

DIFFUSION DE PARTICULES - EXERCICES

1. Solution générale de l'équation-pilote de la diffusion :

On considère un barreau cylindrique infini d'axe Ox et de section S. Soit $n(x,t)$ la concentration volumique en particules et D (constant) le coefficient de diffusion des particules dans le barreau.

- Rappeler la loi de Fick. Quelle est l'unité de D ?
- Démontrer l'équation de conservation des particules (on exclut toute création ou absorption de particules).
- En déduire l'équation différentielle régissant les variations de $n(x,t)$ appelée équation pilote de la diffusion.
- A $t = 0$, on introduit N_0 particules à l'abscisse $x = 0$. Vérifier que :

$$n(x, t) = \frac{N_0}{S\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

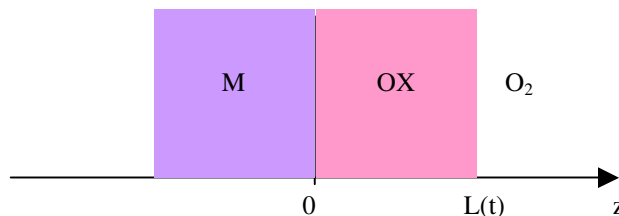
est solution de l'équation.

- Les conditions aux limites sont-elles vérifiées ?
- Tracer (machine, ordi) l'allure de $n(x)$ à t fixé, pour 3 valeurs différentes de t non nulles). Que peut-on dire de l'aire sous la courbe ?
- Déterminer à t donné la largeur à mi-hauteur L telle pour $|x| < L$ on ait $n(x,t) > n(0,t) / 2$. Si L est l'échelle spatiale caractéristique du phénomène, quelle est l'échelle de temps τ caractéristique ?
- AN : gaz à 20°C : $D = 2,5 \cdot 10^{-5}$ SI.

Quelle est la durée nécessaire pour ressentir la diffusion sur une distance de $L = 10$ cm ? $L = 1$ m ? Dans un liquide à 20°C , $D = 2,5 \cdot 10^{-9}$ SI. Mêmes questions.

2. Oxydation d'un métal :

Si l'on met une surface métallique (métal M) en présence d'oxygène, il se forme une pellicule d'oxyde OX dont l'épaisseur $L(t)$ croît au cours du temps, les atomes M diffusant dans l'oxyde avec un coefficient de diffusion D supposé constant.

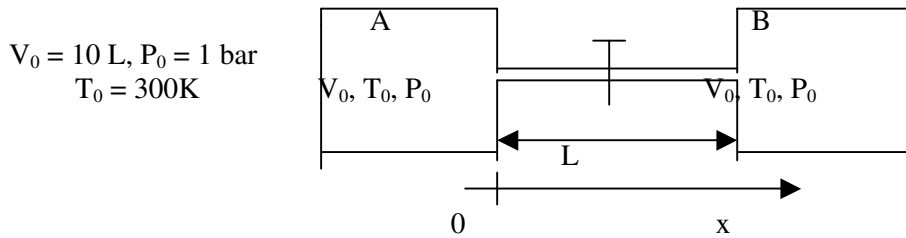


Si l'on admet que la diffusion est le phénomène limitant, les concentrations en métal aux deux interfaces de l'oxyde peuvent être considérées comme indépendantes du temps :

- C_0 est le nombre d'atome M par unité de volume en $z = 0$;
 - C_L est le nombre d'atome M par unité de volume en $z = L$.
- Soit J_D la densité de courant d'atomes dans OX. Montrer que si l'on considère le régime quasi-stationnaire, J_D est indépendant de z et l'exprimer en fonction de C_0 , C_L et $L(t)$.
 - L'épaisseur de la couche d'oxyde croît avec l'arrivée d'atomes M à l'interface OX/ O_2 . On désigne par Ω le volume d'oxyde formé par l'atome de métal M atteignant l'interface. Etablir l'équation différentielle en $L(t)$ et déterminer $L(t)$ si $L(0) = 0$.
 - Les hypothèses précédentes supposent un régime quasi-stationnaire. Etablir en fonction de $L(t)$ et D un temps caractéristique de diffusion, puis en fonction de $L(t)$, C_0 , C_L , D et Ω un temps caractéristique de croissance de la couche. En déduire un critère permettant de considérer le régime comme quasi-stationnaire.

3. Diffusion mutuelle de deux gaz

Deux récipients A et B de même volume V_0 , maintenus à la même température T_0 contiennent initialement pour le récipient A du diazote sous une pression $P_0 = 1$ bar et du monoxyde de carbone sous la même pression pour le compartiment B. Les gaz sont parfaits.



Un tube de longueur L et de section s relie les deux compartiments ($s.L \ll V_0$)

On admet que les coefficients de diffusion sont tous identiques : $D = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

On note $N(t)$ le nombre de molécules de diazote dans le compartiment B et N_0 le nombre de molécules dans chaque compartiment à $t = 0$ (avant ouverture du robinet). A $t = 0$, on ouvre le robinet. Les densités particulières en N_2 et CO dans le tuyau sont notées $n_1^*(x, t)$ et $n_2^*(x, t)$. Du fait de cette évolution très lente on pourra considérer que la composition de chaque compartiment reste homogène.

- On suppose que les évolutions sont quasi-stationnaires. Déterminer $n_1^*(x, t)$, $n_2^*(x, t)$ et $n_{1+2}^*(x, t)$ en fonction de N_0 , $N(t)$, L , V_0 et x .
- Déterminer les densités de courant de diffusion $j_1(x, t)$ et $j_2(x, t)$.
- En déduire une équation du premier ordre portant sur $N(t)$ et en donner la solution.
- Déterminer le temps t_1 au bout duquel $N(t_1) = 0,99 \cdot N_{\text{eq}}$ (N_{eq} étant la valeur de N à l'équilibre. $L = 20$ cm, $s = 1 \text{ cm}^2$, $D = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).
- Comparer la constante de temps de $N(t)$ au temps caractéristique de la diffusion $t_d = \frac{L^2}{D}$.

4. Diffusion de molécules sous l'action d'un gradient de concentration

Un récipient contient un liquide homogène, de masse volumique ρ , dans lequel on ajoute des macromolécules insolubles de masse volumique ρ_0 ($\rho_0 > \rho$), supposées de forme sphérique.

La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date $t = 0$. A partir de cet instant elle est abandonnée à elle-même et, sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent vers le fond du récipient. Nous supposons un mouvement unidirectionnel vertical et les macromolécules soumises, entre autres, à une force de type visqueux : $\vec{F} = -\lambda \cdot \vec{v}$ avec λ une constante positive).

- Donner l'équation différentielle du mouvement d'une macromolécule (on considérera un axe Oz vertical ascendant, l'origine 0 coïncidant avec le fond du récipient).
- Montrer que ces particules atteignent une vitesse limite v_{lim} que l'on exprimera en fonction de m , g , λ , ρ et ρ_0 .
- La vitesse limite étant supposée atteinte très rapidement, donner l'expression de la densité du flux d'entraînement molaire $\vec{j}_e$ des macromolécules à la côte z ; où leur concentration molaire est $c(z)$ ($\vec{j}_e$ correspondant à la quantité de macromolécules (en moles) traversant une surface unité horizontale pendant l'unité de durée).
- La sédimentation ayant entraîné une inhomogénéité de la solution, le phénomène de diffusion dans le sens ascendant apparaît. On admet que la densité de flux de diffusion molaire $\vec{j}_d$ des particules est donnée par la loi de Fick : $\vec{j} = -D \frac{\partial c}{\partial z} \vec{e}_z$. Déterminer, en régime stationnaire, la loi de variation de c avec z .

- Des mesures optiques montrent que, à 25°C , $\frac{c(z=0)}{c(z=2\text{cm})} = 2$. Quelle est la masse molaire des macromolécules et la valeur de leur rayon ?

On donne : $D = \frac{k_B \cdot T}{\lambda}$ $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\rho_0 = 1250 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$