

## DIFFUSION DE PARTICULES

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>2.1 Diffusion de particules</b>	
Vecteur densité de flux de particules $\mathbf{j}_N$ .	Exprimer le nombre de particules traversant une surface en utilisant le vecteur $\mathbf{j}_N$
Bilans de particules.	Utiliser la notion de flux pour traduire un bilan global de particules. Établir une équation traduisant un bilan local dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne, éventuellement en présence de sources internes. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
Loi de Fick.	Utiliser la loi de Fick. Citer l'ordre de grandeur d'un coefficient de diffusion dans un gaz dans les conditions usuelles.
Régimes stationnaires.	Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne.
Équation de diffusion en l'absence de sources internes.	Établir une équation de la diffusion dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.
Approche microscopique du phénomène de diffusion.	Mettre en place un modèle probabiliste discret à une dimension de la diffusion (marche au hasard) et évaluer le coefficient de diffusion associé en fonction du libre parcours moyen et de la vitesse quadratique moyenne.

On considère sauf mention contraire des grandeurs unidirectionnelles, soit  $f(x,t)$ .

La diffusion est une migration de particules sans déplacement macroscopique ( sans convection ) du milieu ; cette migration de particules est due à l'agitation thermique.

On ne considèrera que des solides, mais les équations peuvent se généraliser aux liquides sans convection.

La diffusion de particules se produit lorsqu'une hétérogénéité de concentration apparaît dans un milieu ; à cause de l'agitation thermique, produisant des chocs incessants des molécules au niveau microscopique, ces hétérogénéités ont tendance à se résorber.

<http://www.youtube.com/watch?v=n5nubvwJJQM>

**1. Définitions :**

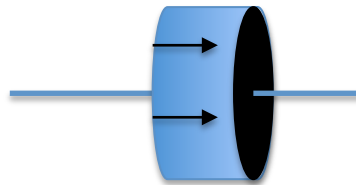
On considère des particules se déplaçant dans un milieu fixe selon une direction Ox.

**Définition :** on appelle **flux de particules**  $\Phi$  à travers une surface S le nombre de particules passant à travers S par unité de temps.

Unité : s<sup>-1</sup>.

Le nombre dN de particules traversant S pendant dt est donc :

$$dN = \Phi \cdot dt$$



**Définition :** on appelle vecteur densité de courant de particules  $\vec{j}_n = j_n(x,t) \vec{u}_x$  le vecteur dont le flux à travers une surface S orientée est égal au flux de particules  $\Phi$ .

On peut donc écrire :

$$\phi = \iint_S \vec{j}_n \cdot d\vec{S}$$

J s'exprime en m<sup>-2</sup>.s<sup>-1</sup>.

Remarque : ce vecteur est aussi nommé densité ( sous-entendu « surfacique » ) de flux de particules.

**Définition :** la densité volumique de particules n(x,t) est le nombre de particules par unité de volume.

Unité : m<sup>-3</sup>.

**2. Equation de conservation des particules :**

2.1. Sources internes :

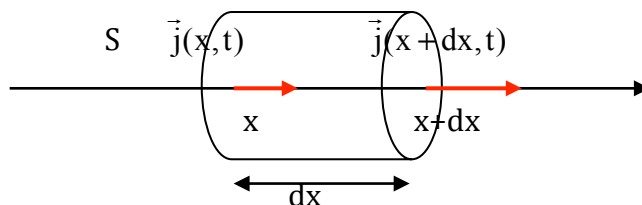
Dans certains milieux, peuvent exister des **sources internes** de particules, modélisé par  $\sigma$ , nombre de particules « créées » par unité de temps et de volume, exemple : réactions nucléaires, réactions chimiques.

Si  $\sigma > 0$ , les particules sont créées, si  $\sigma < 0$ , elles sont absorbées.

La variation du nombre de particules due aux sources internes dans un volume dV pendant dt est donc :

$$dN = \sigma \cdot dV \cdot dt$$

2.2. Bilan de particules :



On considère une longueur  $dx$  d'un barreau de section  $S$  entre les instants  $t$  et  $t+dt$ , contenant des particules en concentration  $n(x,t)$ .

Dans ce barreau existe une densité de courant de particules  $\vec{j}_n = j_n(x,t) \vec{u}_x$  et une source interne  $\sigma$ .

- Le nombre de particules franchissant  $S$  à l'abscisse  $x$  pendant  $dt$  est  $dN_1 = S \cdot j(x,t) \cdot dt$
- Le nombre de particules franchissant  $S$  à l'abscisse  $x+dx$  pendant  $dt$  est  $dN_2 = S \cdot j(x+dx,t) \cdot dt$
- Le nombre de particules apparaissant pendant  $dt$  est  $dN_3 = \sigma \cdot S \cdot dx \cdot dt$

La variation du nombre total de particules entre  $x$  et  $x+dx$  est pendant  $dt$  :

$$[n(t+dt,x) - n(t,x)] \cdot S \cdot dx = dN_1 - dN_2 + dN_3$$

$$\Leftrightarrow S \cdot dx \cdot \frac{\partial n(x,t)}{\partial t} \cdot dt = -S \cdot \frac{\partial j_n(x,t)}{\partial x} \cdot dx \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dx \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} + \sigma$$

Généralisation :

$$\text{div}(\vec{j}(\vec{r},t)) + \frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} = \sigma$$

### 2.3. Cas particulier du régime stationnaire avec $\sigma = 0$ :

Les équations locale et intégrale s'écrivent :

$$\text{div}(\vec{j}(\vec{r},t)) = 0 \Leftrightarrow \oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

Cette dernière équation traduit le fait que le flux de particules se conserve.

### 3. Loi de Fick :

On constate expérimentalement que la diffusion de particules s'effectue des zones de forte concentration vers les zones de concentration plus faible ; de plus, Fick ( 1856 ) établit une relation de proportionnalité entre  $\vec{j}$  et le gradient de concentration.

Loi de Fick ( phénoménologique ) :  $\vec{j}(\vec{r},t) = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(n(\vec{r},t))$

Si  $n = n(x,t)$ , on a :  $\vec{j}(x,t) = -D \cdot \frac{\partial n(x,t)}{\partial x} \vec{e}_x$

$D$  ( positive ) est le coefficient de diffusion, en  $m^2 \cdot s^{-1}$ .

$D$  dépend de la nature des particules qui diffusent, de celles du milieu, de la température et de la pression.

Ordres de grandeurs des coefficients de diffusion :

Dans l'air (T = 273 K ; P = 1 bar)	D ( m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )
CO <sub>2</sub>	0,138.10 <sup>-4</sup>
O <sub>2</sub>	0,178.10 <sup>-4</sup>
CH <sub>4</sub>	0,196.10 <sup>-4</sup>
H <sub>2</sub> O	0,219.10 <sup>-4</sup>
H <sub>2</sub>	0,611.10 <sup>-4</sup>

Dans l'eau ( T = 25°C )	D ( m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )
NaCl	1,9.10 <sup>-9</sup>
Eau	3,0.10 <sup>-9</sup>
Sucre	0,52.10 <sup>-9</sup>

#### 4. Equation de la diffusion :

En remplaçant  $\vec{j}(x, t)$  par son expression dans l'équation de conservation, on obtient facilement :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \sigma$$

Remarques :

- Cette équation est linéaire.
- Le fait que t ne puisse être remplacé par -t montre que la diffusion est un phénomène irréversible.

Soit L un ordre de grandeur des variations spatiales de n(x,t) et τ un ordre de grandeur des variations temporelles de n(x,t).

On calcule en ordre de grandeurs littéraux :

$$\frac{\partial n}{\partial t} \approx \frac{n}{\tau} ; \Delta n \approx \frac{n}{L^2}$$

En ordre de grandeur, la longueur de diffusion L sans sources internes est telle que :

$$L^2 = D \cdot \tau$$

Généralisation à une géométrie quelconque :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \Delta n + \sigma$$

#### 5. Cas de régimes sans sources internes :

##### 5.1. Régime stationnaire :

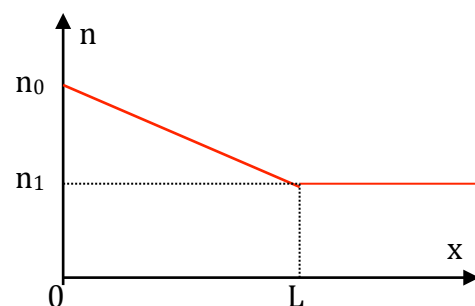
On considère un barreau homogène de longueur L et de section S dont les deux extrémités sont reliées à des réservoirs assurant des concentration constantes :  $n(0) = n_0$  ;  $n(L) = n_1 < n_0$ . On considère  $\sigma = 0$ .

En régime stationnaire  $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$  d'où  $n(x, t) = n(x)$ .

On calcule  $n(x) = n_0 + \frac{n_1 - n_0}{L} x$       $j_n = -D \frac{n_1 - n_0}{L} = \text{cte}$

En régime permanent,  $\Phi$  est constant et uniforme dans le barreau.

Le profil de concentration est linéaire.



##### 5.2. Régime instationnaire :

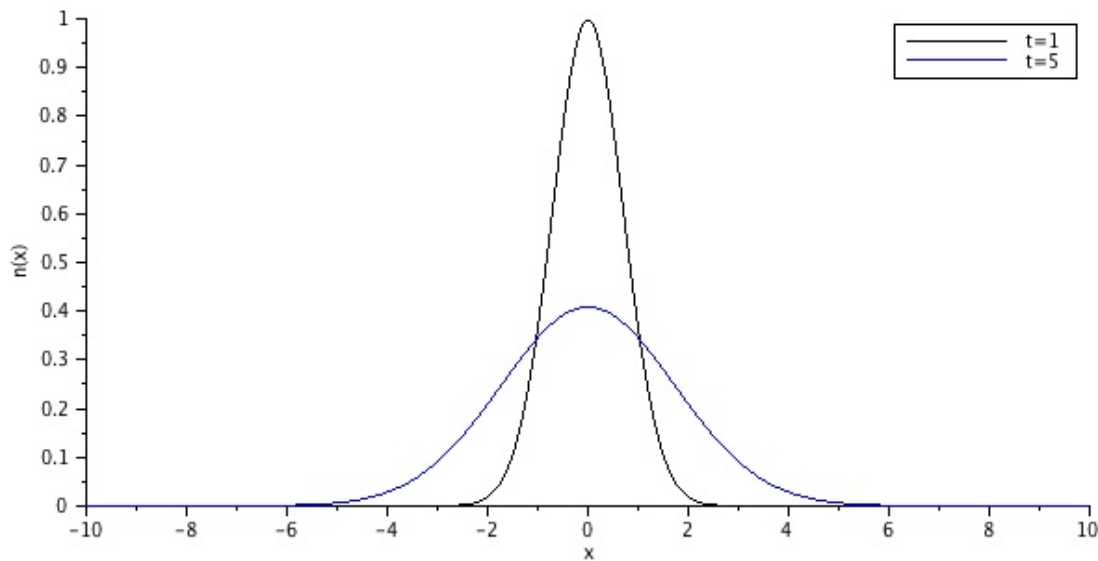
On considère une distribution à une dimension, obtenue en plaçant  $N_0$  particules à  $t = 0$  en  $x = 0$ . On peut montrer qu'une solution de l'équation de diffusion est alors :

$$n(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

$n(x,t)$  est une gaussienne ; cette courbe apparaît lorsqu'un processus aléatoire est en jeu.

La largeur à mi-hauteur de cette gaussienne est :

$$\Delta x = 2\sqrt{\ln(2)Dt} \approx \sqrt{Dt}$$



## 6. Approche microscopique du phénomène de diffusion :

On considère un milieu dans lequel des particules ne se déplacent que suivant un axe Ox. A l'instant  $t = 0$ , on place  $N_0$  particules en  $x=0$ .

A cause des chocs, une particule peut être poussée vers la droite ou vers la gauche avec la même probabilité  $\frac{1}{2}$ .

Soit  $\bar{l}$  le libre parcours moyen de cette particule : c'est la distance moyenne qu'elle peut parcourir entre deux chocs.

Soit  $v^*$  sa vitesse quadratique moyenne ; la durée moyenne entre deux chocs est donc :

$$\tau = \frac{\bar{l}}{v^*}$$

Entre  $t=0$  et  $t$ , elle effectue  $m = t/\tau$  pas.

La probabilité pour s'être déplacée de  $p$  pas vers la droite après avoir fait  $m$  pas est :

$$\Pr(p) = C_m^p \left(\frac{1}{2}\right)^p \left(\frac{1}{2}\right)^{m-p} = \frac{C_m^p}{2^m}$$

C'est la probabilité de se trouver entre  $x$  et  $x+\bar{l}$ .

Pour  $m \gg 1$ , on a :

$$\Pr(p) = \frac{C_m^p}{2^m} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \exp\left(-\frac{1}{2m}(m-2p)^2\right)$$

La distance  $x$  correspondant à ces  $p$  pas est :

$$x = n\bar{l} - (m-n)\bar{l} = (2n-m)\bar{l}$$

On a donc une densité de particules par unité de longueur :

$$\frac{dN}{dx} = \frac{N_0 \cdot \text{Pr}(p)}{2\bar{l}} \simeq \frac{N_0}{\bar{l}} \sqrt{\frac{2\tau}{4\pi t}} \exp\left(-\frac{\tau x^2}{2t\bar{l}^2}\right)$$

le facteur 2 provenant de la symétrie par rapport à l'origine.

La comparaison avec l'expression du paragraphe précédent permet d'identifier :

$$D = \frac{\bar{l}^2}{2\tau} = \frac{1}{2} \bar{l} \cdot v^*$$

Remarque : le facteur numérique exact est en fait  $1/3$  et non  $1/2$ .

En ordre de grandeur :

$$D \simeq \bar{l} \cdot v^*$$

AN : à la pression atmosphérique dans de l'air :  $\bar{l} \simeq 10^{-7} m$  ;  $v^* \simeq 500 m \cdot s^{-1}$ .

# DIFFUSION THERMIQUE

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>2.2 Diffusion thermique</b>	
Vecteur densité de flux thermique $\mathbf{j}_q$	Exprimer le flux thermique à travers une surface en utilisant le vecteur $\mathbf{j}_q$ .
Premier principe de la thermodynamique.	Utiliser le premier principe dans le cas d'un milieu solide pour établir une équation locale dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne, éventuellement en présence de sources internes. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
Loi de Fourier.	Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
Régimes stationnaires. Résistance thermique.	Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Exprimer une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel en géométrie cartésienne. Utiliser des associations de résistances thermiques.
Équation de la diffusion thermique en l'absence de sources internes.	Établir une équation de la diffusion dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Utiliser la relation de Newton $\delta Q = h(T_s - T_a) dS dt$ fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide.

On considère dans ce cours des grandeurs unidimensionnelles, soit  $f(x,t)$ .

## 1. Modes de transfert thermique :

Les transferts thermiques peuvent se faire :

- par **rayonnement** : l'énergie est véhiculée par une onde , exemple : four à micro-ondes, feu de cheminée.
- par **convection** : l'énergie s'échange par déplacement de fluide, exemple : radiateur soufflant ( convecteur !), Gulf Stream.
- par **diffusion** (ou **conduction**) : l'énergie s'échange par chocs, sans déplacement de matière, exemple : diffusion dans une cuiller en métal, diffusion à travers un mur.

La diffusion thermique se produit lorsqu'il existe un gradient de température dans un milieu ; l'énergie est transférée spontanément des zones chaudes vers les zones froides du milieu considéré.

<http://www.youtube.com/watch?v=nbzYilygJs4>  
<http://www.youtube.com/watch?v=2LGfriM300Y>

## 2. Définitions :

**Définition** : le vecteur densité de courant thermique ( ou densité de flux thermique)  $\vec{j}(\vec{r},t)$  est un vecteur dirigé dans le sens du flux thermique, et dont le module est égal à la quantité d'énergie traversant une surface unité perpendiculaire à  $\vec{j}(\vec{r},t)$  par unité de temps.

Il s'exprime en  $J.m^{-2}.s^{-1} = W.m^{-2}$ .

**Définition** :  $\Phi = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$  est appelé flux thermique ou puissance thermique.

Unité : W.

Dans le cas fréquent où  $\vec{j}(\vec{r},t)$  et  $d\vec{S}$  sont colinéaires et de même sens, et où  $\vec{j}(\vec{r},t)$  est uniforme sur la surface S, on a :

$$\Phi = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S j \cdot dS = j \cdot S$$

L'énergie ( transfert thermique ) traversant une surface S pendant dt est donc :

$$\delta Q = \Phi \cdot dt$$

elle est algébrique.

## 3. Equation de conservation de l'énergie :

### 3.1. Sources internes :

Dans certains cas, il peut exister une « source interne » d'énergie, produisant une puissance thermique  $p_{vol}$  par unité de volume ( exemple : effet Joule, radioactivité ).

Exemple : si un barreau de volume V possède une résistance R et est parcouru par I, on aura :

$$p_{vol} = \frac{RI^2}{V}$$

Remarque : une source interne traduit une conversion d'énergie, pas une création !

### 3.2. Bilan d'énergie interne :

On considère un cylindre de matériau solide d'axe Ox, de longueur L, section S (volume constant), de masse volumique  $\rho$  et de capacité calorifique massique C.

On suppose le problème unidimensionnel : les grandeurs ne dépendent que de x (et de t). Pour cela la barre doit être calorifugée latéralement : pas d'échange thermique sur la surface latérale.

L'énergie interne d'une masse m de solide s'écrit alors :



$$U(x,t) = m.c.T(x,t) + cte$$

Le système considéré est une masse  $dm$  de ce solide comprise entre  $x$  et  $x+ dx$  ; sa masse s'écrit :

$$dm = \rho.S.dx$$

et son énergie interne :

$$dU(x, t) = dm.c.T(x,t) + cte$$

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à cette tranche de section  $S$  perpendiculaire à  $Ox$  comprise entre  $x$  et  $x+ dx$  s'écrit entre  $t$  et  $t+ dt$  :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

ou plutôt :

$$d^2U = \delta^2W + \delta^2Q$$

car nous calculons la variation d'énergie interne d'un volume élémentaire pendant une durée élémentaire, donc c'est de l' « élémentaire au carré » !

La variation d'énergie interne entre  $t$  et  $t+dt$  est :

$$d^2U = dU(t+dt) - dU(t) = dm.c.(T(x,t+dt) - T(x,t)) = dm.c. \frac{\partial T}{\partial t} . dt$$

Le seul travail considéré étant celui des forces de pression, on a pour un solide :

$$\delta^2W = 0$$

Les transferts thermiques peuvent se faire :

- Par les « sources internes » : on a alors :

$$\delta^2Q_{interne} = p_{vol}.dV.dt$$

- par flux thermiques à travers les surfaces terminales :

$$\delta^2Q(x,t) = \Phi(x,t).dt - \Phi(x+dx,t) = - \frac{d\Phi}{dx} . dx . dt$$

avec :

$$\Phi = \iint \vec{j} . d\vec{S} = \iint j . dS = j . \iint dS = j . S$$

On obtient donc :

$$\rho C \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} + p_{vol}$$

Cette équation se généralise à trois dimensions :

$$\boxed{\rho C \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = - \text{div}(\vec{j}) + p_{vol}}$$

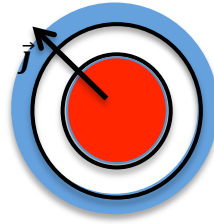
3.3. Cas du régime stationnaire avec  $p_{vol} = 0$  :

L'équation se réduit à :

$$\text{div}(\vec{j}) = 0 \Leftrightarrow \phi = cte .$$

**En régime stationnaire, si  $p_{vol} = 0$ , le flux thermique  $\phi$  se conserve.**

Exemple d'un système à symétrie cylindrique :



Si le système est assez long et possède la symétrie de révolution :

$$\vec{j} = j(r, t) \cdot \vec{u}_r$$

Le flux de  $\vec{j}$  à travers un cylindre de rayon r et de longueur L est donc :

$$\Phi = j(r,t) \cdot 2\pi \cdot r \cdot L$$

Ce flux étant constant on en déduit que la densité de flux  $j(r,t)$  est inversement proportionnelle à r.

Il est également possible d'exploiter un formulaire ; en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}(j(r, t) \cdot \vec{u}_r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot j)$$

donc :

$$\text{div}(j(r, t) \cdot \vec{u}_r) = 0 \Rightarrow r \cdot j = cte$$

**4. Loi de Fourier :**

Loi de Fourier ( phénoménologique ) :  $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$

$\lambda$  ( positive ) est la conductivité thermique, en  $W \cdot m^{-1} K^{-1}$ .

<http://www.youtube.com/watch?v=h0dgQRN9qeo>

Rappel : en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}T}(x, y, z, t) = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \vec{u}_z$$

Pour une répartition de température  $T(x,t)$  :

$$\vec{j} = -\lambda \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \vec{u}_x$$

Ordres de grandeurs :

	<b>Air</b>	Polystyrène expansé	<b>Eau</b>	Bois	Verre	<b>Béton</b>	<b>Acier</b>	Cuivre
$\lambda (Wm^{-1}K^{-1})$	<b>0,03</b>	0,004	<b>0,6</b>	0,3	0,5 à 2	<b>1</b>	<b>20</b>	400

Il y a analogie entre la loi de Fick, la loi de Fourier et la loi d'Ohm  $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E} = -\gamma \cdot \overrightarrow{\text{grad}(V)}$

## 5. Equation de la chaleur :

En injectant la loi de Fourier dans l'équation de conservation, on obtient :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \sigma$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p_{vol}}{\rho c}$$

Equation « de la chaleur »

Cette équation se généralise à trois dimensions sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C} \Delta T + \frac{p_{vol}}{\rho C}$$

Remarques :

- Cette équation est linéaire.
- Le fait que t ne puisse être remplacé par -t montre que la conduction est un phénomène irréversible.

Définition :  $D = \frac{\lambda}{\rho C}$  est appelé diffusivité. Unité :  $m^2 \cdot s^{-1}$ .

Soit L un ordre de grandeur des variations spatiales de T(x,t) et  $\tau$  un ordre de grandeur des variations temporelles de T(x,t).

On calcule en ordre de grandeurs littéraires :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T}{\tau} ; \Delta T \approx \frac{T}{L^2}$$

Si  $p_{vol} = 0$ , l'équation de la chaleur fournit :

$$L^2 = D \cdot \tau$$

Exemple en coordonnées sphériques :

On considère un solide à symétrie sphérique, compris entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ , avec  $T(R_1) = T_1$  et  $T(R_2) = T_2$ .

On a donc :

$$T = T(r, t)$$

En régime stationnaire, T ne dépend pas du temps, donc :

$$T = T(r)$$

Un formulaire donne :

$$\Delta T(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

On a donc :

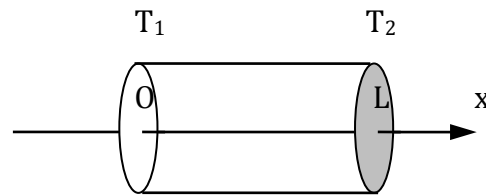
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = - \frac{p_{vol}}{\lambda}$$

## 6. Régime stationnaire sans sources internes : résistance thermique :

### 6.1. Modèle :

On considère un barreau d'axe Ox, homogène, de longueur L, section S et conductivité  $\lambda$  dont les deux extrémités sont maintenues aux températures  $T_1 > T_2$  et  $T_2$ .

On suppose  $p_{vol} = 0$  et le régime stationnaire.



On calcule alors :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} \cdot x$$

d'où :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{L} \cdot S$$

### 6.2. Résistance thermique :

**Définition :**  $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}}$  est la résistance thermique du barreau. Unité :  $K \cdot W^{-1}$ .

En géométrie cartésienne avec  $T = T(x)$ , on calcule :

$$R_{th} = L / \lambda S.$$

**Définition :** la conductance thermique est l'inverse de la résistance thermique du barreau :

$$G_{th} = 1/R_{th}$$

Unité :  $W \cdot K^{-1}$ .

### Associations de résistances :

Deux résistances thermiques sont dites en série si elles sont parcourues par le même flux thermique ; on a alors :

$$R_{equ} = R_1 + R_2$$

Deux résistances thermiques sont dites en parallèle si elles sont soumises au même gradient de température ; on a alors :

$$G_{equ} = G_1 + G_2$$

### 6.3. Analogie électricité-thermique :

La loi de Fourier est analogue à la loi d'Ohm locale :  $\vec{j} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}V}$ .

On a donc les analogies suivantes :

Potentiel V	-> Température T
Conductivité électrique $\sigma$	-> Conductivité thermique $\lambda$
Intensité i	-> Flux thermique $\phi$ .
Résistance électrique R	-> Résistance thermique $T_{th}$ .
Capacité C	-> Capacité thermique C

Remarque : les unités des grandeurs analogues sont strictement différentes.

## 7. Transfert conducto-convectif à l'interface entre un solide et un fluide :

On considère le transfert thermique d'un matériau solide dont la surface est à température  $T$  vers un fluide à son contact, à température  $T_f$ .

Le flux thermique élémentaire échangé par une surface élémentaire  $dS$  du matériau vers le fluide est donné par la loi phénoménologique :

$$d\Phi = h.(T - T_f).dS$$

Loi de Newton de la conducto-convection.

$h$  est le coefficient de convection en  $W.m^{-2}K^{-1}$  ; il dépend du matériau, du fluide et de sa vitesse.

Le transfert thermique élémentaire échangé pendant  $dt$  sur une surface  $dS$  est :

$$\delta^2Q = h(T - T_f).dS.dt$$

La résistance thermique d'un contact conducto-convectif est :  $R_{th} = 1/hS$ .

Exemple : barre droite non calorifugée en régime stationnaire sans sources internes :

On suppose toujours  $T = T(x)$  ; c'est maintenant une approximation.

On doit reprendre la démonstration de l'équation de conservation, pour tenir compte du transfert conducto-convectif.

Le système est toujours un élément de longueur  $dx$  du barreau, de rayon  $R$ .

La variation d'énergie interne entre  $t$  et  $t+dt$  est nulle en régime stationnaire.

$$d^2U = dU(t+dt) - dU(t) = 0.$$

Le seul travail considéré étant celui des forces de pression, on a toujours :

$$\delta^2W = 0$$

Les transferts thermiques sont à présent :

- Du à la conduction à travers les surfaces terminales :

$$\delta^2Q(x,t) = \Phi(x,t).dt - \Phi(x+dx,t) = -\frac{d\Phi}{dx}.dx.dt = -\frac{d(j.S_{term})}{dx}.dx.dt = -\frac{d(j)}{dx}.S_{term}.dx.dt$$

avec  $S_{term} = \pi R^2$

- Du à la conducto-convection sur la surface latérale :

$$\delta^2Q = -h(T - T_f).dS_{lat}.dt$$

avec  $dS_{lat} = 2\pi R.dx$

On obtient donc :

$$\frac{dj}{dx}. \pi R^2 - h(T - T_f). 2. \pi. R = 0$$

La loi de Fourier s'écrit :

$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

d'où :

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2}. R - 2. h(T - T_f) = 0$$