergie électrostatique.	Établir l'expression du champ créé par un condensateur plan. Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan. Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air. Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur.
Énergie de constitution d'un noyau atomique modélisé par une boule uniformément chargée.	Exprimer l'énergie de constitution d'un noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.
5.2.3. Analogies avec le champ gravitationnel	
Analogies entre champ électrostatique et champ gravitationnel.	Utiliser les analogies entre les forces électrostatique et gravitationnelle pour déterminer l'expression de champs gravitationnels.

1. Equations générales et conséquences :

1.1. Equations vérifiées par $\vec{E}$:

Sous forme locale :

$$\boldsymbol{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\ ;\ \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}} \quad \heartsuit$$

Sous forme intégrale :

$$\oiint \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}\ ;\ \oint \vec{E}\,.\,d\vec{l} = 0 \quad \heartsuit$$

cette dernière relation exprime le fait que le champ $\vec{E}$ est à **circulation conservative.**

On déduit de la forme locale de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \iff dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dM} \quad \heartsuit$$

V est le potentiel électrostatique.

1.2. Equations de Poisson et de Laplace :

On utilise la relation vectorielle : $div\left(\overrightarrow{grad}V\right) = \Delta V$

La combinaison des équations de Maxwell-Gauss et Mxwell-Faraday permet d'écrire :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad (\textit{equation de Poisson})$$

Dans une région vide de charges ($\rho = 0$), cette équation s'écrit :

$$\Delta V = 0 \quad (\textit{equation de Laplace})$$

1.3. Principe de superposition :

Les équations vérifiées par les champs étant **linéaires** (cf équations de Maxwell) les champs obéissent au principe de superposition : le champ créé par une distribution de charges est égal à la somme (vectorielle) des champs créés par chacune de ses charges.

Exemple : molécule d'eau.

1.4. Relation entre lignes de champ et équipotentielles :

Définition : les équipotentielles sont les lieux des points M sur lesquels le potentiel est constant.

La relation :

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dM}$$

exprime le fait que les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ .

Le signe – exprime le fait que les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

1.5. Energie potentielle électrostatique :

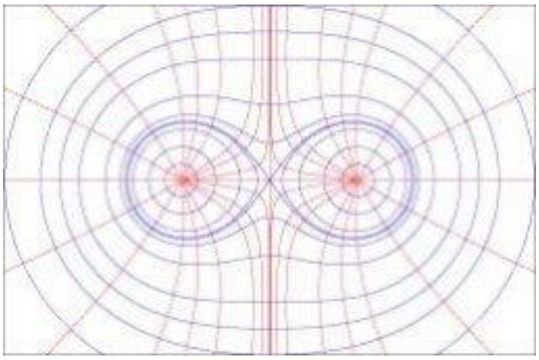
La force exercée par un champ électrostatique $\vec{E}$ sur une charge q' est :

$$\boldsymbol{\vec{F} = q'\vec{E} = -q.\overrightarrow{grad}V = -\overrightarrow{grad}(qV)}$$

L'énergie potentielle d'une charge q' dans un potentiel V est donc :

$$E_p(r) = q.V(r)$$

1.6. Lecture de cartes de champ :



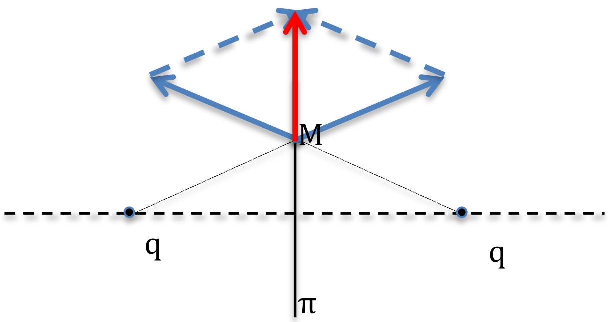
- La norme du champ électrique est d'autant plus grande que les lignes de champ sont serrées.
- Les lignes de champ électrique ne sont pas fermées
- Les lignes de champ électrique divergent (ou convergent) à partir des charges.
- Le point de croisement de deux lignes de champ est nécessairement un point de champ électrique nul.

2. Symétries d'une distribution de charges :

L'étude des symétries permet de connaître la direction du champ.

2.1.Champ en un point d'un plan de symétrie :

Considérons un couple de 2 charges identiques.
Cette distribution – discrète – possède un plan de symétrie π : la distribution de charges est inchangée dans une symétrie par rapport au plan π.

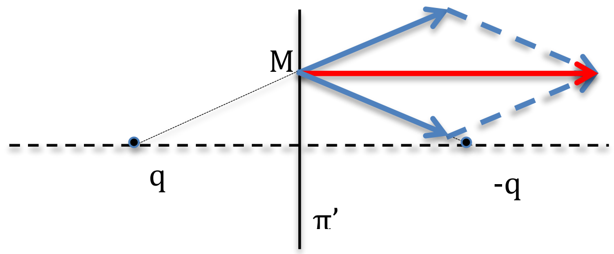


On constate que si M est dans le plan de symétrie $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan ; cette propriété est générale pour les distributions discrètes et continues.

En un point M d'un plan de symétrie d'une distribution de charges le champ $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan ♡.

2.2.Champ en un point d'un plan d'antisymétrie :

Considérons un couple de 2 charges opposées.
Cette distribution – dite discrète – possède un plan d'antisymétrie π' : la distribution de charges est transformée en son opposée dans une symétrie par rapport au plan π'.



On constate que dans le plan d'antisymétrie $\vec{E}(M)$est perpendiculaire dans ce plan ; cette propriété est générale, pour les distributions discrètes et continues.

En un point M d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges le champ $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan ♡.

Dans le cas général, une distribution de charges peut présenter à la fois des plans de symétrie et des plans d'antisymétrie, ainsi il est souvent possible de connaître la direction de $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace.

Attention, pour caractériser les plans, il faut d'abord choisir un système de coordonnées adaptées !

2.3. Exemples :

- plan infini chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$;
- ensemble de deux plans infinis distants de a et chargés avec les densités surfacique σ et $-\sigma$;
- ligne droite infinie chargée avec une densité linéique de charges λ ;
- sphère de rayon R chargée avec une densité volumique de charges ρ.

3. Invariances d'une distribution de charges :

Les invariances permettent de savoir de quelles variables dépend le champ.

Définition : une distribution de charges est dite invariante par une transformation T de l'espace si cette distribution est inchangée dans la transformation T.

Les transformations considérées sont :
- Les translations (selon un certain axe) ;
- Les rotations (autour d'un certain axe).

On admet que si une distribution de charges est invariante dans une transformation, le champ électrostatique est également invariant dans cette transformation.
C'est le **principe de Curie** : les symétries des causes se retrouvent dans les effets.

Exemple : plan infini z = 0 chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$.

Les coordonnées adaptées les plus naturelles sont les coordonnées cartésiennes (on peut aussi utiliser des coordonnées cylindriques, l'axe 0z étant perpendiculaire au plan chargé) .

Toute translation dans une direction parallèle à l'axe Ox ou 0y laisse la distribution invariante ; on en déduit que le champ ne dépend ni de x ni de y.

4. Théorème de Gauss :

4.1. Méthode :

Le théorème de Gauss est l'équation de Maxwell-Gauss intégrale :

$$\oiint \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Rappel : surface fermée : on dit qu'une surface est fermée si elle permet de définir un intérieur et un extérieur à cette surface. Une surface fermée est toujours orientée vers l'extérieur par un vecteur $d\vec{S}$ normal à cette surface.

Ce théorème peut servir à calculer le champ dans les distributions à « haute symétrie » : distributions dans lesquelles la direction du champ est connue en tout point de l'espace, et pour lesquelles le champ ne dépend que d'une variable.

Etapes :

- Choix d'un système de coordonnées
- Invariances
- Symétries
- Choix d'une surface de Gauss : On doit chercher une surface fermée passant par le point M d'étude, sur laquelle le champ $\vec{E}$ sera uniforme, et dont le vecteur $d\vec{S}$ est soit colinéaire à $\vec{E}$, soit perpendiculaire à $\vec{E}$. Cette surface peut être la réunion de plusieurs surfaces ouvertes.
- Calcul du flux
- Recensement des différents cas
- Calcul de la charge intérieure dans chaque cas
- Application du théorème de Gauss

4.2. Cas d'une charge ponctuelle q :

On considère une charge q située en O.

Les coordonnées adaptées sont les coordonnées sphériques.

Les invariances et les symétries de la distribution de charge montrent que :

$$\vec{E}(M) = E(r)\overrightarrow{u_r}$$

La surface de Gauss adaptée est une sphère de rayon r = OM.
Le flux de $\vec{E}(M)$ sur S est :

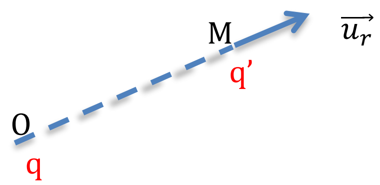
$$\oiint \vec{E}\,.\,d\vec{S} = E(r)4\pi r^2.$$

La charge intérieure à la surface de Gauss est q.
On en déduit :

$$\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}} \quad \heartsuit$$

La force exercée par la particule ponctuelle de charge q située en O sur une particule ponctuelle de charge q' située en M est :

$$\boldsymbol{\vec{F}(M) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}} \quad \heartsuit$$



On retrouve la loi de force de Coulomb.

La relation entre champ et potentiel permet de calculer le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle :

$$\boldsymbol{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + cte}$$

En général on choisit le potentiel nul à l'infini ce qui annule la constante ; on choisit toujours cette convention lorsqu'il n'y a pas de charges à l'infini.

Ordre de grandeur atomique :

Pour l'atome d'hydrogène, on a : r ≈ 50 pm (rayon de Bohr) ; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ SI ;

le champ créé par le noyau sur l'électron dans un atome d'hydrogène vaut E = 6.10^{11} $V.m^{-1}$.

4.3. Champ créé par une sphère de rayon R et de centre O uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charges ρ :

La charge totale de la sphère est : $Q = \rho.\frac{4}{3}\pi.R^3$.

On montre qu'à l'intérieur de la sphère :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\overrightarrow{u_r}$$

et à l'extérieur de la sphère :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Remarques :

- le champ est identique au champ créé par une charge ponctuelle Q située en O ;
- le champ est continu en r = R : cette continuité est générale pour les distributions de charges volumiques.

4.4. Champ créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ :

Si le plan chargé est le plan Oxy :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour z > 0 ;}$$

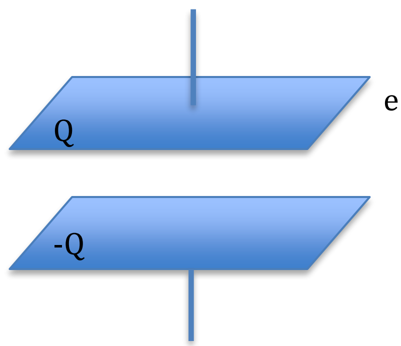
$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour z < 0.}$$

Remarque : le champ est discontinu en z=0, la discontinuité valant :

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$$

5. Principe de superposition : application au condensateur plan :

5.1. Définition :



Un condensateur plan est formé de deux armatures planes de surface S, distantes de e, et portant des charges Q et –Q opposées uniformément réparties avec les densités σ et -σ.
On a naturellement :

$$Q = \sigma.S$$

Une modélisation simple consiste à considérer les plans comme infinis, ie à négliger les effets de bord.

On a montré que le champ créé par une plaque plane infinie perpendiculaire à un axe Oz et chargée avec une densité uniforme σ est :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour } z > 0 \text{ ;}$$
$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour } z < 0.$$

Par superposition, le champ créé par le condensateur plan est nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur, avec :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$$

La différence de potentiel entre les deux armatures vaut donc :

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}e$$

5.2. Capacité du condensateur :

$$C \overset{\text{def}}{=} \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Remarque : l'espace inter armatures n'est pas vide, mais rempli d'un isolant (dit « diélectrique ») et caractérisé par sa permittivité <u>relative</u> (ie relative au vide et sans dimension) notée ε.
La capacité devient alors :

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{e}$$

5.3. Energie du condensateur :

L'énergie électrostatique d'une distribution de charge qui crée un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dans l'espace a pour expression :

$$E_e = \iiint_{espace} \frac{\varepsilon_0.E^2}{2}.d\tau$$

On calcule ici :

$$E_e = \frac{1}{2}C.U^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

6. **Energie électrostatique d'un noyau atomique :**

6.1. Première approche de l'énergie :

On modélise le noyau atomique par une sphère de rayon a uniformément chargée en volume de charge totale Q = Z.e.

L'énergie électrostatique du noyau est l'énergie à fournir pour constituer le noyau à partir de charges situées à l'infini.
Par analyse dimensionnelle, l'énergie électrostatique est de la forme :

$$E_e = K\frac{Q^2}{\varepsilon_0 a}$$

où le préfacteur K est sans dimensions.

Un calcul exact montre que :

$$E_e = \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

6.2. Modèle du noyau :

Le premier modèle de noyau (modèle de la goutte) du à Niels Bohr et Von Weiszacker (1935) stipule que :

- Le noyau est sphérique ;
- La densité de la matière nucléaire est constante et identique pour tous les noyaux, soit :

$$\frac{N}{V} = \frac{A}{4\pi R^3/3}$$

d'où $R = R_0.A^{1/3}$ avec $R_0 = 1{,}2.10^{-15}$ m.

Exemple d'un noyau d'U (Z = 92, A= 235, a = 7,0 fm) ; on calcule :

E = 1000 MeV

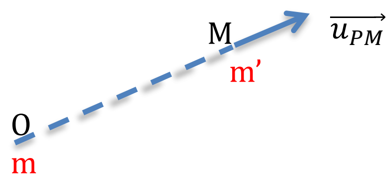
Cette énergie tend naturellement à faire éclater le noyau, ainsi il existe une force permettant la liaison : la force nucléaire, associée à une énergie par nucléon largement supérieure à 4 MeV/nucléon pour la plupart des noyaux.

Voir Feynman Electromagnétisme 1 « Energie électrostatique » .

7. Analogie avec le champ de gravitation :

La force exercée par une masse ponctuelle m située en O sur une masse ponctuelle m' située en M est la force de Coulomb :

$$\vec{F}(M) = -G\frac{mm'}{r^2}\overrightarrow{u_{OM}}$$ (**loi de Newton** ♡)



$G = 6{,}67.10^{-11}$ SI est la constante de gravitation

Le champ de gravitation créé en un point M par une masse ponctuelle m située en O s'écrit en conséquence :

$$\vec{A}(M) = -G\frac{m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Le théorème de Gauss pour le champ de gravitation $\vec{A}$ s'exprime donc :

$$\oiint \vec{A}.d\vec{S} = -4\pi G.M_{int}$$