

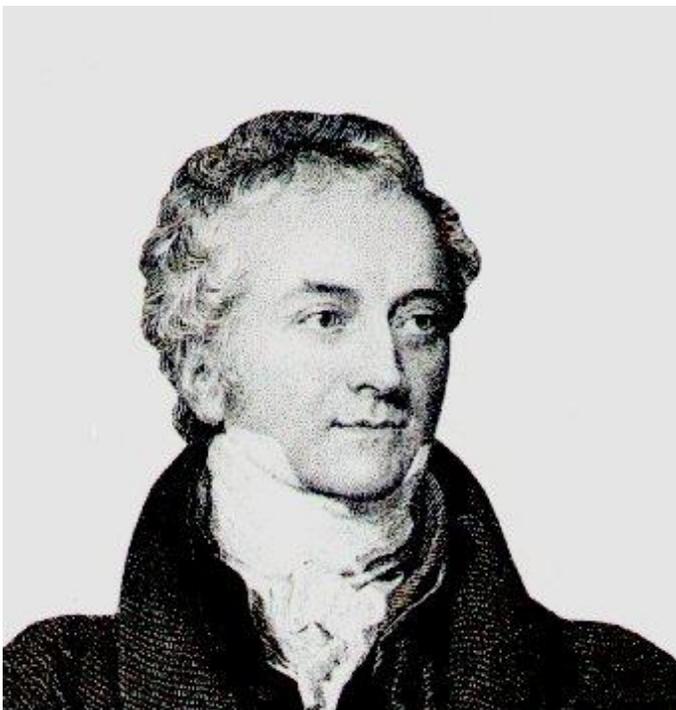
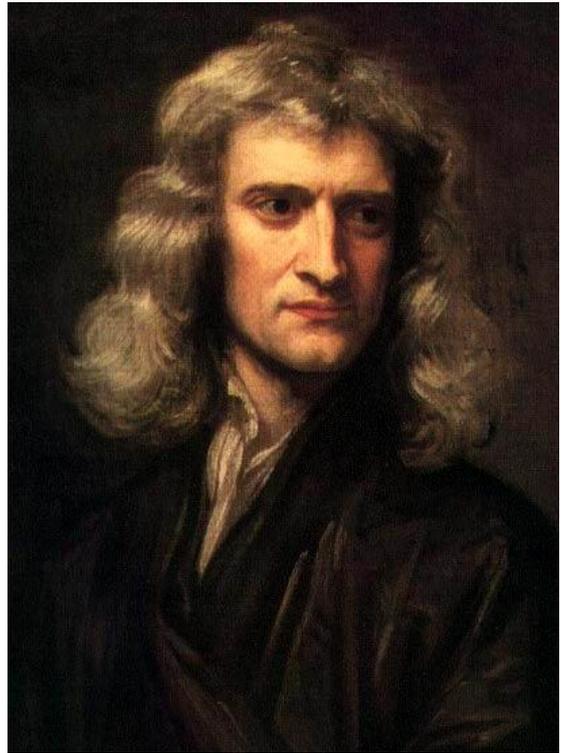
PC* 2012/2013

LYCEE SCHWEITZER MULHOUSE

OPTIQUE



1. Christian HUYGENS (1629-1695)
2. Sir Isaac NEWTON (1642 - 1727)
3. Thomas YOUNG (1773-1829)
4. Albert MICHELSON (1852-1931)



OPTIQUE GEOMETRIQUE- RESUME DES CONNAISSANCES DE PCSI

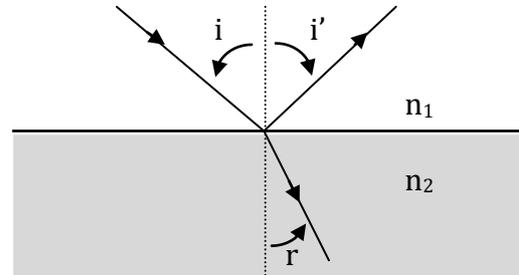
Les mots en italique dans le texte doivent pouvoir être définis précisément.

L'approximation de l'optique géométrique est valable tant que la dimension d des obstacles rencontrés par la lumière est grande devant la longueur d'onde, soit $d \gg \lambda$.

Dans cette approximation, un rayon lumineux est la limite d'un fin pinceau de lumière.

1. Lois de Descartes de la réflexion :

- a) Le rayon réfléchi est dans le *plan d'incidence* ;
- b) $i' = -i$.



2. Lois de Descartes de la réfraction :

- a) Le rayon réfracté est dans le *plan d'incidence* ;
- b) $n_1 \cdot \sin(i) = n_2 \cdot \sin(r)$

Angle limite :

Si $n_1 > n_2$, les rayons d'incidence $i > i_{\text{limite}} = \text{Arcsin}(n_2/n_1)$ subissent une *réflexion totale*.

3. Stigmatisme rigoureux :

Un système optique (S) est dit rigoureusement stigmatique pour un couple de points A et A' si tout rayon lumineux (ou son prolongement) passant par A passe par A' après traversée du système (S). A et A' sont conjugués à travers (S).

Approximation de Gauss :

Un système est utilisé dans les conditions de Gauss si :

- a) les rayons lumineux font un petit angle avec l'axe du système ;
- b) les rayons lumineux rencontrent les *dioptries* ou les *miroirs* au voisinage de leur sommet.

Dans ces conditions les systèmes centrés sont :

approximativement stigmatiques : l'image d'un point à travers le système est une tache de dimensions petites devant les dimensions mises en jeu dans l'approximation de Gauss ;

approximativement aplanétiques : l'image d'un petit objet perpendiculaire à l'axe optique d'un système (S) à travers (S) est perpendiculaire à l'axe.

4. Lentilles sphériques minces :

On distingue les lentilles convergentes $f' > 0$ et divergentes $f' < 0$.

Formules de conjugaison de position et de grandissement avec origine au *centre optique* :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \text{ avec } p = \overline{OA}, p' = \overline{OA'}, f' = \overline{OF'}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Formules de conjugaison de position et de grandissement avec origine au *foyers* :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{OF} \cdot \overline{OF'} = f \cdot f' = -f'^2$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

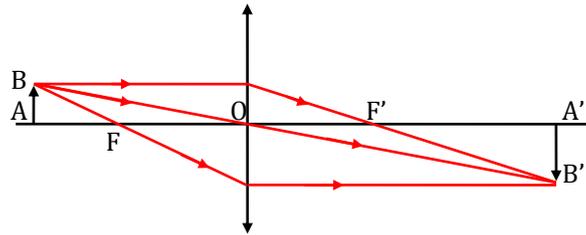
Remarque : ces formules se retrouvent facilement sur une construction.

Constructions :

Un rayon passant par le *centre optique* O n'est pas dévié.

Un rayon provenant de l'infini converge dans le *plan focal image* ; en particulier l'image d'un point à l'infini sur l'axe est au foyer image F'.

Un rayon issu d'un point du *plan focal objet* part à l'infini ; en particulier l'image du foyer objet F est à l'infini sur l'axe.

**5. Miroirs sphériques :**

On distingue les miroirs *convexe* et *concave*.

Formules de conjugaison de position et de grandissement avec origine au *sommet* :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

Les foyers objet et image sont confondus et situés au milieu du segment SC.

Formules de conjugaison de position et de grandissement avec origine au foyers :

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{FS}^2 = f^2$$

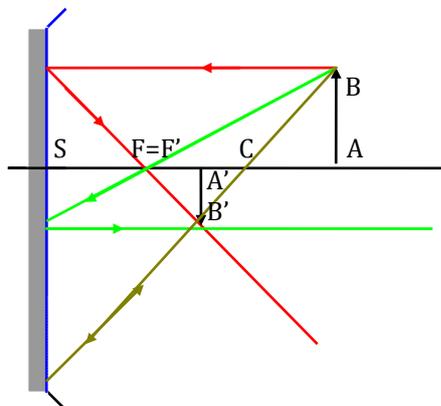
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

Constructions :

Un rayon passant par le *centre C du miroir* n'est pas dévié.

Un rayon provenant de l'infini converge dans le *plan focal image* ; en particulier l'image d'un point à l'infini sur l'axe est au foyer image F'.

Un rayon issu d'un point du *plan focal objet* part à l'infini ; en particulier l'image du foyer objet F est à l'infini sur l'axe.



Miroir plan :

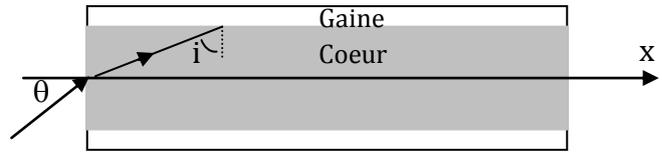
c'est un cas particulier du miroir sphérique avec $|\overline{SC}| \rightarrow \infty$.

OPTIQUE GEOMETRIQUE – EXERCICES DE REVISION

LOIS DE DESCARTES

1. Fibre optique à saut d'indice :

Une fibre optique cylindrique, placée dans l'air d'indice n_0 , est constituée d'un coeur cylindrique transparent d'axe Ox, de rayon R_1 et d'indice constant n_1 , entouré d'une gaine transparente d'indice constant $n_2 < n_1$.



Un rayon lumineux R monochromatique dans l'air atteint la face d'entrée de la fibre optique en son centre O, sous l'angle d'incidence θ . On donne $n_0 = 1,00$; $n_1 = 1,50$; $n_2 = 1,48$; $R_1 = 40 \mu\text{m}$.

a) A quelle condition sur l'angle i , angle d'incidence à l'interface coeur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du coeur ?

Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à une valeur limite θ_0 appelée angle d'acceptance qu'on exprimera en fonction de n_0 , n_1 et n_2 . AN.

b) On considère deux rayons passant par O ; l'un entre en incidence normale, l'autre avec l'incidence limite θ_0 . Calculer la différence Δt entre les durées des trajets de la lumière selon chacun de ces rayons sur une longueur L de fibre en fonction de c, n_0 , n_1 , n_2 et L. AN pour L = 1 km.

c) Quelle durée doit séparer deux impulsions successives pour qu'elles ne se superposent pas à la sortie de la fibre ? En déduire le débit limite de la ligne (en impulsions/seconde).

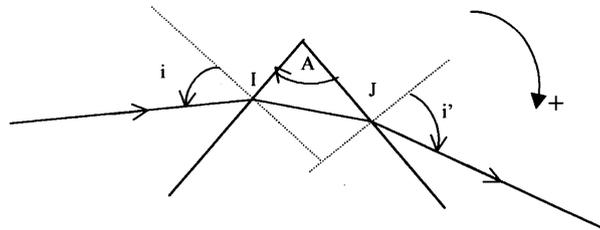
d) Quelle fibre est utilisée pour augmenter le débit ?

Réponses : $\theta_0 = \text{Arc sin}(n_1 \sqrt{2\Delta})$; $\Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1-2\Delta}} - 1 \right)$ avec $\Delta = \left| \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \right|$; $D_m = 20 \text{ Mbits/s}$.

2. Spectroscopie à prisme

On considère un prisme d'angle A, placé dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1.

Un rayon rencontre une face au point I sous l'angle d' incidence i et ressort par l'autre face au point J sous l'angle i' . On utilisera les angles orientés définis sur la figure.



a) Ecrire les lois de Descartes en I et J.

b) Calculer l'angle de déviation D.

c) Au minimum de déviation, on constate que le rayon traversant le prisme est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A. Déterminer la valeur i_0 de i correspondant au minimum de déviation en fonction de n et A. En déduire que l'on peut calculer n avec la relation :

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Réponses : $A_0 = 2 \text{Arcsin}(1/n)$; $D = i' - i - A$.

3. Eclairage au fond d'un bassin :

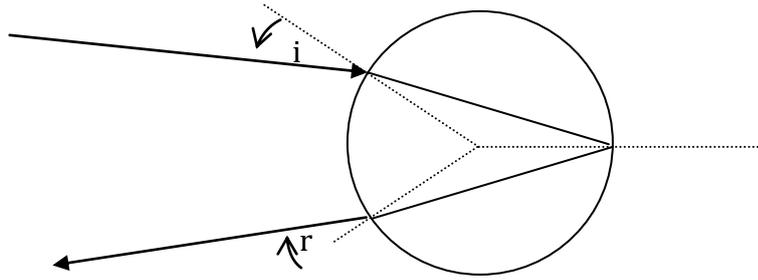
Soit un grand bassin rempli d'eau, d'indice $n_e = 4/3$, et de hauteur $h = 80 \text{ cm}$ surmonté par de l'air d'indice $n = 1$. Soit une source ponctuelle S sur le fond du bassin éclairant la surface libre sous un cône de lumière d'angle $\alpha = 120^\circ$ et d'axe vertical.

Décrire l'éclairage au fond du bassin.

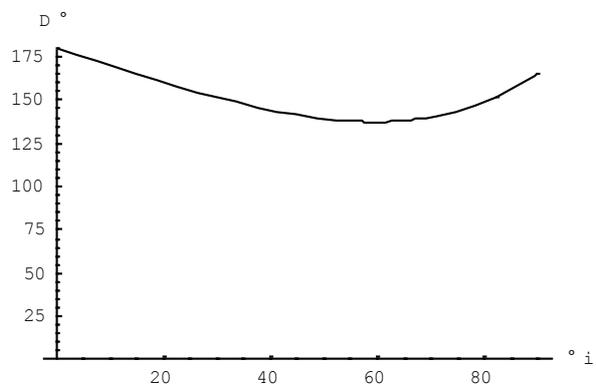
Réponse : cercle clair entre les rayons 1,8 m et 2,8 m.

4. Arc en ciel :

Un rayon pénètre dans une goutte d'eau, assimilée à une sphère homogène transparente d'indice $n = 4/3$. Après avoir subi une réflexion, il émerge dans l'air d'indice $n_0 = 1$.



- a) Définir et calculer la déviation D du rayon émergent par rapport au rayon incident en fonction de l'angle d'incidence i et de l'angle de réfraction r .
- b) Tracer (machine) D en fonction de i , et montrer que cette déviation passe par un extrémum. Justifier l'observation d'un arc-en-ciel dans la direction de cet extrémum.
- c) Lire sur le graphe (ou calculer) la déviation extrémale.



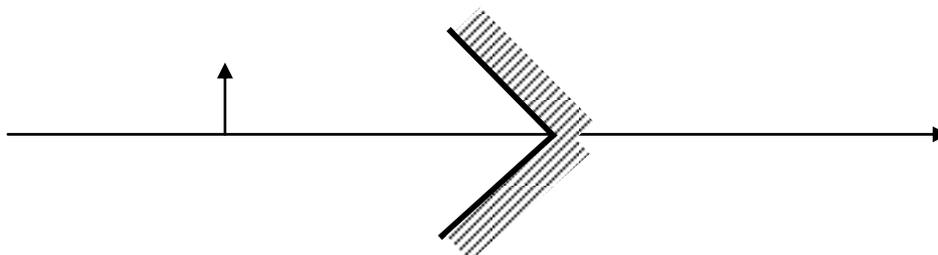
- d) Le soleil est à l'ouest, incliné de 10° au-dessus de l'horizon. De quel côté faut-il regarder pour observer un arc-en-ciel ? Faire un croquis montrant le soleil, l'observateur, et l'arc-en-ciel. Préciser sa hauteur angulaire maximale au-dessus de l'horizon.
 - e) Calculer l'ordre de grandeur $\delta\alpha$ de l'étalement angulaire de l'arc-en-ciel, sachant que pour les extrémités rouge et violette du spectre visible, l'indice n vaut respectivement 1,331 et 1,337. La partie extérieure de l'arc est-elle rouge ou violette ?
 - f) On peut parfois observer un second arc moins lumineux (photo). A quoi est-il du ?
- Réponses : a) $D = \pi + 2i - 4r$; c) $D = 137^\circ 58'$; e) $\delta\alpha = 0,8^\circ$.

5. Miroir plan :

a) Quelle taille minimale doit avoir un miroir plan pour qu'un homme de 1,80 m puisse s'y voir entièrement ?

Réponse : 0,90 m.

b) Construire l'image d'un objet dans un miroir dièdre dont l'angle au sommet vaut 90° . En quoi cette image diffère-t-elle de celle qui est obtenue dans un miroir plan ? Le miroir se trouve dans le coin d'une chambre. De quels endroits de la chambre peut-on y voir son image ?



6. Lecture d'un thermomètre :

Un cylindre de verre de rayon R et d'indice n reçoit un rayon lumineux situé dans un plan perpendiculaire à son axe.

Calculer la distance du rayon réfracté à l'axe du cylindre en fonction de l'angle d'incidence i .

En déduire l'aspect que présente à un observateur éloigné, un tube de thermomètre (tube cylindrique de rayon extérieur R , d'indice n , percé d'un canal central de rayon r) contenant du mercure, en fonction de r variant de 0 à R .

AN : $R = 3 \text{ mm}$ et $n = 1,5$; qu'observe-t-on :

pour $r = 1 \text{ mm}$;

pour $r = 2,5 \text{ mm}$.

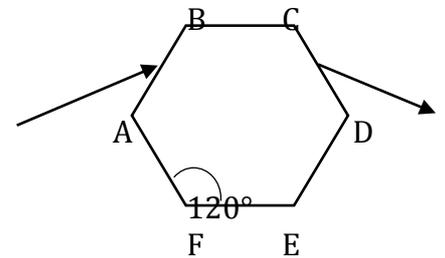
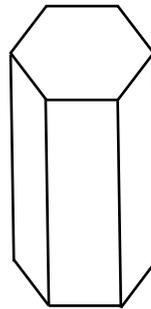
Réponses : a) $CH = R \cdot \sin i / n$; c) on voit un tube de mercure de diamètre $d = 3 \text{ mm}$; on voit un tube rempli de mercure de diamètre 6 mm .

7. Le petit halo (Mines-Ponts PSI 99) :

Les cirrus sont des nuages peu épais, à structure filamenteuse, composés de petits cristaux de glace en forme de bâtonnets cylindriques de section principale hexagonale régulière (figure).

Les plus petits de ces cristaux (par exemple de taille inférieure à 20 micromètres) sont le siège d'un mouvement erratique provoqué par le choc des molécules d'air sur eux ; de la sorte, ils ont toutes les orientations possibles dans l'espace. L'indice de la glace, n , est pris, dans tout le spectre visible, numériquement égal à 1,31.

1 - Montrer qu'un rayon lumineux entrant sous incidence quelconque sur une face d'un prisme d'angle au sommet $\hat{A} > 100^\circ$ et d'indice $n = 1,31$ ne peut pas émerger de l'autre face du prisme délimitant l'angle \hat{A} .



Soit l'hexagone régulier ABCDEF de la figure. On considère la réfraction simple de rayons incidents d'incidence variable, appartenant à un plan de section principale entre A et B (on ne tient pas compte de la réflexion interne).

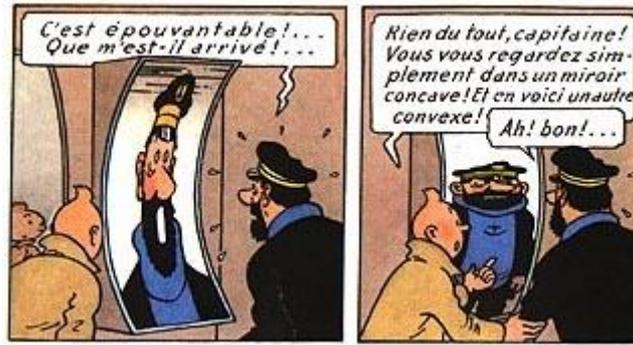
2 - Les rayons sortant par la face DE sont-ils déviés ? Peut-il y avoir émergence par la face BC ?

3 - Vérifier que le rayon entrant en AB sous l'incidence i et sortant par la face CD avec l'angle i' présente une déviation D minimale pour $i = i'$. L'observateur placé dans cette direction observera donc une accumulation de lumière, c'est-à-dire une *surintensité*. Calculer la valeur de l'angle i_0 correspondant au minimum de déviation et la déviation minimum D_m .

4 - On observe autour du Soleil un halo sur voile nuageux, se manifestant par une couronne brillante autour de l'astre (photo). Le calcul rend-il compte de l'observation ? le diamètre angulaire sous lequel le Soleil est vu de la Terre est de 30 minutes d'arc.



OPTIQUE GEOMETRIQUE – EXERCICES - LENTILLES ET MIROIRS



1. Projection à l'aide d'un miroir concave :

On dispose d'un miroir concave de rayon $R = 1$ m. Quelle est sa distance focale ?

Ce miroir est placé à la distance $D = 5$ m d'un écran E. Où doit-on mettre un petit objet pour en avoir une image nette sur E ? Quel est le grandissement ?

2. Projection à l'aide d'une lentille convergente :

On désire projeter l'image d'un petit objet AB sur un écran E, parallèle à AB, situé à la distance D de AB. On utilise pour cela une lentille mince convergente de centre O et de distance focale $f' > 0$.

Montrer que pour obtenir une image, f' doit être inférieur à une certaine valeur.

En supposant cette condition réalisée, montrer qu'il existe deux positions possibles de la lentille. En quoi diffèrent ces deux positions ?

AN : $f' = 30$ cm ; $D = 160$ cm.

Réponse : $f' \leq D/4$; $p_1 = -120$ cm ; $p_2 = -40$ cm.

3. Lentille divergente :

On considère une lentille mince divergente L de distance focale objet $f = 30$ cm. Soit O son sommet.

On place sur son axe un point objet A tel que $AO = 60$ cm. Déterminer la position et la nature du point A' image de A par une construction géométrique puis par le calcul.

On constitue un doublet à l'aide de deux lentilles identiques à L, placées sur le même axe et à une distance $e = 30$ cm l'une de l'autre. Déterminer les positions des foyers F et F' du doublet

Réponse : a) $p' = -20$ cm ; b) $O_1F = -O_2F' = 20$ cm.

4. Loupe :

Une loupe est constituée par une lentille mince très convergente, de distance focale $f' = 40$ mm et de centre O. L'œil de l'observateur, placé au foyer image F' de cette loupe, ne peut voir nettement à travers cette loupe que les images des objets situés entre deux positions A_1 et A_2 de l'axe.

On admettra que le PR de l'œil est à l'infini et que le PP est à 20 cm.

Calculer la latitude de mise au point $\Delta = A_1A_2$ de cette loupe.

Un petit objet AB à la distance p de la loupe est vu sous l'angle α à l'œil nu et sous l'angle α' à travers la loupe. Exprimer, en fonction de f' et p, la puissance $P = \alpha'/\alpha$ et le grossissement $G = \alpha'/\alpha$ de cette loupe.

On donne $AB = 200$ μm ; calculer α' . Entre quelles limites peut varier G lorsque l'œil accommode ?

Réponses : $\Delta = 8$ mm ; $P = 1/f'$; $G = 1 + p/f'$; $1,8 \leq G \leq 2,0$.

5. Lunette astronomique :

La lunette astronomique est un système afocal qui se compose d'un objectif modélisé par une lentille convergente L_1 de distance focale f'_1 et de diamètre D_1 et d'un oculaire modélisé par une lentille convergente L_2 de focale f'_2 .

Où se situe en général l'objet ? Pourquoi le système est-il afocal ? Montrer, à l'aide d'une figure que le grossissement G défini par $G = \theta'/\theta$ vaut $G = f'_1 / f'_2$ en valeur absolue.

Indication : on peut faire apparaître l'image intermédiaire A_1B_1 .

b) Montrer que le grossissement de la lunette vaut également $G = (A'B')_{\text{lunette}} / (A'B')_{\text{nu}}$

où $(A'B')_{\text{lunette}}$ est la dimension de l'image sur la rétine vue à travers la lunette et $(A'B')_{\text{nu}}$ la dimension de l'image vue à l'oeil nu, ie sans lunette, l'oeil étant assimilé à une lentille convergente observant sans accommodation.

c) On appelle cercle oculaire le cercle qui s'appuie sur le pourtour de la pupille de sortie, la pupille de sortie étant l'image donnée par l'instrument de la monture de l'objectif.

Soit d_{CO} le diamètre du cercle oculaire. Montrer que $G = d_1/d_{CO}$

6. Lunette de Galilée :

On fabrique une lunette en utilisant comme objectif une lentille convergente L_1 de focale f_1 , et comme oculaire une lentille L_2 de focale f_2 .

Comment placer les lentilles pour que le système soit afocal ?

On obtient une image droite avec cette lunette. La lentille L_2 doit-elle être divergente ou convergente ? Tracer la marche de rayons provenant de l'infini sous un angle non nul.

Calculer le grossissement. AN : $f_1 = 20 \text{ cm}$; $f_2 = -5 \text{ cm}$.

Réponses : $F'_1 = F_2$; $G = 4$.



7. Latitude de mise au point d'un microscope :

Un microscope est schématisé par deux lentilles minces convergentes de même axe optique : un objectif L_1 de distance focale $f_1 = 5 \text{ mm}$ et un oculaire L_2 de distance focale $f_2 = 25 \text{ mm}$.

Le foyer image F'_1 de l'objectif et le foyer objet F_2 de l'oculaire sont écartés de $l = 25 \text{ cm}$.

a) Un observateur, l'oeil placé au foyer image de l'oculaire, étudie un petit objet AB disposé dans un plan de front, A étant sur l'axe optique.

Où doit être situé A pour que l'oeil effectue l'observation sans accommoder ?

Représenter la marche d'un pinceau lumineux étroit issu du point B .

b) Soit α' l'angle sous lequel l'oeil voit l'image définitive de AB à travers le microscope et α l'angle sous lequel il apercevrait l'objet sans se déplacer en l'absence du microscope.

Calculer $G = \alpha'/\alpha$.

c) En accommodant, l'oeil peut observer nettement un objet situé à une distance comprise entre 25 cm et l'infini.

De quelle distance δ (latitude de mise au point) peut-on modifier la distance entre l'objectif et l'oculaire si l'on veut toujours pouvoir observer nettement l'objet AB à travers le microscope ?

Réponses : $F_1A = -0,1 \text{ mm}$; $f' = -0,5 \text{ mm}$; $G = 620$; $\delta = 1 \mu\text{m}$.

8. Viseur (ENAC 05) :

a) On dispose un objet $\overline{A_0B_0}$ orthogonalement à l'axe optique d'une lentille *divergente* L_1 de distance focale image $f_1 = -20 \text{ cm}$. Quelle doit être la valeur $\overline{O_1A_0}$ de la position de l'objet par rapport au centre optique O_1 de L_1 pour que le grandissement transversal G_t soit égal à $1/2$?

b) Quelle est alors la position $\overline{O_1A_i}$ de l'image $\overline{A_iB_i}$ par rapport à O_1 ?

On place après L_1 un viseur constitué d'une lentille *convergente* L_2 , de même axe optique que L_1 , de distance focale image $f_2 = 40 \text{ cm}$ et d'un écran E disposé orthogonalement à l'axe optique à une distance $\overline{O_2E} = 80 \text{ cm}$ du centre optique O_2 de L_2 . Calculer la distance $\overline{O_1O_2}$ entre les centres optiques des lentilles L_1 et L_2 pour que l'on observe sur l'écran une image nette de l'objet

c) On désire utiliser le système optique constitué par l'association de la lentille L_1 suivie de la lentille L_2 , pour transformer un faisceau cylindrique de rayons parallèles à l'axe optique et de diamètre d à l'entrée du système, en un faisceau cylindrique de rayons parallèles à l'axe optique et de diamètre D à la sortie du système. Calculer la distance $\overline{O_1O_2}$ qui permet de réaliser un tel système.

d) Calculer le rapport $\frac{D}{d}$ des diamètres.

CHAPITRE 1 : NATURE ONDULATOIRE DE LA LUMIERE

La lumière est une **onde** électromagnétique propageant des champs \vec{E} et \vec{B} , dépendant du temps et du point M de l'espace atteint par cette onde, soit $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

Les équations fondamentales de l'électromagnétisme - équations de Maxwell - qui régissent la variation des champs étant **linéaires**, ces champs obéissent au principe de **superposition**, et leurs composantes s'ajoutent scalairement ; on ne parlera dorénavant que des composantes susceptibles de s'additionner, qu'on notera $s(M,t)$.

On ne considérera dans la suite que des milieux diélectriques homogènes et isotropes, pour lesquels $n = \text{cte}$, n étant l'indice du milieu tel que $n = c_0/c$.

$c_0 = 299792458 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité d'une onde ém dans le vide.

Dans les milieux homogènes et isotropes la lumière se propage en ligne droite.

1. Processus d'émission de la lumière par les sources :

1.1. Signal émis par une source :

Quelle que soit la source considérée, l'émission est un phénomène complexe : la lumière est émise de manière discontinue, par « paquets » successifs appelés **trains d'onde**.

On peut modéliser l'émission d'une source monochromatique par une suite de portions de sinusoides de pulsation égale à la pulsation de la source, et dont la phase varie aléatoirement.

Le signal monochromatique émis à t par une source S monochromatique s'écrit alors :

$$E(S,t) = E_0 \cdot \cos(\omega t - \phi(S,t))$$

où ω est la **pulsation** et $\phi(S,t)$ une fonction aléatoire du temps.

Pour des signaux optiques visibles, ω est de l'ordre de

Pour une source polychromatique, l'analyse de Fourier permet de décomposer le signal en une superposition (somme, discrète ou continue) de signaux monochromatiques.

1.2. Cohérence temporelle.

La durée moyenne d'un train d'onde est appelé temps de cohérence et noté τ .

La longueur parcourue dans le vide pendant τ , soit

$L = c_0 \cdot \tau$, est la longueur de cohérence de la source.

Ordres de grandeurs :

lampe spectrale : $\tau \approx 10^{-12} \text{ s}$; $L \approx 0,1 \text{ mm}$;

Laser $\tau \approx 10^{-9} \text{ s}$; $L \approx 30 \text{ cm}$.

Plus le temps de cohérence est long, plus la source est dite cohérente temporellement.

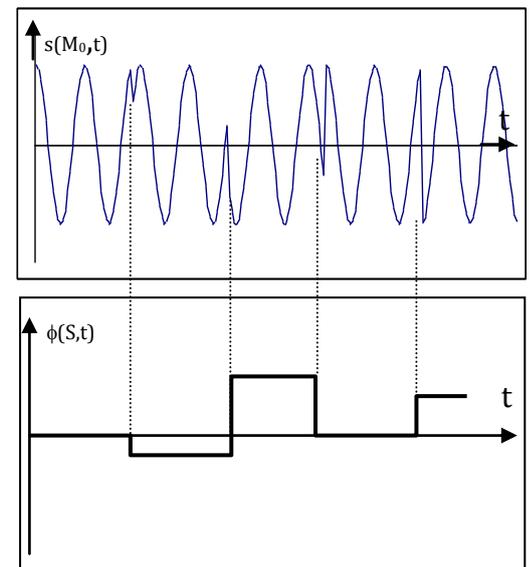
Remarque : seule une source infiniment cohérente serait strictement monochromatique ; la largeur spectrale en longueur d'onde de la source est donc non nulle ; la largeur en fréquence est liée au temps de cohérence par la relation :

$$\Delta\nu \cdot \tau \approx 1$$

Il est ainsi impossible de réaliser un signal strictement monochromatique.

1.3. Cohérence spatiale :

Elle est liée à la taille de la source, dont les différents émettent simultanément des trains d'onde de même pulsation mais de phases quelconques.



2. Chemin optique ; surface d'onde ; théorème de Malus :

2.1. Amplitude du signal reçu en un point M :

Un signal émis à t par une source S monochromatique s'écrit :

$$s(S, t) = s_0 \cdot \cos(\omega t - \phi(S, t))$$

A cause de la propagation, en un point M de l'espace, le signal perçu à l'instant t a été émis à un instant antérieur t' , avec $t' = t - t_p$.

Il s'écrit :

$$s(M, t) = s(S, t') = s_0 \cdot \cos(\omega(t - t_p) - \phi(S, t - t_p))$$

On a d'après le cours d'électromagnétisme :

$$\omega \cdot t_p = \vec{k} \cdot \vec{SM} \text{ pour une onde plane de vecteur d'onde } \vec{k}.$$

Pour un trajet de cette onde plane du point S au point M , on a donc :

$$\vec{k} \cdot \vec{SM} = n \cdot \frac{\omega}{c_0} \cdot SM$$

2.2. Chemin optique :

Dans l'approximation de l'optique géométrique, la lumière se propage le long d'un rayon lumineux.

Déf : Le chemin optique d'un point A à un point B est défini par

$$L = (AB) = \int_A^B n \cdot ds$$

calculé le long d'un rayon lumineux reliant A à B .

Interprétation physique : $L = \int c_0 \cdot ds / c = c_0 \int dt$: le chemin optique (AB) mesure la durée mise par la lumière pour aller de A à B .

$$\text{On a donc } \vec{k} \cdot \vec{SM} = \frac{\omega}{c_0} (SM) = \frac{2\pi}{c_0 \cdot T} (SM) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM).$$

où $\lambda_0 = c_0 T$ est la longueur d'onde dans le vide de l'onde considérée.

Cette forme se généralise au cas où le trajet de S à M n'est pas rectiligne, mais formé d'une suite de segments.

On peut donc écrire : **$s(M, t) = s_0 \cdot \cos(\omega t - 2\pi (SM) / \lambda_0 - \phi(S, t'))$.**

Définition : Une surface d'onde est l'ensemble des points M tels que $(SM) = cte$, S étant un point source ; à t donné ces points sont dans un même état vibratoire.

Cette définition généralise la notion de plan d'onde.

Exemples :

- pour une source ponctuelle S , les surfaces d'ondes sont des sphères centrées sur S ;
- pour une onde plane, les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires à \vec{k} .

Théorème de Malus (admis) : les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.

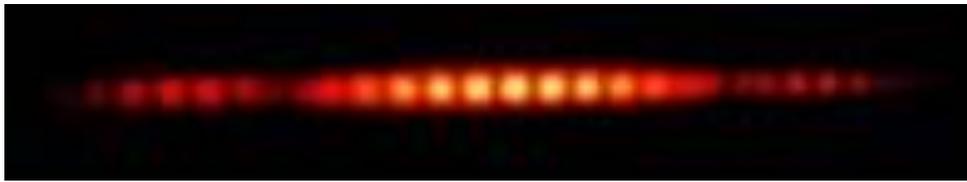
On admettra également la propriété suivante : **un système est stigmatique pour le couple de points (A, A') si le chemin optique (AA') est constant, quel que soit le rayon lumineux suivi.**

CHAPITRE 2 : INTERFERENCES A DEUX ONDES

Définition : il y a interférences lorsque l'intensité résultante d'un phénomène n'est pas égale à la somme des intensités qui le composent.

Ici, lumière + lumière = obscurité.

Remarque : tous les types d'ondes peuvent donner lieu à des interférences (ex :cuve à eau).



1. Eclairement :

1.1. Définition :

Soit une vibration monochromatique $s(M,t) = s_0 \cdot \cos(\omega t - \phi(M,t))$.

Les récepteurs courants (œil, photodiode..) ne sont pas sensibles à $s(M,t)$, mais à son carré.

Définition : Eclairement instantané $E_{inst}(M,t) = s^2(M,t)$.

Les récepteurs courants, ayant des temps de réponse très grands devant la période de la vibration lumineuse, ne seront sensibles qu'à la moyenne temporelle de E_{inst} , moyennée sur une période T_r du récepteur (œil $T_r \approx 0,1$ s).

On ne parlera donc plus dans la suite que de l'éclairement moyenné qu'on notera $E(M)$:

Définition: $E(M) = \frac{1}{T_r} \int E(M,t) \cdot dt = \langle E(M,t) \rangle_{T_r}$

On a par exemple pour la vibration $s(M,t)$ précédente :

$$E(M) = s_0^2/2.$$

Notation complexe : $\underline{s}(M,t) = s_0 \cdot \exp(j(\omega t - \phi(M)))$ avec $s(M,t) = \text{Re}[\underline{s}(M,t)]$.

On a alors $E(M) = \langle \underline{s} \cdot \underline{s}^* \rangle / 2$.

Remarque : l'éclairement énergétique ou intensité énergétique d'un rayonnement est définie par $I = dP/dS$, où dP est la puissance traversant une surface dS normale à la direction de propagation du rayonnement ; elle s'exprime donc en $W \cdot m^{-2}$.

1.2. Eclairement du à deux sources :

Soit deux sources S_1 et S_2 émettant deux vibrations :

$$\underline{s}_1(S_1,t) = s_1 \cdot \exp(j(\omega_1 t - \phi_1(S_1,t)))$$

$$\underline{s}_2(S_2,t) = s_2 \cdot \exp(j(\omega_2 t - \phi_2(S_2,t)))$$

On observe en un point M l'éclairement du à la superposition des deux vibrations :

$$\underline{s}_1(M,t) = s_1 \cdot \exp(j(\omega_1 t - 2\pi(S_1M)/\lambda_1 - \phi_1(S_1,t-t_{p1})))$$

$$\underline{s}_2(M,t) = s_2 \cdot \exp(j(\omega_2 t - 2\pi(S_2M)/\lambda_2 - \phi_2(S_2,t-t_{p2})))$$

$$E(M,t) = \langle (\underline{s}_1 + \underline{s}_2) (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)^* \rangle / 2$$

On calcule : $E(M,t) = s_1^2/2 + s_2^2/2 + s_1 s_2 \langle \cos[(\omega_2 - \omega_1)t - (\phi_2(M) - \phi_1(M))] \rangle$

Soit :

$$\boxed{E(M,t) = E_1 + E_2 + 2 \sqrt{E_1 E_2} \langle \cos[(\omega_2 - \omega_1)t - (\phi_2(M,t) - \phi_1(M,t))] \rangle}$$

avec $\phi_2(M,t) - \phi_1(M,t) = \phi_2(S_2,t-t_{p2}) - \phi_1(S_1,t-t_{p1}) + 2\pi(S_2M)/\lambda_2 - 2\pi(S_1M)/\lambda_1$.

C'est le troisième terme qui est à l'origine des interférences :

lorsque ce terme est nul, on a $E = E_1 + E_2$: les ondes sont **décorrélées**, ou **incohérentes** ; on n'observe pas d'interférences ;

lorsque ce terme est non-nul, les ondes sont **corrélées**, ou **cohérentes**.

2. Conditions d'obtention des interférences :

2.1. Approximation scalaire de l'optique :

Nous avons jusqu'à présent toujours sommé des amplitudes scalairement, ce qui suppose que les deux champs superposés en M ont des composantes parallèles ; cela sera le cas :

- si les champs ont même polarisation ;
- ou si leur polarisation est aléatoire, mais que les directions de propagation des deux ondes sont proches.

2.2. Nécessité d'une seule source :

Si $\omega_2 - \omega_1 \neq 0$, $\langle \cos [(\omega_2 - \omega_1)t - (\phi_2(M,t) - \phi_1(M,t))] \rangle = 0$: pas d'interférences.

Si $\omega_2 - \omega_1 = 0$, $\langle \cos [(\omega_2 - \omega_1)t - (\phi_2(M,t) - \phi_1(M,t))] \rangle = \langle \cos [\phi_2(M,t) - \phi_1(M,t)] \rangle$

$= \langle \cos [\phi_2(S_2, t - t_{p2}) - \phi_1(S_1, t - t_{p1}) + 2\pi (S_2M)/\lambda - 2\pi (S_1M)/\lambda] \rangle$ car $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$.

Si S_1 et S_2 sont deux sources différentes, leur relation de phase est quelconque et le terme d'interférences est encore **nul**.

Conclusion : pour obtenir des interférences, on doit utiliser une seule source S, qu'on dédouble.

Les deux ondes suivent donc des trajets différents entre S et M, et l'on notera :

$$(S_2M) = (SM)_2 \text{ et } (S_1M) = (SM)_1.$$

Définition : $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$ est la différence de marche au point M.

2.3. Influence de la cohérence temporelle de la source :

$\langle \cos [\phi_2(S_2, t - t_{p2}) - \phi_1(S_1, t - t_{p1}) + 2\pi (S_2M)/\lambda - 2\pi (S_1M)/\lambda] \rangle = \langle \cos [\phi_2(S, t - t_{p2}) - \phi_1(S, t - t_{p1}) + 2\pi \delta/\lambda] \rangle$.

avec $t_{p1} = (SM)_1 / c_0$ et $t_{p2} = (SM)_2 / c_0$

Si les instants $t - t_{p1}$ et $t - t_{p2}$ appartiennent à un même train d'onde, alors $\phi_1(S, t - t_{p1}) = \phi_2(S, t - t_{p2})$.

Il faut pour cela que $|t_{p2} - t_{p1}| < \tau$, soit :

$$|\delta| < c_0\tau.$$

Dans le cas contraire, les deux ondes proviennent de deux trains d'onde différents ; $\phi_1(S, t - t_{p1}) - \phi_2(S, t - t_{p2})$ est alors quelconque et le terme d'interférences est nul ; on n'observe pas d'interférences en M.

La source n'est pas assez cohérente temporellement.

2.4. Influence de la cohérence spatiale de la source :

Si l'on élargit la source, que l'on considère comme la superposition de sources ponctuelles élémentaires, chaque source élémentaire va donner en M son propre éclaircissement.

Or les sources élémentaires étant incohérentes, tous les éclaircissements vont s'ajouter ; les franges se brouillent.

La source n'est pas assez **cohérente spatialement**.

2.5. Résumé :

Pour observer les interférences on doit donc avoir :

- des champs de même polarisation, ou de directions de propagation proches ;
- une source unique qu'on dédouble ;
- une bonne cohérence temporelle de la source assurant $\delta < c \cdot \tau$;
- une bonne cohérence spatiale.

On a alors
$$E(M) = E_1 + E_2 + 2 \sqrt{E_1 E_2} \cdot \cos(2\pi \delta(M)/\lambda)$$

Cette formule est toujours valable pour des interférences entre deux sources ponctuelles cohérentes de même pulsation ; seule la forme de $\delta(M)$ varie selon le dispositif interférentiel.

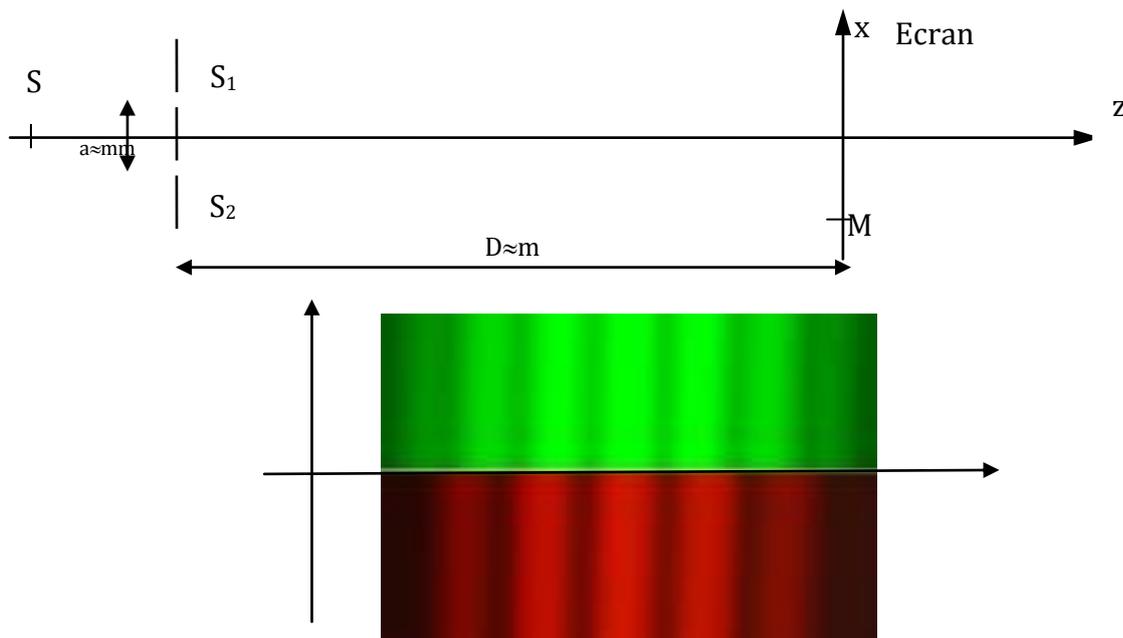
3. Figure d'interférences : exemple des trous et fentes d'Young.

3.1. Description du dispositif d'observation des franges :

Le dispositif des trous d'Young est dit à **division du front d'onde** ; les deux trous - identiques - séparent le faisceau incident en donnant naissance à deux rayons émergents.

Les sources S_1 et S_2 dites **sources secondaires**, sont cohérentes, car $\phi(S_1, t) = \phi(S_2, t)$ pour tout t .

Les interférences sont observables dans toute la zone où les rayons lumineux issus de S_1 et S_2 se superposent ; cette zone est le **champ d'interférences**. Ici cette zone est un volume : on dit que les interférences sont **délocalisées**.



En lumière quasi-monochromatique (laser ou lampe polychromatique + filtre coloré):

- on observe des franges rectilignes équidistantes parallèles à la direction des double-fentes ;
- leur hauteur n'est limitée que par la fente source et les deux fentes ;
- le champ d'interférences est étroit.
- l'écran peut être déplacé ; on voit toujours les franges.
- la visibilité dépend de la largeur de la fente source ; si on ouvre celle-ci les interférences se brouillent.

En lumière blanche :

- on observe une frange centrale blanche et des franges irisées de part et d'autre ;
- le champ d'interférences est plus étroit ($\approx cm$).

3.2. Différence de marche en un point M de l'écran d'observation

Ici $\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (S_2M) - (S_1M)$ car $(SS_1) = (SS_2)$.

Coordonnées : M(x, y, 0) S₁(-a/2, 0, -D) S₂(a/2, 0, -D) avec x,y << D et a << D.

On a donc : $\delta = n\sqrt{(x - a/2)^2 + y^2 + D^2} - n\sqrt{(x + a/2)^2 + y^2 + D^2}$ où n est l'indice du milieu.

On calcule, au second ordre en a / D : **$\delta = n a x / D$** .

3.3. Eclairement ; ordre d'interférences :

En un point M de l'écran d'observation on a donc :

$$E(M) = E_1 + E_2 + 2 \sqrt{E_1 E_2} \cos[2 \pi \delta / \lambda]$$

Soit, puisque $E_1 = E_2 = E_0$ par symétrie :

$$E(x) = 2E_0 (1 + \cos (2\pi n a x / \lambda_0 D)).$$

Définition : on appelle frange d'interférences un domaine d'éclairement constant.

Ici, les franges sont donc sur l'écran des droites $x = \text{cte}$, elles sont donc **rectilignes** parallèles à Oy. On peut en conséquence remplacer les deux trous d'Young par deux fentes parallèles à Oy ; la figure sera plus lumineuse.

L'éclairement varie entre 0 (**franges sombres** ou noires) et $4 E_0$ (**franges claires** ou brillantes).

Définition : l'ordre d'interférences est défini par **$p = \delta / \lambda$** .

Les franges claires correspondent à p entier, les franges sombres à p demi-entier.

Définition : l'interfrange i est la distance séparant deux franges consécutives de même nature.

C'est la période spatiale de la fonction E(x), soit : **$i = \lambda D / n a$** .

Définition : la visibilité (ou contraste) des franges au voisinage d'un point M est :

$$V(M) = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}$$

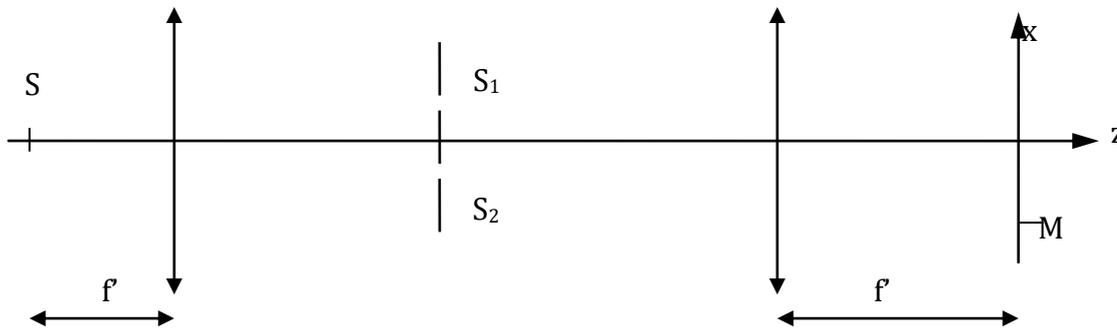
La visibilité est comprise entre 0 et 1.

Exercice : dans le cas général, exprimer V(M) en fonction de montrer que V(M) est maximale pour $E_1 = E_2$.

3.4.Utilisation de lentilles.

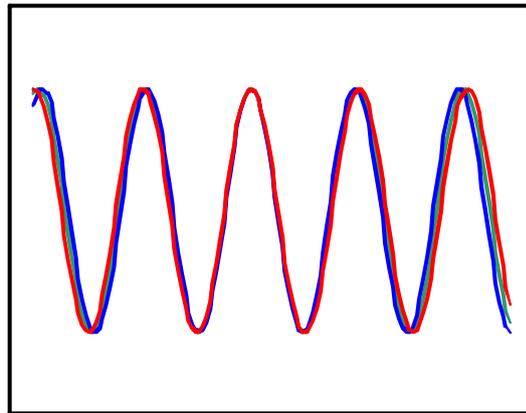
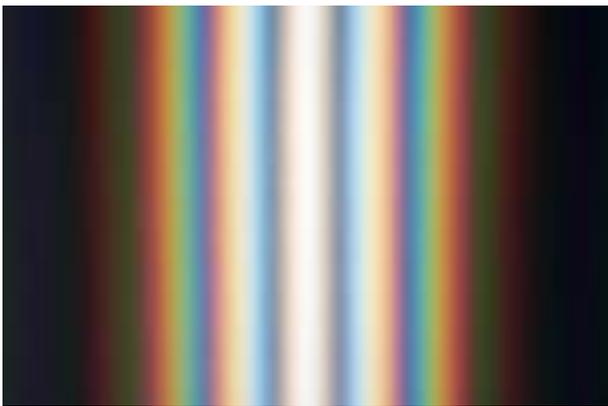
Pour travailler avec des ondes planes, on peut utiliser des lentilles, permettant de rejeter la source à l'infini.

La différence de marche vaut ici : $\delta = n a x / f$.



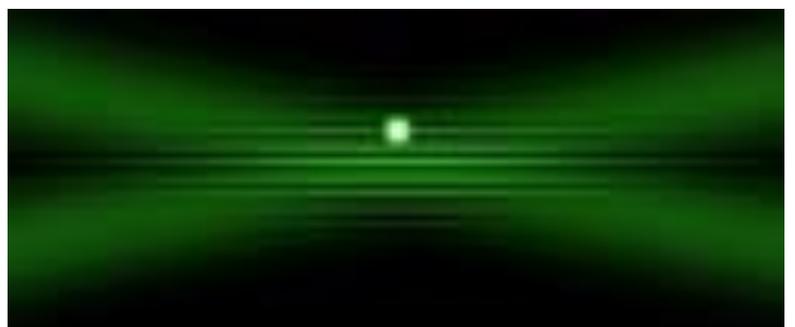
3.5.Observation en lumière blanche.

Les différentes fréquences du spectre sont **incohérentes** ; chaque fréquence donne son propre système de franges, et les éclaircissements dus à chaque fréquence vont simplement s'additionner.



Pour $x = 0$, toutes fréquences interfèrent constructivement ; on recompose donc la couleur de la source initiale, ici blanche ; cette frange centrale est dite **achromatique**.

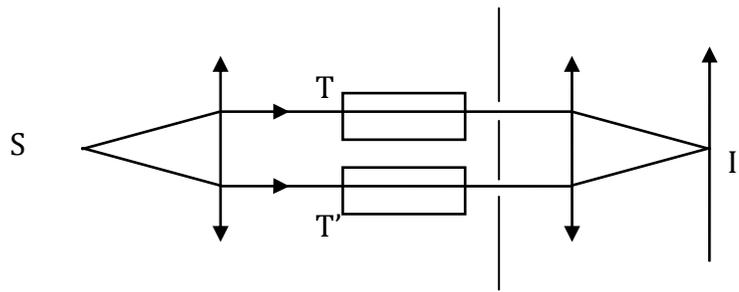
Figure : mesure de la vitesse d'une particule (ici une goutte d'huile) par vélocimétrie laser.



INTERFERENCES – EXERCICES

1. Interféromètre de Rayleigh ; indice de l'air :

L'interféromètre de Rayleigh, dérivé du dispositif d'Young, est représenté ci-contre. Lorsque les tubes T et T' sont remplis d'air dans les conditions normales, le montage est symétrique et l'on observe une frange brillante au centre I de l'écran.



La source S émet la radiation $\lambda = 577 \text{ nm}$, la longueur commune des tubes est $l = 0,2 \text{ m}$.

T' étant toujours rempli d'air, on fait progressivement le vide dans T.

a) Dans quel sens défilent les franges en I ?

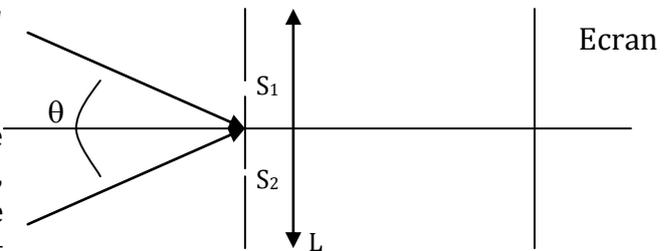
b) Pendant le pompage, 101 franges brillantes défilent en I et, lorsque la pression dans T est quasi-nulle, on observe en I une frange sombre. En déduire l'indice de l'air dans les conditions normales.

Réponse : $n = 1,000293$.

2. Interféromètre stellaire de Michelson et Fizeau.

On place devant l'objectif d'un télescope de focale $f' = 41,45 \text{ m}$, un écran percé de deux trous S_1 et S_2 distants de a . On est dans l'air ($n=1$).

On observe avec cet instrument une étoile double dont les composantes S_1 et S_2 , de même intensité, émettent une vibration quasi-monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$. Le diamètre apparent de l'étoile double est θ . Les deux étoiles émettent de manière incohérente.



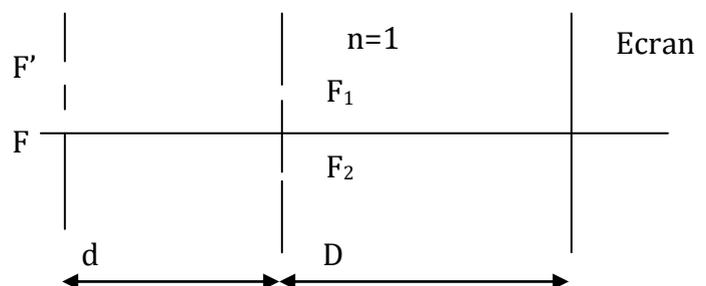
a) Quelle est l'éclairement E due à l'étoile S_1 en un point M du plan focal du télescope ? Même question pour l'éclairement E' du à l'étoile S_2 . Quelle est l'intensité totale en M ?

b) On constate, en augmentant a à partir de zéro, que l'éclairement devient uniforme pour la valeur a_1 . Montrer qu'il est possible d'en déduire θ . Calculer sa valeur minimale, sachant que la distance a peut atteindre la valeur $6,1 \text{ m}$ à l'aide d'un système à quatre miroirs.

Réponses : $I = 4I_0 (1 + \cos(\pi a \theta / \lambda) \cdot \cos(2\pi a x / \lambda f'))$; $\theta = 0,009''$.

3. Interférences dues à deux trous sources ; cohérence spatiale

On considère un dispositif de fentes d'Young sans lentille ; les deux fentes d'Young F_1 et F_2 sont distantes de a . Elles sont éclairées en lumière monochromatique par deux fentes source F et F' incohérentes et distantes de b , qui leur sont parallèles et qui sont situées dans un plan E à la distance d de celui des sources. Un écran est placé à la distance D du plan des fentes, et l'on a $D, d \gg a$.



Décrire les phénomènes observés et donner l'expression de l'éclairement sur l'écran si :

- seule la fente F éclaire ;
- seule la fente F' éclaire ;
- les deux fentes F et F' éclairent.

Dans ce dernier cas, à quelle condition sur b l'éclairement de l'écran est-il uniforme ?

AN : $a = 2 \text{ mm}$; $d = 1,20 \text{ m}$; $\lambda = 600 \text{ nm}$; $D = 5 \text{ m}$.

4. Cohérence spatiale :

On réalise une expérience d'interférences avec des trous d'Young. La source est une fente de largeur $2b$ dont l'axe est dans le plan médiateur des deux trous. Elle est située à la distance d du plan des deux trous distants de $2a$.

On observe le phénomène sur un écran placé à la distance D du plan des trous.

La lumière, monochromatique, a pour longueur d'onde λ . Une largeur dy_s de la source émet l'intensité $dI = f_0^2 dy_s$, et on suppose que les différents points de la source émettent de façon incohérente.

a) Exprimer l'éclairement en tout point de l'écran.

b) Quelle est la condition sur b pour que les franges soient visibles ?

AN : $d = 10 \text{ cm}$; $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$; $a = 1 \text{ mm}$.

5. Interférences utilisant une lentille (exercice difficile) :

On réalise une expérience d'interférences avec deux fentes d'Young très fines distantes de a et éclairées sous incidence normale par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ .

On place derrière le plan des fentes une lentille de distance focale f' .

Déterminer l'interfrange i sur un écran placé :

- à une distance $d = f'$ de la lentille ;
- à une distance $d = 2f'$ de la lentille.

6. Interférences dues à une goutte d'eau (CCP PC 05):

Il est possible dans un arc-en-ciel d'observer un phénomène d'interférences responsable d'arcs dits "surnuméraires". On considère (figure) un rayon incident sur une goutte d'eau, et le cas d'une seule réflexion partielle à l'intérieur de la goutte d'eau.

Justifier que les plans (P_1) et (P_2) tangents à la sphère sont des plans d'onde.

Calculer le chemin optique entre ces deux plans en fonction de n , i , r et R .

On considère deux rayons incidents parallèles arrivant sur la goutte d'eau avec deux incidences caractérisées par les angles i_1 et i_2 . Montrer que, pour obtenir une même déviation D pour ces deux rayons, il faut que la différence des angles d'incidence $i_2 - i_1$ soit proportionnelle à la différence des angles de réfraction correspondants $r_2 - r_1$. Déterminer la constante de proportionnalité.

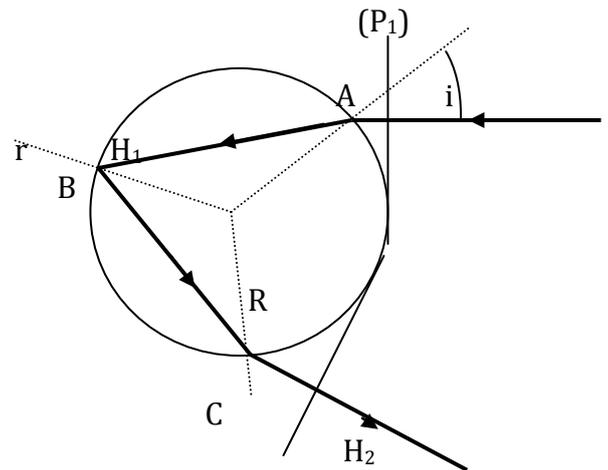
Quelle doit être la différence de marche entre ces deux rayons pour qu'ils donnent une interférence constructive ?

e) Dans le cadre d'une expérience ayant permis de visualiser la frange d'interférences d'ordre 2, des calculs effectués à l'ordinateur ont donné $i_2 = 67,98^\circ$ et $i_1 = 50,13^\circ$ avec une radiation rouge pour laquelle l'indice est égal à $n = 1,3317$. Vérifier la condition du (c).

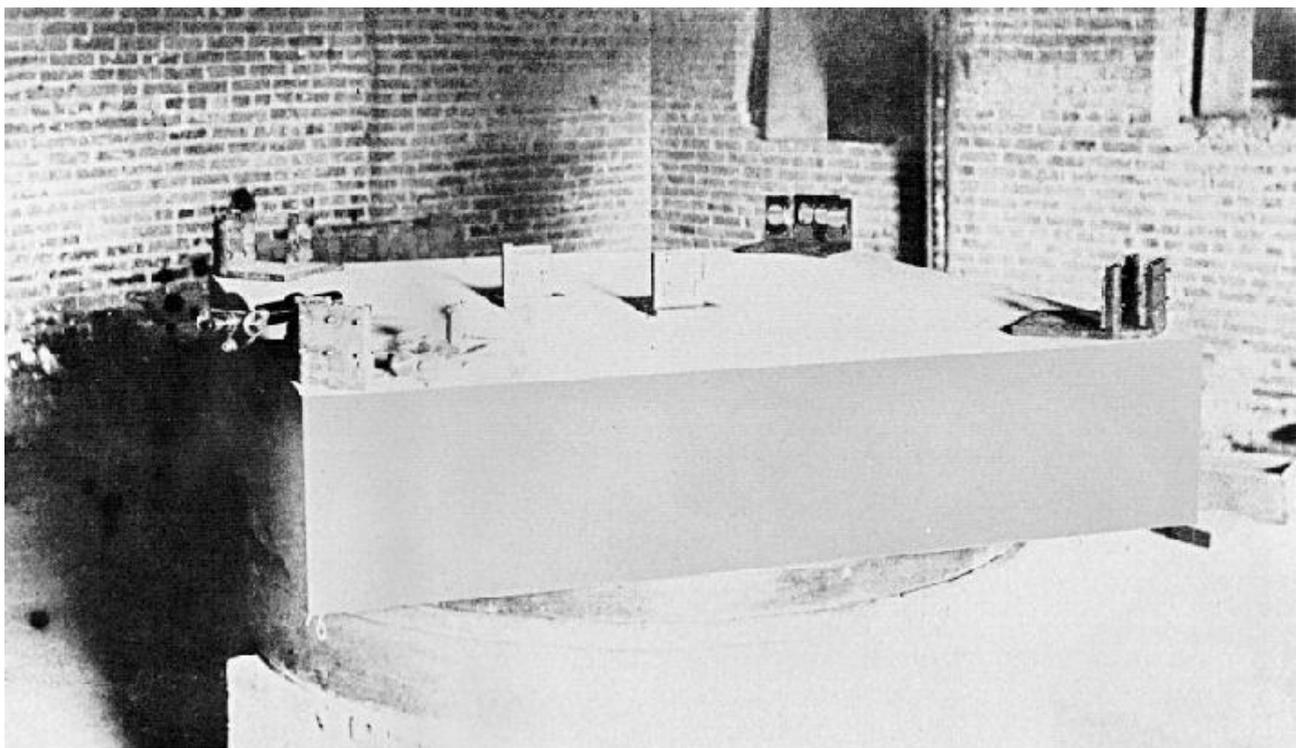
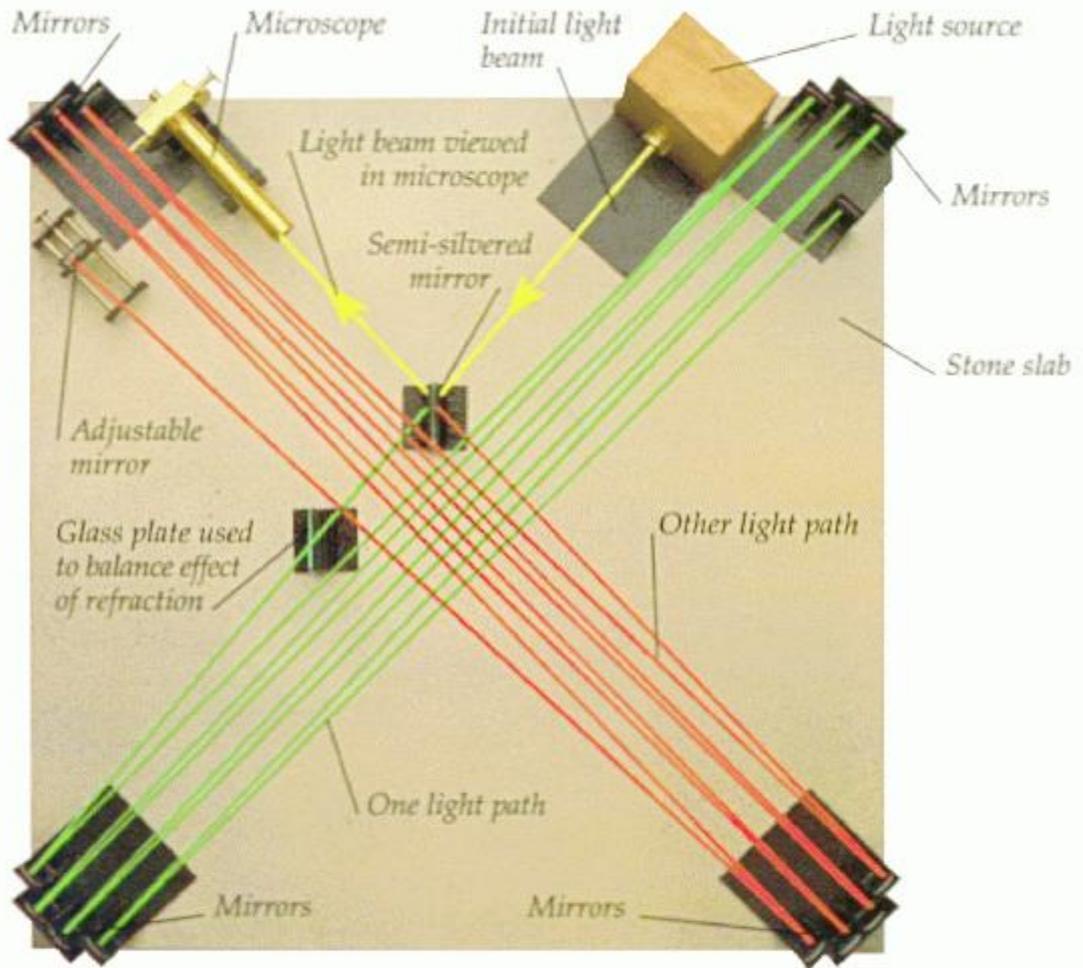
f) Où est localisée cette frange pour un observateur du phénomène situé à grande distance ?

Sachant que la longueur d'onde utilisée est $\lambda = 0,75 \mu\text{m}$ en déduire le diamètre d'une goutte d .

Réponses : $[H_1H_2 -+ 2R (1 - \cos(i))]$; $R = 0,51 \text{ mm}$.



L'interféromètre de Michelson et Morley (le vrai !)



CHAPITRE 3 : INTERFEROMETRE DE MICHELSON

Cet interféromètre, à division d'amplitude, a été inventé par Michelson et Morley en 1887, pour mettre en évidence le mouvement de translation de la Terre dans l'espace. L'expérience fut un échec, mais la théorie de la relativité d'Einstein, postulant l'invariance de la célérité de la lumière, en fit une réussite !

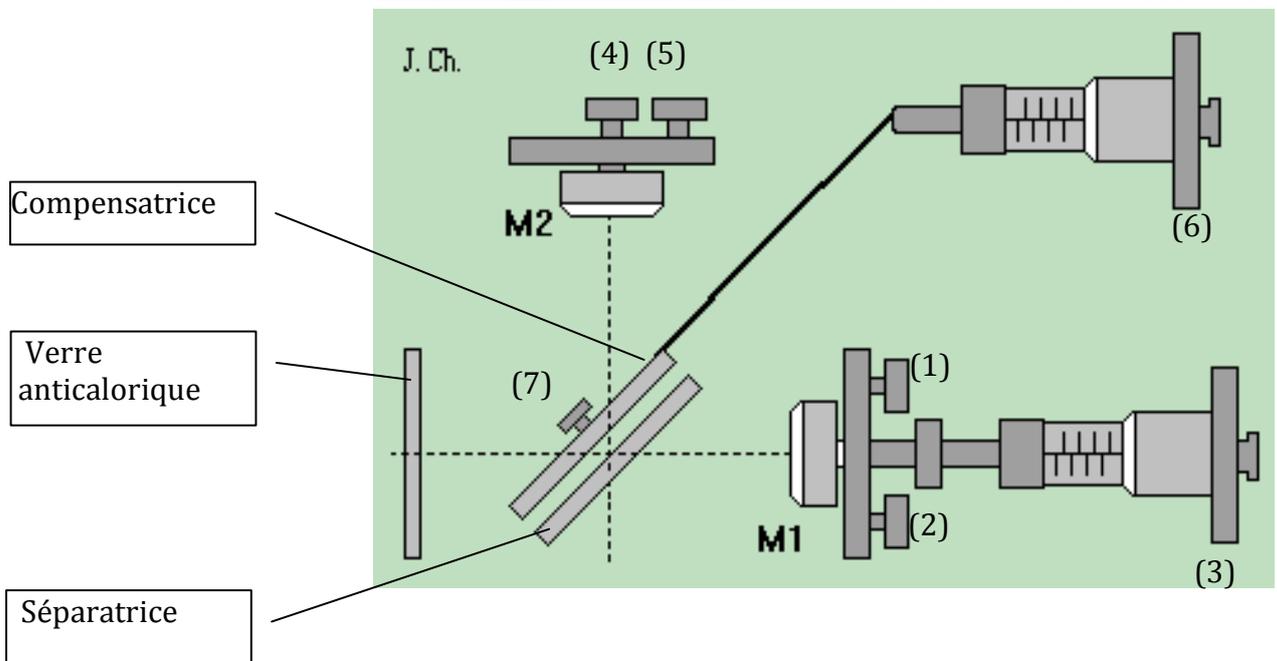
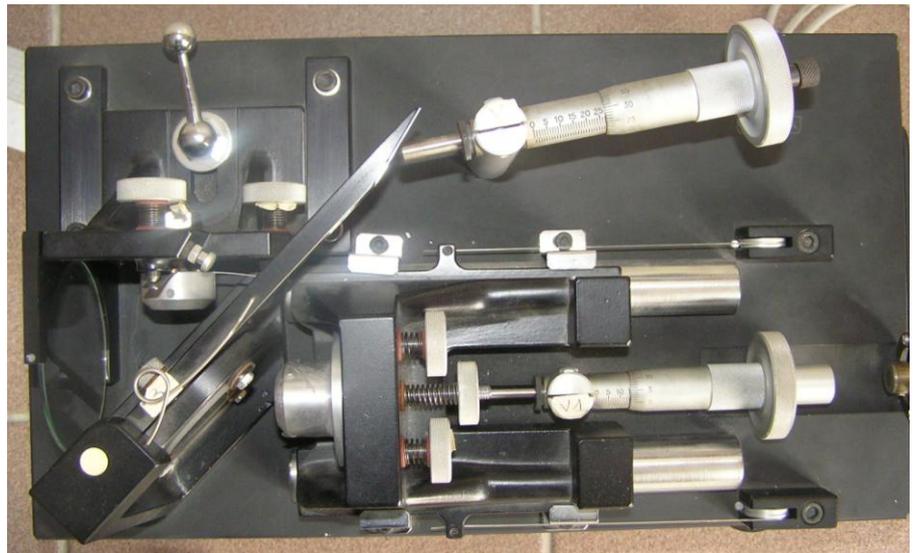
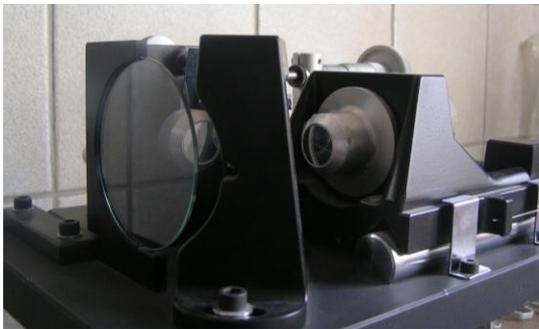
Cet interféromètre est encore très utilisé en métrologie.

On l'utilise actuellement pour tenter de détecter les ondes gravitationnelles (projet Virgo).

1. Description de l'interféromètre .

Interféromètre réel :

L'interféromètre réel est schématisé sur la figure 1, vu de dessus.



On distingue :

* trois lames : **anticalorique**, **séparatrice** (SP) et **compensatrice** (C), dont le rôle sera vu plus loin.

* deux **miroirs** (M_1) et (M_2) ;

* différentes vis de réglage :

(1) et (2) : vis de rotation rapide ;

(4) et (5) : vis de rotation lente, appuyant sur des languettes ;

(3) : **vis de chariotage** de (M_1) en translation suivant OX ;

(6) et (7) : réglage en rotation de la compensatrice.

C'est un appareil précis, couteux et très délicat ; on le manipulera avec le plus grand soin, en évitant toujours de toucher les parties optiques (verres et miroirs).

1.2. Modélisation :

L'interféromètre théorique est représenté sur la **figure 2**.

Il est constitué de deux miroirs parfaitement réfléchissants (M_1) et (M_2) grossièrement perpendiculaires ; l'angle qu'ils forment est $\pi/2 + \alpha$ avec α de l'ordre de quelques minutes d'angles.

La région $X < 0$ est l'**entrée** de l'interféromètre ; on y place la source. La région $Y < 0$ est la **sortie** : on y observe les interférences.

Dans le trièdre $OXYZ$, (M_1) coupe l'axe des X en O_1 , du côté des X positifs et (M_2) coupe celui des Y en O_2 , du côté des Y positifs.

On note $OO_1 = X_1$ et $OO_2 = Y_2$; ce sont les **bras** de l'interféromètre.

La différence $e_{12} = X_1 - Y_2$ est donc algébrique.

(M_1) est grossièrement perpendiculaire à OX et (M_2) à OY , à quelques minutes d'angle près.

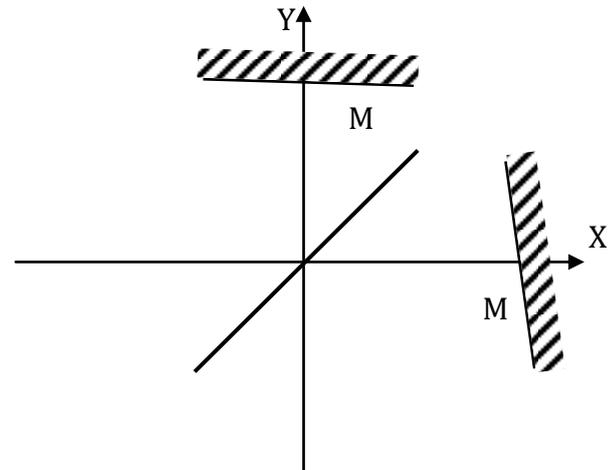


Figure 2

La séparatrice (SP) est une **lame semi-réfléchissante** assimilée à une surface plane sans épaisseur d'équation $X = Y$: un rayon incident y est divisé en deux rayons de même amplitude.

Un faisceau lumineux peut s'y réfléchir et le traverser : l'interféromètre de Michelson est dit à **division d'amplitude**.

En conséquence, les rayons émergent en sortie de l'interféromètre ont **même amplitude**.

Le tout baigne dans l'air d'indice pris égal à 1.

2. Equivalence Michelson théorique-lame d'air :

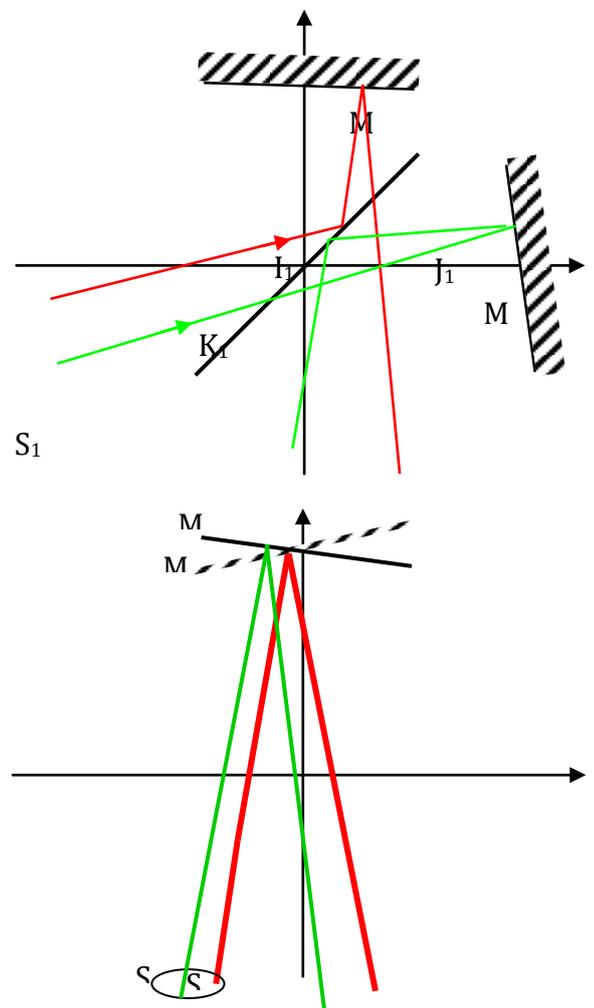
Considérons la marche de deux rayons lumineux issus de l'entrée et émergent en sortie après avoir subi une seule réflexion sur (M_1) ou (M_2) (figure 2').

Considérons le rayon issu de S_1 du point de vue du chemin optique, ce chemin est inchangé si l'on replie S_1K_1 autour de (SP) ; la source devient virtuelle, cependant on continue de la nommer S_1 .

De plus, si l'on replie $K_1J_1I_1 + (M_1)$ vers le haut autour de (SP) ; on constate que (M_1) se replie en (M'_1) , image de (M_1) par rapport à (SP) , et que J_1 se replie en J'_1 .

Considérons le rayon issu de S_2 : du point de vue du chemin optique, cette figure est inchangée si l'on replie S_2K_2 autour de (SP) .

La figure 2 est donc équivalente à la figure 3 pour ce qui concerne les chemins optiques des rayons.



Le Michelson théorique est équivalent à une lame d'air constituée des deux plans théoriques (M'_1) et (M_2) se coupant éventuellement à distance finie suivant la droite ou arête (A) en formant un dièdre d'angle α .

3. Eclairage par une source ponctuelle; sources secondaires :

Cette lame est éclairée par une source quasi-ponctuelle S (voir figure 4).

Un point M à la sortie de l'interféromètre peut être atteint par deux émergents : celui réfléchi par (M'_1) venant de S émerge de M'_1 en passant nécessairement par S'_1 , image de S à travers (M'_1) ; celui réfléchi sur (M_2) venant de S émerge de M_2 en passant nécessairement par S'_2 , image de S à travers (M_2) .

Il n'y a donc que deux émergents issus de S et aboutissant en M.

De plus par symétrie $SI_2M - SI'_1M = S'_2M - S'_1M$.

Les rayons issus de S et interférant en M semblent provenir de S'_1 et S'_2 appelés sources secondaires ; on peut donc remplacer la totalité du Michelson théorique - éclairé par une source ponctuelle - par les deux points S'_1 et S'_2 émettant en phase.

Au point M on observe donc des interférences entre ces deux rayons ; l'éclairement en M est donné par :

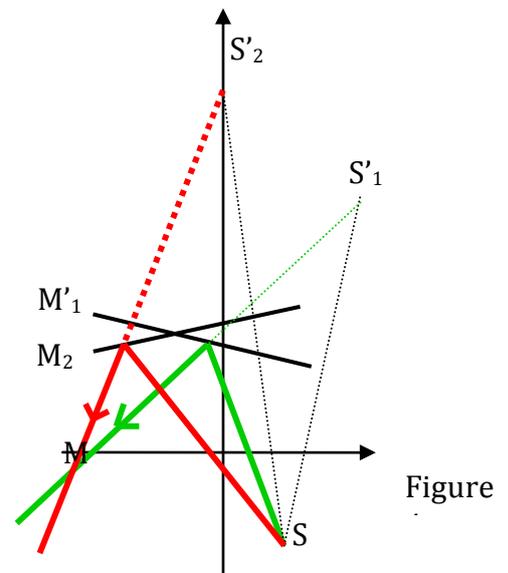
$$E(M) = 2E_0 (1 + \cos(2\pi\delta(M) / \lambda))$$

où $\delta(M)$ est la différence de marche en M :

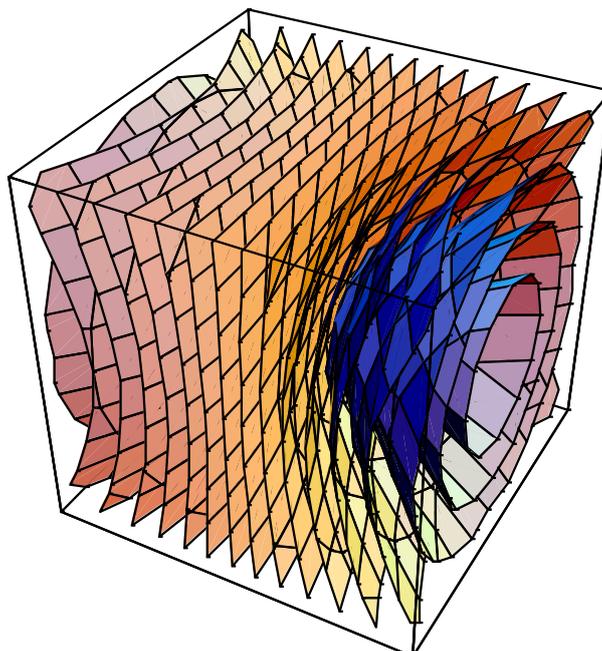
$$\delta(M) = S'_2M - S'_1M$$

Tout point M pouvant être atteint par deux rayons issus de S'_1 et S'_2 , le système d'interférences n'est **pas localisé**.

Les franges d'interférences sont les lieux équi- δ ; il s'agit d'une famille d'hyperboloïdes de révolution autour de l'axe $S'_1S'_2$.



Figure



4. Utilisation de l'interféromètre en lame d'air à faces parallèles (ou « aux anneaux ») :

Les miroirs sont strictement perpendiculaires ; l'angle dièdre α est donc nul : le Michelson est monté en **lame d'air à faces parallèles** ; l'épaisseur e_{12} non-nulle est constante et sera notée e .

4.1. Eclairage par une source ponctuelle :

Avec une source ponctuelle à distance finie, les franges d'interférences sont des hyperboloïdes de révolution, non localisées, centrées sur l'axe $S'_1S'_2$.

On observe en général en sortie de l'interféromètre, sur un écran perpendiculaire à $S'_1S'_2$: les franges observées sont donc des cercles.

Remarque : le système admet une symétrie de révolution.

4.2. Eclairage avec une source étendue :

Une source étendue est une source « large » ; on gagne naturellement en luminosité,

mais on constate expérimentalement qu'avec une source étendue, les franges ne sont plus observables à distance finie, car la source n'est plus assez cohérente spatialement.

Théorème de localisation : la surface de localisation des franges est l'ensemble des points M intersection de deux émergents issus d'un même incident primitif, provenant donc du même point S de la source. (démonstration en annexe)

Avec une source étendue à distance finie, le point M où se rencontrent deux rayons issus d'un même rayon incident est à l'infini ; les interférences sont donc **localisées à l'infini**.

On utilise donc une lentille en sortie de l'interféromètre, les franges étant observables dans le plan focal, ou bien on observe à quelques mètres.

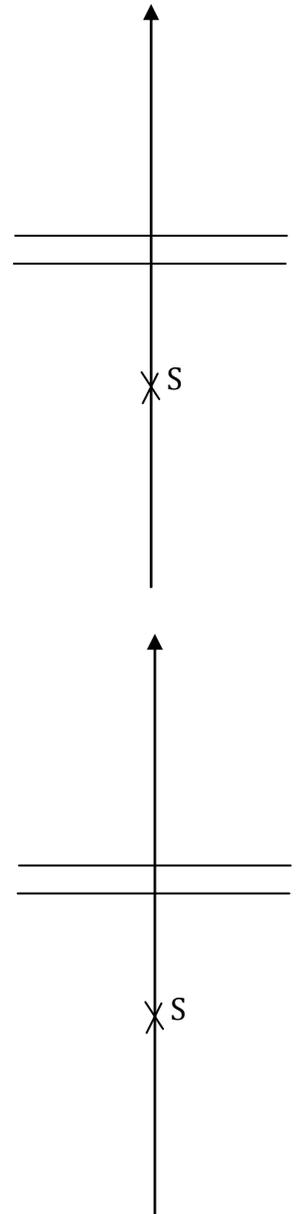
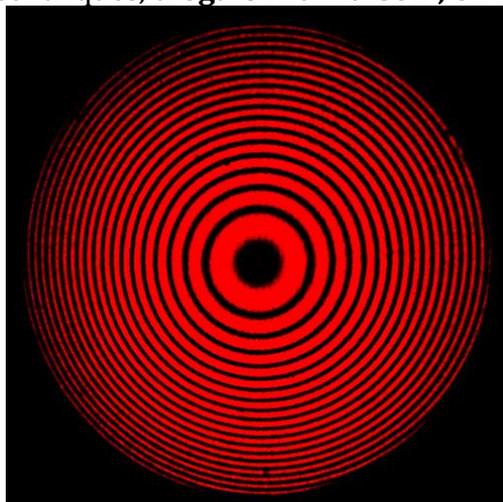
4.3 Différence de marche :

La distance de S'_1 à S'_2 étant $2e$, on a ici :

$$\delta (M) = 2e \cos i.$$

Tous les rayons tombant sur l'interféromètre avec la même incidence i vont donc donner la même différence de marche, et contribuer à la même frange.

Les franges sont circulaires, concentriques, **d'égale inclinaison** ; on les appelle « anneaux ».



4.4. Rayons des anneaux :

On observe dans le plan focal image d'une lentille (L).

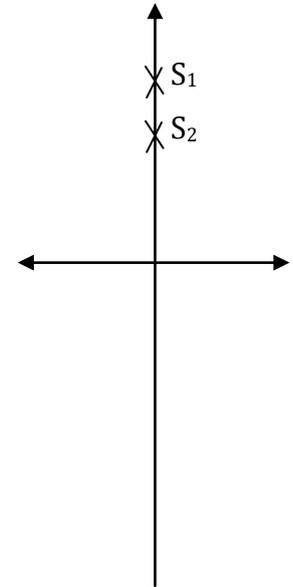
Supposons l'ordre au centre entier, soit p_0 : on a $\delta(0) = 2e = p_0\lambda$ (1)

L'ordre d'interférences du premier anneau brillant est : $p_1 = p_0 - 1$.

L'ordre d'interférences du $k^{\text{ième}}$ anneau brillant est : $p_k = p_0 - k$.

On a donc $2e \cos i_k = p_k \lambda$ avec i_k petit donc $\cos i_k = 1 - i_k^2 / 2$ au second ordre (2)
 (1) - (2) donne $i_k^2 = k\lambda / e$.

Le rayon dans le plan focal est $r_k = f \tan i_k \approx f i_k$ soit $r_k = f \sqrt{\frac{k\lambda}{e}}$



4.5. Cas particulier : contact optique :

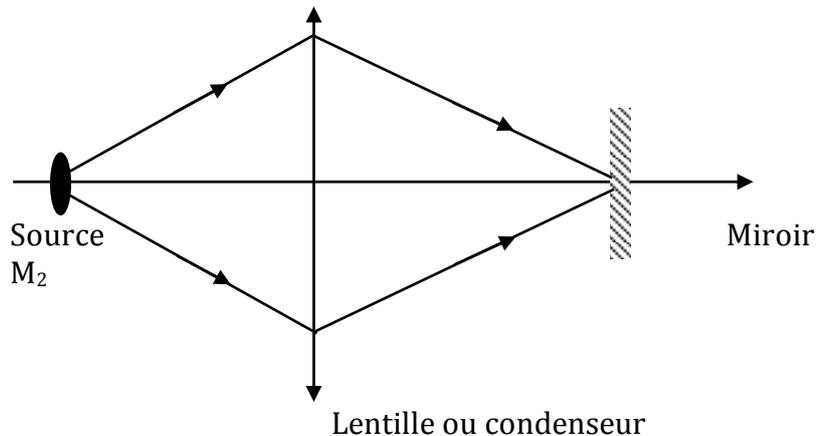
Si (M'_1) et (M_2) coïncident, c.à.d $\alpha = 0$ et $e = 0$; on dit qu'il y a **contact optique** entre les deux miroirs du Michelson ; la différence de marche est toujours nulle ; on observe sur l'écran une teinte uniforme.

4.6. Conditions d'éclairage :

En entrée, on utilise une source large, placée à distance finie de l'interféromètre.

Afin d'observer le maximum d'anneaux, il faut que le faisceau soit le plus convergent possible ; on utilise une lentille de courte focale ou un condenseur, afin de faire converger le faisceau sur le miroir M_2 .

Rappel : la source peut ici être placée à une distance quelconque de la source, à condition que la distance source-miroir soit supérieure à $4f$, ou f est la focale de la lentille d'entrée.



En sortie, on place une lentille convergente à une distance quelconque de la sortie de l'interféromètre, et l'on place un écran (ou un dépoli) pour observer les franges dans le plan focal image de cette lentille de sortie.

5. Utilisation au coin d'air :

L'angle dièdre α et e_{12} sont "faibles" : les miroirs M'_1 et M_2 forment un coin d'air d'arête (A), le Michelson est dit au **coin d'air**.

5.1. Source ponctuelle à distance finie :

Dans un plan parallèle au miroir M'_1 , c.à.d quasiment parallèle à $S'_1S'_2$ on observe des franges ayant la forme de portion d'hyperboles, quasi-rectilignes .

5.2. Source étendue :

On observe expérimentalement que les interférences ne sont plus observables dans tout l'espace, mais seulement au voisinage du coin d'air.

Toujours d'après le théorème de localisation, on considère un rayon incident donnant naissance à deux émergents.

Si le rayon incident est normal à l'un des miroirs, les franges sont localisées sur l'autre miroir.

Si l'incidence est quelconque, les franges restent localisées au voisinage du coin d'air.

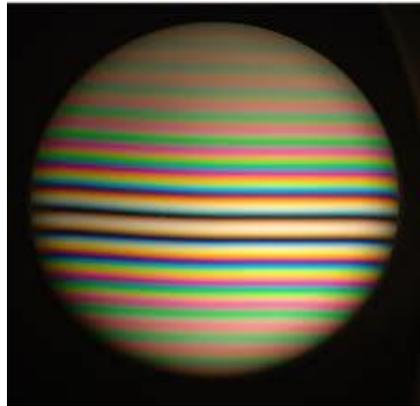


5.3. Différence de marche :

On a :

$$\delta (M) = 2 e (M) \text{ où } e (M) \text{ est l'épaisseur locale du coin d'air.}$$

Les franges sont donc **rectilignes, d'égale épaisseur**, leur direction signalant la direction de l'arête diédrique.



L'interfrange vaut $i = \lambda / (2 \sin \alpha) \approx \lambda / (2 \alpha)$

Remarque : les franges ne sont visibles avec un bon contraste que dans les zones où $\delta (M)$ n'excède pas la longueur des trains d'onde émis par la source, soit $\delta (M) < L = c \tau$; cela confine les franges au voisinage de l'arête du coin d'air.

5.4. Condition d'éclairage et d'observation des franges :

Les miroirs sont éclairés en incidence quasi-normale ; on place donc la source au foyer objet d'une lentille convergente (focale courte en général) ; ceci peut se faire par autocollimation sur le miroir M_2 .

On place en sortie une lentille convergente de focale f' quelconque, dont la position doit être réglée de manière à former l'image du coin d'air sur l'écran.

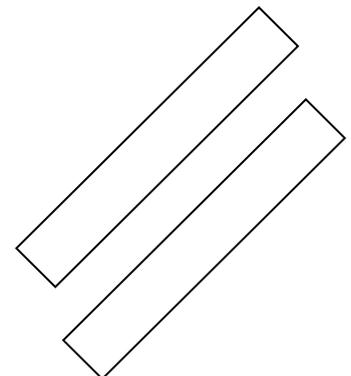
Remarque : là encore il faut que la distance coin-écran soit supérieure à $4f'$.

6. Interféromètre réel : rôle de la compensatrice :

Dans l'interféromètre réel, la séparatrice a une épaisseur non-nulle, une de ses deux faces étant semi-réfléchissante.

Lorsque l'interféromètre est réglé au contact optique, la différence de marche n'est donc pas nulle, car l'un des rayons traverse la séparatrice trois fois, l'autre une seule fois.

Pour compenser cette différence de marche, on place strictement parallèlement à la séparatrice, une lame de même indice et de même épaisseur appelée compensatrice.



7. Complément : éclairage par une source monochromatique étendue ; théorème de localisation :

Soit une source étendue spatialement à l'ordre 1
autour d'un point moyen S_m
Considérons deux points de la source étendue
 S_m et S_v , voisin à l'ordre 1

On observe les rayons interférant en M
issus de S_m et de S_v .

Les différences de marche correspondantes sont :

$$\delta_m = S_m I_2 M - S_m I_1 M$$

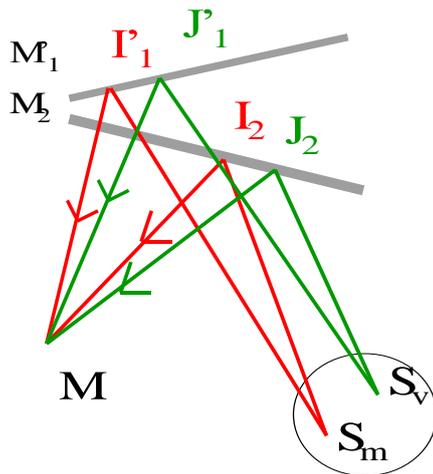
$$\delta_v = S_v J_2 M - S_v J_1 M$$

S_m et S_v étant incohérents entre eux,
les éclairagements lumineux en M s'ajoutent.

Pour ne pas perdre de contraste, il faut que :

$$\delta_m = \delta_v \text{ modulo } \lambda.$$

Cela n'est pas possible pour tout point S_v ,
cependant il est possible dans certaines conditions
de conserver un bon contraste. . .



Calculons $\Delta\delta$, variation du chemin optique lorsque l'on passe de S_m à S_v .

$$\Delta\delta = \delta_v - \delta_m = S_v J_2 M - S_v J_1 M - (S_m I_2 M - S_m I_1 M).$$

$$\text{Par symétrie : } \Delta\delta = S_v J_2 M - S_v J_1 M - (S_m I_2 M - S_m I_1 M) = S_v J_2 M - S_m I_2 M - (S_v J_1 M - S_m I_1 M)$$

$$\text{Or de façon générale à l'ordre 1 : } dAB = (\mathbf{dB} - \mathbf{dA}) \cdot \mathbf{AB} / AB.$$

Ici lorsque le point S_m se déplace en S_v :

$$\Delta\delta = -S_m I_2 M - S_v J_1 M + S_m I_1 M + S_v J_2 M$$

$$= -S_m S_v \cdot u_2 + S_m S_v \cdot u_1$$

soit

$$\Delta\delta = S_m S_v \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2).$$

avec \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 vecteurs unitaires portés par les rayons incidents issus du point moyen de la source.

Conclusion : il suffit que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ pour que $\Delta\delta$ ne dépende qu'à l'ordre 2 de l'élargissement spatial de la source $S_m S_v$.

Remarque : cette condition n'est pas nécessaire .

Théorème de localisation : la surface de localisation des franges est l'ensemble des points M intersection de deux émergents issus d'un même incident primitif, provenant donc du même point S de la source. (démonstration en annexe)

ANNEXE 1 : REGLAGE DE L'INTERFEROMETRE DE MICHELSON

1. Règlage grossier de la compensatrice et des miroirs

Avant de commencer le réglage, s'assurer à l'œil que les miroirs sont sensiblement à la même distance de la séparatrice, que (M_2) est à peu près perpendiculaire à (M_1) et que les vis de réglage (1), (2), (4) et (5) sont toutes à peu près à mi-course.

1.1.Éclairage :

Voir figure 6.

On utilise comme source une lampe à vapeur de mercure équipée d'un diaphragme circulaire de faible diamètre (T) quasi-punctuel. Ce dernier est placé au foyer objet d'une lentille (L_1) de focale $f = 15\text{cm}$, par autocollimation sur les miroirs du Michelson.

Le Michelson est donc éclairé en lumière quasi-parallèle, le point moyen S_m de la source étant à l'infini.

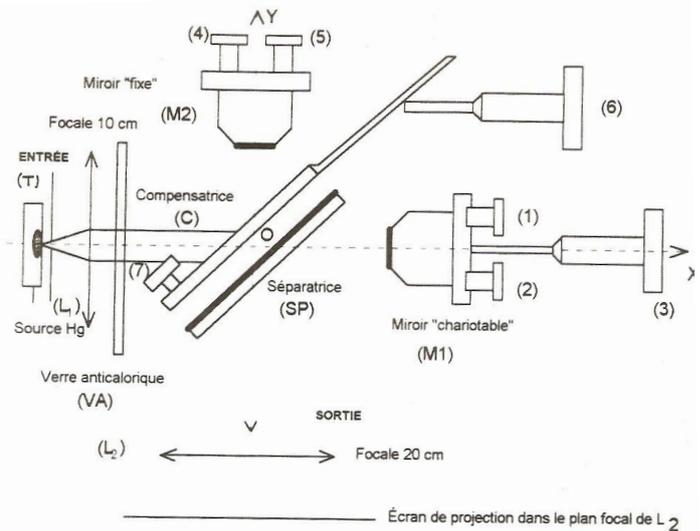


Figure 6

1.2.Projection :

On reprend le faisceau sortant par une lentille convergente (L_2) de focale $f = 20\text{ cm}$ (ou 30 cm) pour former les images du trou source (T) à travers le Michelson sur l'écran (E), lequel doit coïncider avec le plan focal image de (L_2).

Remarque : on peut également regarder à l'œil nu à travers le Michelson.

1.3.Observation :

On voit alors sur (E) au moins quatre points images plus lumineux que d'autres, provenant des diverses transmissions et réflexions sur (C), (S), (M_1) et (M_2).

On les baptise CM_1 , CM_2 , SM_1 , SM_2 du nom des lames ou miroirs sur lesquels la lumière se réfléchit.

1.4.Règlage de la compensatrice :

La lame compensatrice permet aux rayons interférant de traverser la même épaisseur de verre, et d'avoir la même intensité en sortie, donnant ainsi un contraste maximal.

Agir sur la vis (7) puis sur la vis (6) de façon à n'avoir plus que deux images SCM_1 et SCM_2 . Les compensatrice et séparatrice devenues parallèles fournissent les mêmes directions de réflexion.

1.5.Règlage de (M_1) pour le rendre quasi-parallèle à (M_2) :

Agir sur les vis de rotation (1) et (2) de manière à superposer les deux images restantes pour n'obtenir finalement qu'une seule image bien lumineuse.

(M_1) a alors une direction de plan symétrique de celle de (M_2) par rapport à la direction commune des lames compensatrice et séparatrice.

(M_1) et (M_2) sont alors quasi-parallèles - ils forment un coin d'air ; il reste à affiner.

2. Recherche des franges du coin d'air avec la lame à vapeur de mercure :

Voir figure 7.

2.1.Éclairage :

On élargit le diaphragme sans toucher ni à la lampe, ni à la lentille (L₁).

On ajoute un filtre jaune afin de sélectionner une bande étroite de longueur d'onde et avoir ainsi une bonne cohérence temporelle.

On a donc une source cohérente, large à l'infini, centrée sur un point moyen à l'infini dans une direction perpendiculaire à l'un des miroirs.

2.2.Projection :

Les interférences étant attendues sur le coin d'air, on fait avec (L₂) l'image du coin d'air sur un écran (E) à environ 2 m du Michelson.

2.3.Première observation :

Avec un peu de chance, on voit tout de suite apparaître des franges rectilignes, sinon on retouche à la vis de chariotage (3) pour que les franges rentrent dans le champ de vision.

Le contraste des franges augmente lorsque l'on se rapproche du contact optique.

2.4.Recherche fine de $\alpha = 0$:

Enlever le filtre jaune.

Élargir l'interfrange avec les vis de rotation rapide, puis achever avec les vis de rotation fine pour n'avoir plus qu'une teinte uniforme sur l'écran : le Michelson est alors réglé en lame d'air à faces parallèles, au voisinage du contact optique.

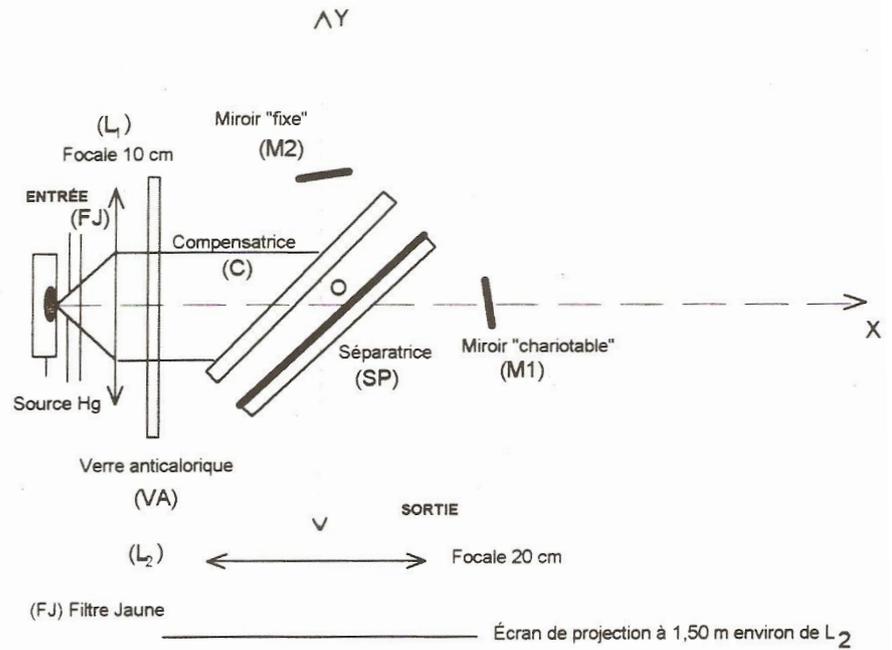


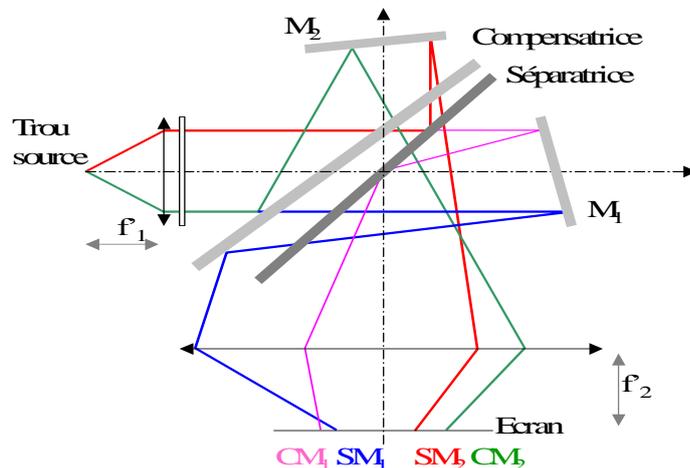
Figure 7

Le Michelson est éclairé en lumière quasi-parallèle (source ponctuelle à l'infini).

On forme les images de la source à travers le Michelson sur l'écran (E) (plan focal image de (L₂))

On voit alors sur (E) quatre points images plus lumineux que les autres, provenant des diverses transmissions et réflexions sur (C), (S), (M₁) et (M₂).

On les baptise CM₁, SM₁, SM₂, CM₂ du nom des lames ou miroirs sur lesquels la lumière se réfléchit.



ANNEXE 2 : OBSERVATIONS A L'INTERFEROMETRE DE MICHELSON

Le Michelson est supposé réglé en lame d'air à faces parallèles, au voisinage du contact optique.

1. Observation aux anneaux (lame d'air à faces parallèles) :

Voir figure 8.

1.1.Éclairage :

Pour avoir un bon éclairage des miroirs, on opère en lumière très convergente grâce à une lentille (L_1) convergente de courte focale ($f = 15 \text{ cm}$) ou à un condenseur, éclairé par la lampe à vapeur de mercure non diaphragmée.

1.2.Projection :

Les franges sont localisées à l'infini : on observe donc les anneaux soit directement à l'infini (en fait sur un écran à environ 2 m sans lentille de projection) ou bien dans le plan focal d'une lentille convergente (L_2) de focale $f = 20$ ou 30 cm.

On doit voir sur l'écran des anneaux colorés concentriques plus ou moins écartés les uns des autres.

1.3.Recherche d'un excellent parallélisme compensatrice/séparatrice :

En diminuant l'épaisseur de la lame d'air à l'aide de la vis de chariotage, les anneaux s'enfoncent dans le centre en s'écartant les uns des autres.

En devenant plus gros, ils peuvent être déformés et avoir l'allure d'ellipses à grand axe oblique. Avec les vis de rotation de la compensatrice on redresse le grand axe et on rectifie l'excentricité des ellipses jusqu'à l'annuler.

1.4.Recherche approchée du contact optique :

On translate ($M'1$) à l'aide de la vis de chariotage très délicatement afin de passer à $e=0$, ce qui se manifeste par un champ de vision uniformément éclairé.

Selon le traitement de la lame semi-réfléchissante, il est souvent de la couleur de la source, ou sa complémentaire : c'est **la teinte plate**.

Noter alors la graduation du vernier de la vis de chariotage.

A très peu de choses près, on a maintenant $e = 0$ et $\alpha = 0$.

On peut alors espérer observer des interférences en lumière blanche (très peu cohérente) parce que δ , α et e sont proches de 0.

1.5.Recherche fine du contact optique en lumière blanche :

On remplace la lampe à vapeur de mercure par une lampe blanche.

On peut supprimer la lentille d'entrée, remplacée par le condenseur de la lampe blanche.

En sortie, on opère avec un petit écran (E) dans le plan focal de la lentille (L_2), où le phénomène sera plus lumineux que sur le grand écran à 2 m.

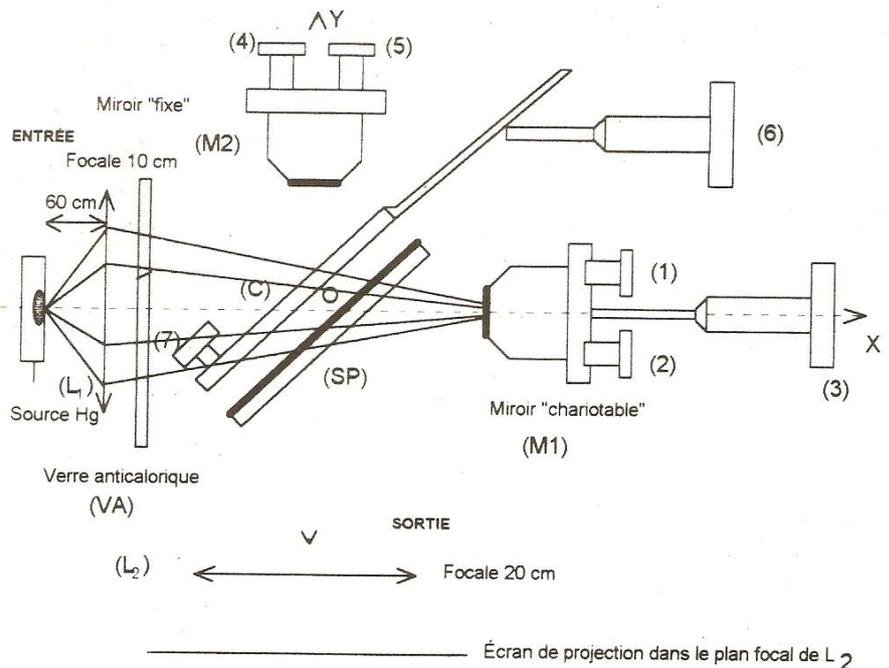


Figure 8

Si le réglage a été **parfait** (cas rarissime), on ne voit que du blanc brillant ou une teinte uniforme, l'ordre 0 ($\delta = 0 \forall \lambda$) ; pour s'en convaincre on déplace très légèrement la vis de chariotage de part et d'autre de la position initiale qui a été notée et on doit retrouver des irisations.

Si le réglage a été **mal fait**, on ne voit que du blanc brillant mais d'ordre supérieur à 0 (blanc d'ordre supérieur) et en déplaçant la vis de chariotage, on ne voit toujours que du blanc. dans ce cas, il faut recommencer le réglage avec la lampe à vapeur de mercure.

NB : les plus chanceux peuvent – par hasard – trouver les franges en chariotant très doucement. Avec la vis de translation, on se place à l'ordre 0 (c'est le blanc entre deux irisations). Dans ces conditions $e = 0$ et $\alpha = 0$: le Michelson est réglé au contact optique.

2. Observation des franges du coin d'air en lumière blanche :

2.1.Eclairage :

L'éclairage doit être large et à l'infini.

On reprend la lentille (L_1) en entrée.

La lame blanche est diphragée, et placée par autocollimation (sur les miroirs) dans le plan focal objet de la lentille (L_1).

2.2.Projection :

On projette en sortie avec (L_2) pour faire l'image du coin d'air sur l'écran (E).

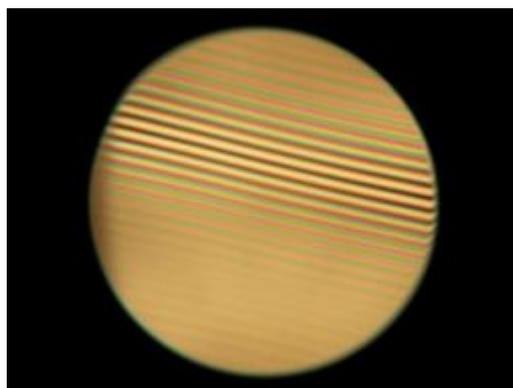
2.3. Observation :

On se donne de l'angle α à l'aide d'une vis de réglage fin (4) ou (5) pour avoir un coin d'air d'angle α faible.

On doit voir apparaître les franges rectilignes du coin d'air en lumière blanche.

On les centre avec la vis de chariotage déplacée très légèrement.

En diminuant l'interfrange, on constate qu'à partir d'une certaine abscisse, toutes les couleurs sont mélangées quasi-aléatoirement, certaines interférant constructivement, d'autres destructivement. Ce mélange présente à l'œil un aspect blanc, mais ce blanc est différent du blanc initial de la source, car il y manque certaines radiations (celles qui interfèrent destructivement) ; ce blanc est appelé **blanc d'ordre supérieur**.



3. Interférences non localisées et interféromètre de Michelson :

Pour observer les interférences non-localisées, la source doit être quasi-ponctuelle.

3.1. Eclairage :

On éclaire l'interféromètre par une source ponctuelle S : les miroirs (M_1) et (M_2) - ou plutôt ($M'1$) et (M_2) - en donnent deux images ponctuelles S'_1 et S_2 . Ce sont les sources secondaires.

Les surfaces d'égalité d'intensité sont des hyperboloïdes de foyers S'_1 et S_2 .

On les observera dans deux cas (voir figures 9 et 10) : dans un plan perpendiculaire à S'_1S_2 (anneaux non-localisés) , ou dans un plan perpendiculaire à la médiatrice S'_1S_2 (observation de franges quasi-rectilignes non-localisées).

3.2. Mise en évidence des anneaux non-localisés :

On travaille avec une lampe à vapeur de mercure.

On commence par prérégler en lame d'air à faces parallèles avec la lampe à vapeur de mercure.

On réalise un éclairage quasi-ponctuel avec un diaphragme à iris D_1 de bonne qualité (diamètre < 1 mm ; figure 11).

Avec D_1 quasi-ponctuel, on observe des anneaux nets et bien contrastés partout en déplaçant l'écran. Lorsqu'on ouvre D_1 les anneaux se brouillent ; seules les anneaux localisés à l'infini restent bien contrastés.

3.3. Détermination de la position des sources secondaires S'_1 et S_2 .

Voir figure 12.

On utilise un détecteur de Silbermann, c'est à dire une lentille de focale $f' = 25$ cm solidaire d'un écran d'observation à $2f'$, l'ensemble étant mobile sur le banc d'observation.

On peut observer deux points de focalisation assez nets l'un derrière l'autre.

3.4. Mise en évidence des franges quasi-rectilignes non-localisées

L'observation s'effectue, soit sur un écran perpendiculaire à la médiatrice de S'_1S_2 , soit avec un oculaire placé sur cette médiatrice et mobile sur le banc d'observation.

On utilise une lampe à vapeur de mercure et l'on règle l'interféromètre au coin d'air (figure 13).

L'éclairage est direct, par une source quasi-ponctuelle.

On peut également se placer en lumière parallèle pour écalibrer le diaphragme qui sert de source ponctuelle.

En ouvrant ce dernier, les franges non-localisées disparaissent au profit de franges localisées sur la lame $M'1M_2$, dont on fera l'image au moyen d'une lentille sur un écran.

INTERFEROMETRE DE MICHELSON – EXERCICES

1. Réglage géométrique du Michelson :

On désire régler approximativement la position des miroirs d'un Michelson en vue d'obtenir des franges d'interférence. Pour ce faire, on désire réaliser un collimateur à l'aide des éléments suivants: lampe, diaphragme et lentille mince.

- Indiquer sur un schéma les positions respectives de ces éléments.
- Quelle condition sur ces positions permet d'obtenir un faisceau de lumière parallèle ?
- On rajoute parfois un condenseur (lentille de courte distance focale) dans le dispositif précédent, préciser son rôle et sa position par rapport aux autres éléments.
- On place ce dispositif en entrée de l'interféromètre, et l'on observe sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente placée en sortie d'interféromètre. Qu'observera-t-on sur l'écran ? Indiquer par quel(s) réglage(s) (rotation ou translation) et sur quel(s) élément(s) on peut agir pour obtenir la superposition des faisceaux en sortie de l'interféromètre.

2. Interféromètre de Michelson :

On considère un interféromètre de Michelson réglé au contact optique et éclairé avec une radiation de longueur d'onde $\lambda = 546,1 \text{ nm}$ dans le vide.

A partir de cette situation on déplace M_2 parallèlement à son plan de $1,1 \text{ mm}$.

- Quelle est l'allure de la figure d'interférences ? Quel est l'ordre d'interférences au centre de la figure ?
- On a placé en sortie une lentille de focale $f' = 1 \text{ m}$. Calculer les rayons des trois premiers anneaux brillants.
- On place devant l'autre miroir une lame d'épaisseur $e' = 9,5 \text{ }\mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,517$. Calculer la variation de l'ordre d'interférence au centre .

3. Angle du coin d'air :

Un interféromètre est réglé pour observer les franges du coin d'air.

On voit une quarantaine de franges rectilignes sur les $1,5 \text{ cm}$ de largeur du miroir. En déduire une estimation de l'angle α du coin d'air que forment les deux miroirs. Que se passe-t-il si l'on augmente α ?

Réponse : $\alpha = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 2' \text{ d'angle}$.

4. Michelson au coin d'air : interposition d'une lame :

On considère un interféromètre de Michelson réglé au contact optique.

A partir de cette situation , on fait tourner le miroir M_2 d'un angle α très faible.

- Comment éclairer le coin d'air sous incidence quasi-normale ?
- Pour des rayons lumineux voisins de l'incidence normale, faire apparaître à l'aide d'un schéma, la position du plan de localisation de la figure d'interférences.
- Comment faut-il placer la lentille L en sortie d'interféromètre pour observer les interférences sur un écran ?
- Caractériser le système de franges et donner la valeur de l'interfrange i sur l'écran, sachant que le grandissement de la lentille est 4.

Application numérique: $\alpha = 1 \text{ minute d'arc}$. $\lambda = 546,1 \text{ nm}$. Donner la valeur de i .

- On place sur l'un des bras et parallèlement au miroir M_1 , une lame d'épaisseur $e' = 9,5 \text{ }\mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,5117$. On éclaire le coin d'air en lumière blanche. Indiquer un moyen de déterminer l'épaisseur e' ou l'indice moyen de la lame.

5. Nombre d'anneaux observables :

On éclaire un interféromètre de Michelson monté en lame d'air d'épaisseur e et éclairé avec une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 546 \text{ nm}$.

La lentille placée à l'entrée de l'interféromètre est placée à 15 cm des miroirs ; son diamètre est de 6 cm.

Partant du contact optique, on fait défiler 1000 anneaux au centre.

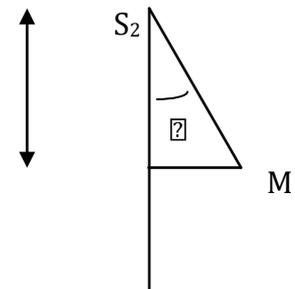
- Quelle est l'épaisseur de la lame d'air équivalente ?
- Combien d'anneaux peut-on observer sur l'écran, au maximum ?

Réponse : 20 anneaux.

6. Interféromètre de Michelson : nombre d'anneaux visibles à distance finie (d'après X-Cachan 97)

On considère un interféromètre de Michelson réglé aux anneaux et éclairé par une source quasi-ponctuelle avec une radiation de longueur d'onde λ_0 .

- Comment peut-on réaliser une source quasi-ponctuelle ?
- Les interférences sont-elles délocalisées ou localisées ? Quelle est l'allure des franges ?
- L'épaisseur de la lame d'air est e . Quelle est la distance S_1S_2 entre les sources secondaires ?
- On observe les interférences en un point M défini par la distance D et l'angle θ (figure). Quelle est la différence de marche en M ? Quelle est l'intensité lumineuse ? Montrer que le rayon des anneaux brillants



est donné par : $r_k = D \sqrt{\frac{k\lambda}{e}}$ (on supposera l'ordre au centre entier).

- La source ponctuelle est à présent remplacée par une source étendue incohérente, circulaire, de rayon R et de centre S . Comment se trouve modifiée la figure d'interférences dans le plan de M ?

On suppose que le nombre N_v d'anneaux visibles est grand. Evaluer N_v en fonction de λ_0 , e , D et R . Ou placer l'écran d'observation pour observer le nombre maximum d'anneaux ?

Réponses : d) $\delta = 2l (1 - \theta^2/2)$; f) $N_v = \lambda_0 D^2 / 16.l.R^2$.

7. Mesure au Michelson (CCP PSI 2000) :

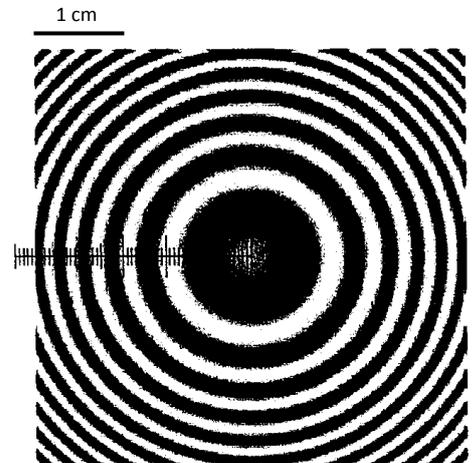
Un interféromètre de Michelson réglé aux anneaux est éclairé avec une source étendue de longueur d'onde $\lambda = 589$ nm.

On observe la figure ci-dessous au foyer d'une lentille de distance focale $f = 0,5$ m.

On considère que l'ordre au centre est $p_0 + \varepsilon$, avec $0 < \varepsilon \leq 1$.

- Déterminer la loi donnant le rayon des anneaux brillants.
- Déduire de la figure l'épaisseur e de la lame d'air équivalente au Michelson. Que vaut l'ordre d'interférences au centre ?

Réponse : 0,53 mm ; $p = 1811,6$.



MICHELSON EN LUMIERE POLYCHROMATIQUE – EXERCICES

8. Etude du doublet du mercure (CCP MP 00) :

On éclaire un interféromètre de Michelson réglé aux anneaux avec une lampe à vapeur de mercure qui émet deux radiations, de fréquences respectives $\nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu_{1/2} / 2$ et $\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu_{1/2} / 2$, et dont les contributions en intensité dans le plan d'observation sont égales.

La longueur d'onde correspondant à ν_0 est $\lambda_0 = 578 \text{ nm}$.

Un détecteur est placé au foyer d'une lentille convergente placée en sortie de l'interféromètre.

On désigne par x le déplacement du miroir mobile M_2 , compté à partir du contact optique.

a) Calculer ν_0 . Quelle est la couleur de cette radiation ?

b) Montrer que l'intensité détectée a pour expression : $I(\tau) = I(0)/2 [1 + \gamma_t(\tau) \cdot \cos(2\pi\nu_0\tau)]$, où τ est une durée que l'on exprimera en fonction de x et de la vitesse c de la lumière dans le vide et $\gamma_t(\tau)$ une fonction que l'on déterminera.

c) En déduire le facteur de visibilité ainsi que les graphes $|\gamma_t(\tau)|$ et $I(\tau)$.

d) Entre les deux premières valeurs de τ qui annulent V , on compte 277 pics d'intensité. En déduire $\Delta\nu_{1/2}$ et $\Delta\lambda_{1/2}$. Calculer $L_t = c / \Delta\nu_{1/2}$ appelée longueur de cohérence temporelle.

e) Une analyse attentive du graphe $V(\tau)$, obtenu expérimentalement, montre que V décroît lorsque τ augmente. Proposer une interprétation physique en la justifiant.

9. Spectrométrie par transformation de Fourier (Centrale PSI 08) :

Une source ponctuelle éclaire un interféromètre de Michelson réglé aux anneaux, de telle sorte que le miroir M_2 soit fixe en $z = z_0$ et que le miroir M'_1 de cote z puisse se déplacer parallèlement à lui-même à partir de sa position initiale correspondant à une différence de marche nulle (contact optique).

Un détecteur P placé en F' , foyer image de la lentille de sortie donne un signal électrique proportionnel à l'intensité I qu'il reçoit.

a) La source est monochromatique ; exprimer l'éclairement $I(z)$ en fonction du nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$, de z , z_0 et de l'intensité I_0 que l'on observerait si l'on masquait le miroir M_2 .

La source primaire n'est plus monochromatique. L'intensité que produirait l'interféromètre en F' dans l'intervalle de nombres d'onde $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ si l'on masquait l'un des deux miroirs est $G(\sigma)d\sigma$, où $G(\sigma)$ est une fonction proportionnelle à l'intensité spectrale de la source.

b) Chaque intervalle spectral élémentaire $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ pouvant être assimilé à une source monochromatique, que dire de deux intervalles spectraux différents ? En déduire en la justifiant, sous forme d'une intégrale sur σ , la nouvelle expression de l'intensité $I(z)$ en fonction de z , z_0 et σ .

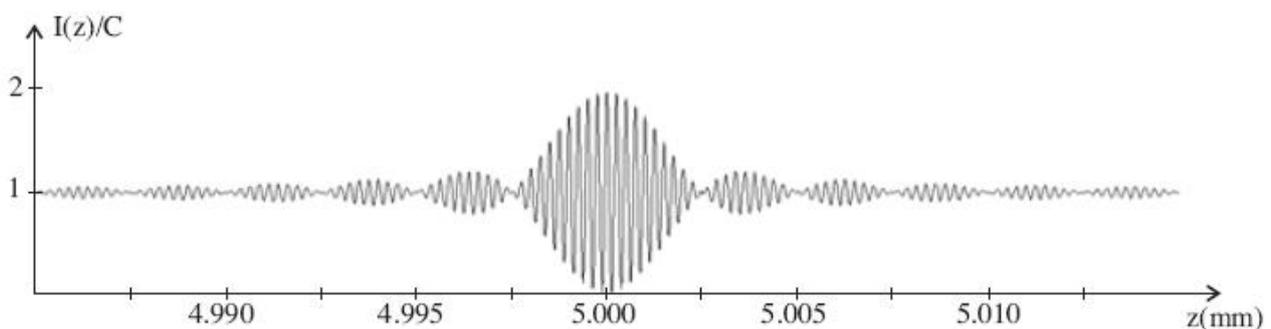
c) Calculer explicitement $I(z)$ dans le cas d'une source à profil spectral rectangulaire de largeur $\Delta\sigma$:

$$G(\sigma) = G_0 \text{ si } \sigma \in [\sigma_0 - \Delta\sigma / 2, \sigma_0 + \Delta\sigma / 2]$$

$$G(\sigma) = 0 \text{ sinon.}$$

On exprimera le résultat sous la forme $I(z) = C[1 + V \cos(4\pi\sigma_0(z-z_0))]$ où C est une constante et V le facteur de visibilité, grandeurs que l'on déterminera.

d) La figure ci-dessous donne le graphe de $I(z)$. Déterminer z_0 , σ_0 et $\Delta\sigma$ en précisant la méthode utilisée.



10. Spectrométrie par transformée de Fourier (Mines-Ponts) :

On éclaire un interféromètre de Michelson monté en lame d'air d'épaisseur e avec une raie quasi-monochromatique centrée autour de la longueur d'onde $\lambda_0 = 1/\sigma_0$.

L'intensité émise par la source par une bande de largeur $d\sigma$ est :

$$\frac{dE_0}{d\sigma} = f(\sigma) = C. \exp\left(-\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{a^2}\right)$$

où $\sigma = 1/\lambda$ et où σ_0 , C et $a \ll \sigma_0$ sont des constantes positives.

Pour simplifier, on étendra f aux valeurs négatives de σ , domaine où f prend des valeurs négligeables.

a) Quelle est la signification de σ_0 ? Calculer la largeur $\Delta\sigma$ du profil à mi-hauteur et interpréter la constante a .

b) On réalise un enregistrement de l'éclairement au centre de la figure d'interférences en fonction de l'épaisseur e qu'on fait varier en déplaçant un des miroirs à l'aide d'un moteur à vitesse v constante..

Etablir l'expression de l'éclairement $E(t)$ en fonction des constantes et de la transformée de Fourier du profil spectral définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma). \exp(2j\pi\sigma x) d\sigma$$

c) Sachant que :

$$\hat{F}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2 / a^2). \exp(2j\pi ux) du = a\sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 a^2 x^2)$$

établir l'expression de $E(e)$ et tracer (machine) l'allure de son graphe pour $\Delta\sigma \ll \sigma_0$.

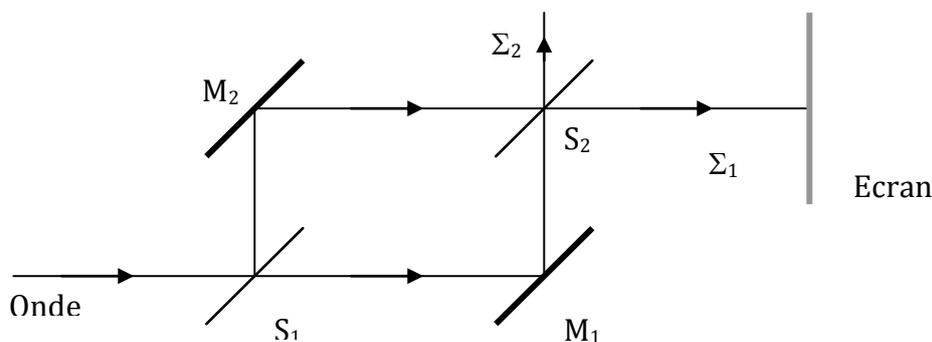
d) Comment évolue la visibilité des franges ? Comment peut-on mesurer $\Delta\sigma$?

Quelle valeur de e doit-on pouvoir atteindre ?

Retrouver l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence de la source en fonction de $\Delta\sigma$.

11. Interféromètre de Mach-Zender :

Cet interféromètre est constitué de deux miroirs M_1 et M_2 parfaitement réfléchissants et de deux séparatrices S_1 et S_2 semi-réfléchissantes, disposées à 45° de la direction des rayons incidents.



Un faisceau incident d'amplitude a_0 est divisé en deux faisceaux par la séparatrice S_1 ; après réflexion sur les miroirs, ces deux faisceaux se recombinaient à la sortie de la séparatrice S_2 .

Les coefficients de réflexion $\underline{\rho}$ et de transmission $\underline{\tau}$ en amplitude sont pour les séparatrices :

$$\underline{\rho} = \exp(j\pi/2)/\sqrt{2} \text{ et } \underline{\tau} = 1/\sqrt{2}.$$

a) Exprimer les amplitudes complexes des faisceaux transmis Σ_1 et Σ_2 en fonction de a_0 et du déphasage φ_0 correspondant au trajet optique $(S_1 M_2 S_2) = (S_1 M_1 S_2)$. En déduire les éclairagements dus à ces deux faisceaux.

b) On dispose une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice $n=1,5$ entre M_2 et S_2 , perpendiculairement à la direction des rayons lumineux.

Quelle est à présent l'éclairement Σ_1 reçu par l'écran ?

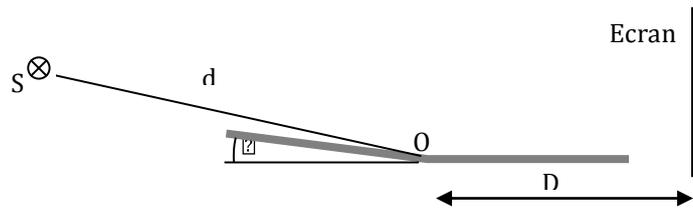
Quel est l'éclairement du faisceau Σ_2 ?

Pour quelle valeur de l'épaisseur e l'éclairement de l'écran est-il nul ? Maximal ?

AUTRES SYSTEMES INTERFERENTIELS – EXERCICES

1. Miroirs de Fresnel :

Une fente lumineuse S éclairée en lumière monochromatique de longueur d'onde λ est placée parallèlement à l'arête de 2 miroirs de Fresnel faisant un **petit** angle α , à une distance d de cette arête. On place un écran perpendiculairement aux miroirs, à la distance D de l'arête.



L'incidence est rasante, de sorte que l'on peut considérer que SO est perpendiculaire à l'écran.

On donne : $d = 0,4 \text{ m}$; $D = 2 \text{ m}$; $\lambda = 590 \text{ nm}$;

a) Où sont les images S_1 et S_2 de S à travers les deux miroirs ? Par analogie avec le Michelson, comment peut-on simplifier le système ?

b) Quelle est en conséquence la différence de marche en un point M de l'écran ?

c) On mesure sur l'écran une interfrange $i = 0,3 \text{ mm}$. Calculer l'angle des miroirs.

Réponse : $\alpha = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$.

2. Interférences données par réflexion par une lame mince non traitée :

On considère une lame d'épaisseur e et d'indice $n = 1,55$, plongée dans l'air d'indice $n_0 = 1$.

Elle est éclairée en lumière monochromatique de longueur d'onde λ .

On considère un rayon arrivant sur la lame avec un angle i.

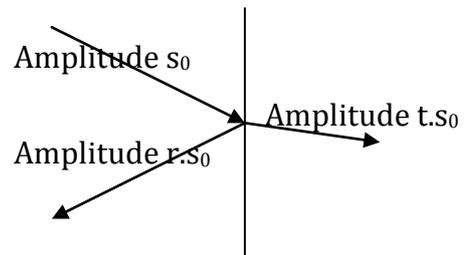
On appelle s_0 l'amplitude de l'onde incidente et s_i l'amplitude du i-ième rayon réfléchi par la lame

On rappelle que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, d'une onde passant d'un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice n_2 en incidence faible sont :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

a) Remplir le tableau suivant :

Rapport des amplitudes	S_1 / S_0	S_2 / S_0	S_3 / S_0	S_4 / S_0
Expression littérale				
Valeur numérique				



Quelles conclusions peut-on en tirer ? Que peut-on dire des contrastes des images d'interférences obtenues par réflexion ?

On s'intéresse dans la suite aux interférences des ondes véhiculées par les deux premiers rayons réfléchis, dont on suppose les amplitudes égales. On néglige les autres rayons.

b) Où observe-t-on ces interférences ? Faire un schéma.

c) Montrer que la différence de marche entre les deux rayons en un point M d'observation des interférences est $\delta = 2n \cos r$, où r est l'angle de réfraction des rayons dans la lame.

d) Quel est l'éclairement en ce point M ?

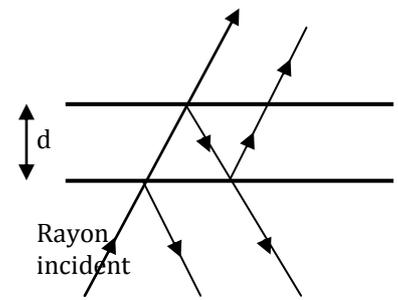
e) Le dispositif permet-il d'utiliser une source étendue ?

f) Le dispositif est à présent éclairé en lumière blanche. A partir de quel ordre de grandeur de l'épaisseur e est-il impossible d'observer des franges en incidence quasi-normale ?

3. Interféromètre de Perot-Fabry :

Un interféromètre de Perot-Fabry est constitué par une lame à faces parallèles d'air (indice $n = 1$, épaisseur d) emprisonnée entre deux lames de verre d'indice n , dont on négligera ici l'épaisseur, et dont les faces qui sont au contact de la lame d'air sont traitées optiquement.

On éclaire cette lame avec une source monochromatique de longueur d'onde λ , avec un condenseur, afin d'obtenir toutes les incidences possibles. Un rayon incident donne naissance aux différents rayons indiqués sur la figure.



a) On appelle r le facteur de réflexion en amplitude des lames de verre et $\rho = r^2$ le facteur de réflexion en éclairement.

On s'intéresse aux interférences par transmission, et on appelle φ le déphasage entre deux rayons transmis dans la direction i consécutifs.

b) Donner la valeur de φ et montrer que l'intensité transmise $I(\varphi)$ s'écrit :

$$I(\varphi) / I_M = \frac{1}{1 + F^2 \sin^2(\varphi/2)}$$

où I_t représente l'intensité transmise, I_M l'intensité maximale et F une fonction de ρ appelé finesse, à préciser.

c) Tracer (machine) la courbe donnant $I(\varphi) / I_M$ en fonction de φ .

Déterminer la finesse des raies obtenues. AN : $\rho = 0,95$ puis $\rho = 0,98$.

d) L'interféromètre a une épaisseur $d = 1$ cm ; on recueille les rayons émergents au moyen d'une lentille convergente de focale $f = 1$ m , et l'on observe les anneaux dans le plan focal. La lampe émet la radiation $\lambda = 422,7$ nm.

En supposant l'ordre d'interférence p_0 au centre ($i = 0$) entier, calculer les rayons des cinq premiers anneaux brillants.

e) Calculer la demi-largeur de ces anneaux ; on la définit en disant que si, dans la direction du maximum de lumière l'intensité est I_0 , on trouve à la demi-largeur l'intensité $I_0/2$. On choisit $\rho = 0,9$ et on ne cherchera pas à calculer la largeur du disque central.

Réponse : $R_k = f \cdot (k\lambda / d)^{1/2}$, k entier. $\Delta R_k / R_k = 1 / (2\pi k \sqrt{a})$ avec $a = 4\rho / (1 - \rho)^2$.

4. Miroir double :

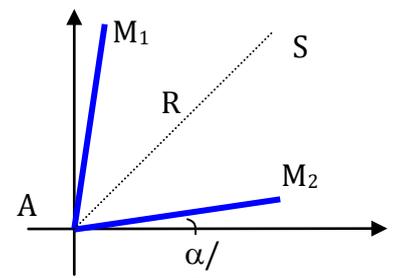
On considère, dans l'air, deux miroirs plans M_1 et M_2 formant un dièdre d'arête A et d'angle $\pi/2 - \alpha$ avec α petit. Une source lumineuse S , ponctuelle, monochromatique de longueur d'onde λ , est placée dans le plan bissecteur du dièdre formé par les miroirs, à une distance R de l'arête.

On étudie l'interférence entre les ondes suivantes : la première réfléchiée par M_1 puis M_2 , la seconde réfléchiée par M_2 puis M_1 . Le plan d'observation P est un écran perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre, parallèle à son arête et situé à la distance z de A ($z > R$).

a) Déterminer, à l'aide d'une construction soignée, les sources secondaires et la zone d'interférences. Montrer que la distance entre S_1 et S_2 est $4\alpha R$.

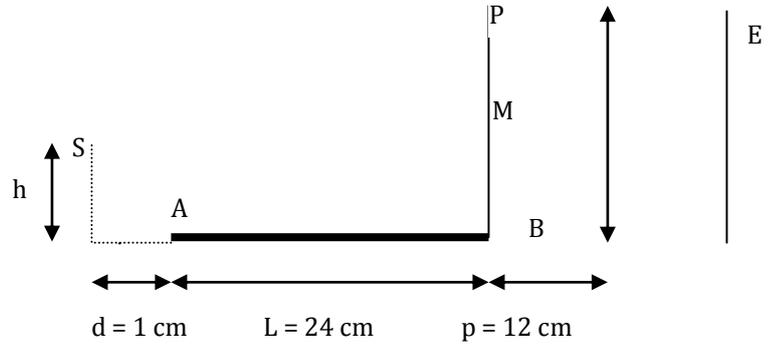
b) Calculer l'interfrange, la largeur L du champ d'interférences et le nombre de franges brillantes sachant que $\lambda = 600$ nm ; $R = 10$ cm ; $z = 70$ cm et $\alpha = 0,002$ rad.

Réponses : $i = 0,6$ mm ; $L = 5,6$ mm.



5. Miroir de Lloyd :

On considère le dispositif interférentiel ci-dessous; les rayons provenant de S interfèrent avec les rayons réfléchis par le miroir plan AB.



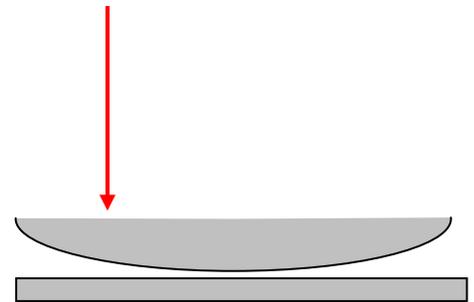
La source ponctuelle monochromatique S est située à $h = 250 \mu\text{m}$ du miroir. On réalise l'image du plan P sur l'écran E à l'aide de la lentille L de focale $f = 10 \text{ cm}$. On donne $\ell = 600 \text{ nm}$.

- Dessiner le champ d'interférences. Quelle est sa largeur ?
- Calculer la différence de marche en M, point du plan P. Déterminer l'interfrange et le nombre maximal N de franges brillantes sur le plan P puis sur l'écran.
- La source est un laser $L_c = 30 \text{ cm}$. Observe-t-on réellement N franges brillantes ?

6. Anneaux de Newton :

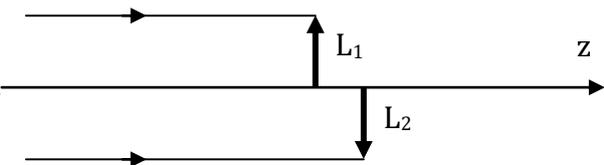
On forme des anneaux de Newton en posant une lentille plan convexe de rayon de courbure $R = 1 \text{ m}$ sur un plan de verre. La lame ainsi formée est éclairée en incidence quasi-normale par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 546 \text{ nm}$. On observe le phénomène par réflexion.

- Exprimer la différence de marche entre les deux rayons réfléchis en fonction de r et R.
- Etablir la relation donnant le rayon des anneaux. Quel est le rayon du 10^{ème} anneau sombre lorsque le contact est parfait (ponctuel).
- On écarte les lentilles très lentement suivant la normale commune en continuant l'observation. Expliquer les modifications observées et la figure d'interférences à la fin d'un déplacement d'un millimètre.



7. Lentille de Meslin :

Une lentille mince convergente, de focale $f = 30 \text{ cm}$ et de diamètre d'ouverture $D = 2R = 6 \text{ cm}$, est sciée suivant un diamètre, puis on écarte les deux demi-lentilles L_1 et L_2 obtenues, suivant l'axe optique, de la quantité $e = 25 \text{ mm}$.



Ce dispositif est éclairé en lumière parallèle par une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$.

- Comment éclairer le système en lumière parallèle ?
- Dessiner le champ d'interférences. Ou doit-on placer un écran perpendiculaire à Oz pour obtenir un champ d'interférences de largeur maximale ?
- Dessiner deux rayons interférant en un point M de l'écran. Montrer qu'en un point M de l'écran de coordonnées $\{x, y, 0\}$ la différence de marche géométrique est, au second ordre en x/e et y/e :

$$\delta = \frac{\lambda(x^2 + y^2)}{e}$$

On admet que lorsqu'une onde passe par un foyer, elle subit un déphasage de π . Quel est la différence de marche – dite ondulatoire – correspondante ?

- Quelle est la forme des franges sur l'écran ? Caractériser les franges sombres. L'intersection de l'écran avec l'axe optique est-elle claire ou sombre ?

CHAPITRE 4 : DIFFRACTION DES ONDES LUMINEUSES

Manipulation : on fait passer le faisceau quasi-cylindrique issu d'un laser à travers une fente dont on diminue progressivement la taille ; on observe un élargissement de la tâche observée sur l'écran : il y a diffraction. La tâche de diffraction a une structure précise.

Il y a diffraction lorsque la propagation des ondes n'obéit plus à l'approximation de l'optique géométrique.

On supposera toujours les ondes scalaires : $s(M,t) = s \cdot \exp(j\omega t - \Phi(M))$

1. Préparation du cours :

Le cours de diffraction va faire intervenir le carré de la fonction « sinus cardinal » notée $\text{sinc}(x)$ et définie par $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$.

On considère donc la fonction $f(x) = \text{sinc}^2(x)$.

- Quelle est sa limite en $x = 0$?
- Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
- Tracer à l'aide d'une calculatrice l'allure de cette fonction.
- Pour quelles valeurs de x s'annule-t-elle ?
- Montrer que l'équation donnant les extremas est, pour $x \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$: $\tan(x) = x$.
- Cette équation n'admet pas de solution analytique : tracer à la calculatrice les courbes $y = x$ et $y = \tan(x)$ et donner les valeurs de x rendant $f(x)$ maximale.
- Calculer la valeur des deux premiers « maximas secondaires ».

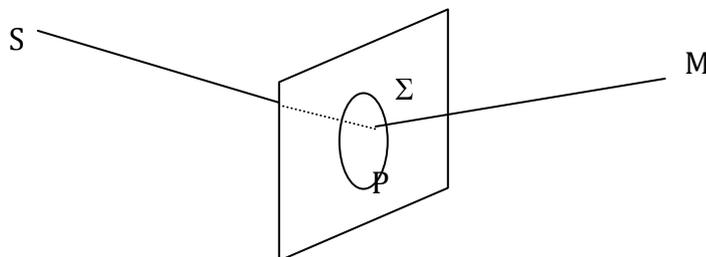
2. Principe d'Huyghens-Fresnel :

1.1. Enoncé :

Soit Σ une surface diffractante atteinte par une onde monochromatique.

Chaque élément $d\Sigma$ de Σ autour d'un point P de cette surface se comporte comme une source ponctuelle secondaire émettant une ondelette sphérique dont l'amplitude est proportionnelle à $d\Sigma$ et à l'amplitude de l'onde incidente en P .

Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles : l'amplitude en un point M d'observation est la somme des amplitudes complexes émises par toutes les sources secondaires.



1.2. Transparence :

Soit S la source principale, ponctuelle.

L'amplitude élémentaire reçue au point P , soit $s(P)$ s'écrit :

$$s_{\text{reçue}}(P,t) = K \cdot \exp(j\omega t) \cdot \exp(-jk_0 \cdot (SP)) \text{ avec } k_0 = 2\pi / \lambda_0.$$

L'amplitude élémentaire émise par $d\Sigma(P)$ autour du point P s'écrit d'après le principe énoncé :

$$ds(P,t) = K.t(P).d\Sigma(P).\exp(j\omega t).\exp(-jk_0.(SP))$$

où $t(P)$ est la **transparence** du diaphragme .

L'amplitude au point M due à une source secondaire élémentaire $d\Sigma(P)$ centrée autour du point P est donc $ds(M,t) = ds(P,t) \cdot \frac{1}{PM} \cdot \exp(-jk_0.(PM))$

L'amplitude totale en M est donc :

$$s(M,t) = \iint_{\Sigma} ds(M,t) = \iint_{\Sigma} ds(P,t) \cdot \frac{1}{PM} \cdot \exp(-jk_0.(PM))$$

3. .Diffraction de Fraunhofer

Lorsque le point d'observation M et la source S sont à l'infini, on est dans les **conditions de diffraction de Fraunhofer**, ou diffraction à l'infini.

C'est une onde plane qui arrive sur le diaphragme et une onde plane qui repart du diaphragme.

On montre que l'amplitude diffractée s'écrit alors, avec O un point origine choisi dans le plan du diaphragme :

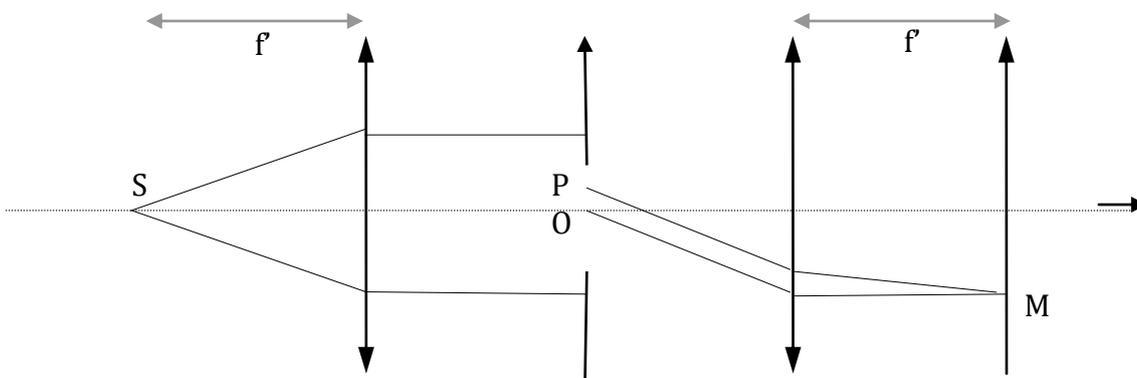
$$s(M,t) = K'.\exp(j\omega t) \int_{\Sigma} t(P) \exp[j(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{OP}] . d\Sigma$$

Formule de diffraction de Fraunhofer.

On ne considérera dans la suite que la diffraction à l'infini.

4. Diffraction par un diaphragme rectangulaire :

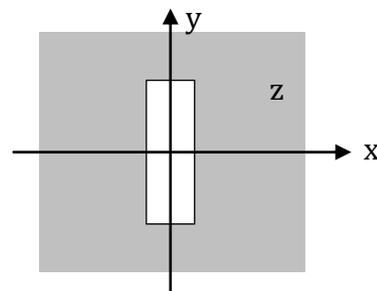
3.1.Montage :



Le diaphragme est une fente rectangulaire de largeur a et de hauteur b, décrite par la transparence :

$$t(x, y) = 1 \text{ si } -a/2 \leq x \leq a/2 \text{ et } -b/2 \leq y \leq b/2 ;$$

$$t(x, y) = 0 \text{ ailleurs.}$$



3.2. Amplitude diffractée en M :

L'onde incidente est normale au plan du diaphragme, donc $\vec{k} \cdot \vec{OP} = 0$.

On pose $\vec{OP} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ et $\vec{u}' = \frac{\vec{k}'}{k_0} = \alpha\vec{u}_x + \beta\vec{u}_y + \gamma\vec{u}_z$;

α, β et γ sont les composantes (dites « cosinus directeurs ») du vecteur unitaire \vec{u}' orientant \vec{k}' .

On a alors :

$$s(M, t) = K' \cdot \exp(j\omega t) \iint_S t(x, y) \cdot \exp(-j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)) \cdot d\Sigma(P)$$

et $d\Sigma(P) = dx \cdot dy$ soit

$$s(M, t) = K' \cdot \exp(j\omega t) \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-j \frac{2\pi}{\lambda} \alpha x) \cdot dx \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-j \frac{2\pi}{\lambda} \beta y) \cdot dy$$

On obtient après calcul :

$$s(M, t) = K' \cdot \exp(j\omega t) \cdot \text{sinc}(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}) \cdot \text{sinc}(\frac{\pi\beta b}{\lambda}) \text{ où } \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

3.3. Eclairement en M :



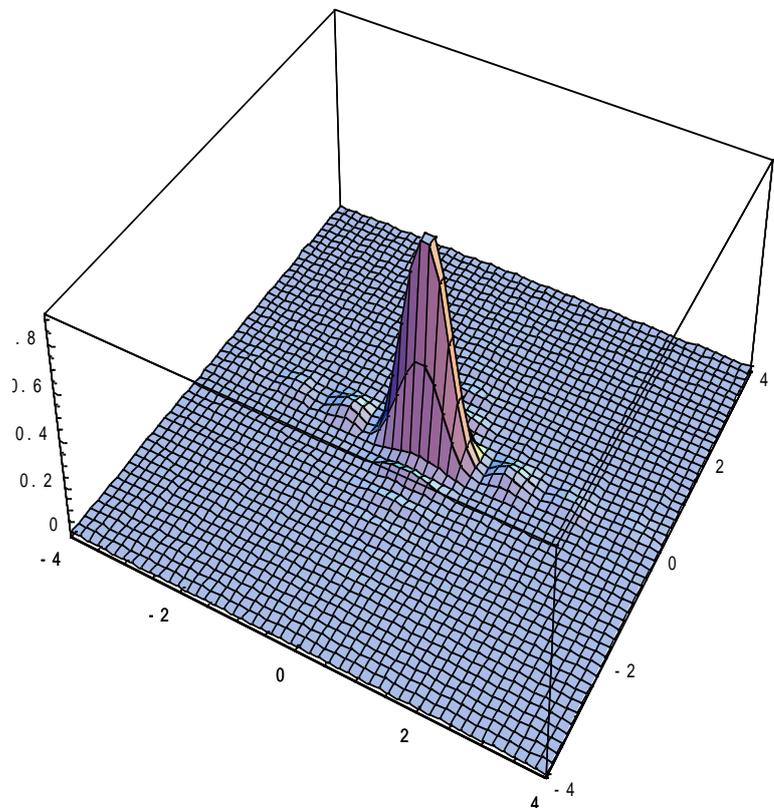
L'éclairement est donc :

$$E(M) = E_0 \cdot \text{sinc}^2(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}) \cdot \text{sinc}^2(\frac{\pi\beta b}{\lambda})$$

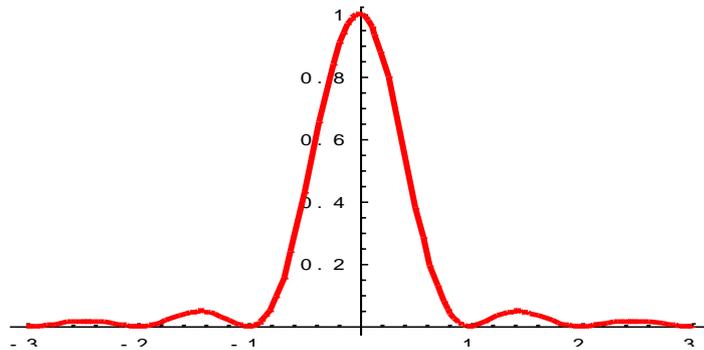


E_0 est l'éclairement maximum, obtenu pour $\alpha = \beta = 0$; le maximum de lumière est obtenu **dans la direction de l'image géométrique de la source.**

```
G[x,a]=Sin[ a Pi x] / (a Pi x);
Eclairement[x,a]=G[x,a]*G[x,a];
Plot3D[
Eclairement[x,1]*Eclairement[y,2],
{x,-4,4},{y,-4,4},PlotPoints->100,
PlotRange->All]
```

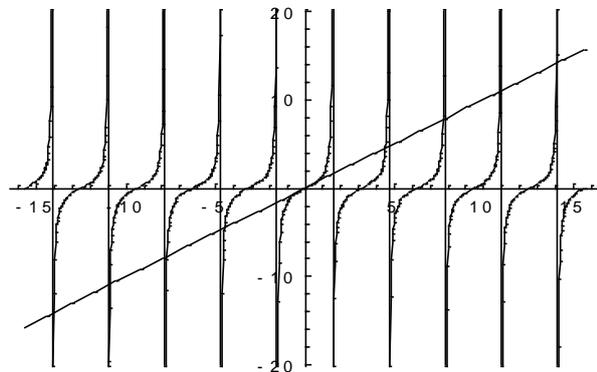


3.4. Etude de la fonction $f(u) = \text{sinc}^2(u)$:



$f(u)$ présente un maximum absolu pour $u = 0$;
 $f(u)$ présente des maxima secondaires, pour $u \approx (n + 1/2) \pi$ avec n entier, $n \neq 0, -1$.
 $f(u)$ s'annule pour $u = n\pi$, n entier non nul.

Plot[{u, Tan[u]},
 {u, -5 Pi, 5 Pi}]



3.5. Cas de la fente fine :

On appelle fente fine une fente dont une dimension est très grande devant l'autre, soit par exemple : $a \ll b$.

Seule la diffraction due à la plus petite dimension peut être alors considérée, et on a alors :

$$E(M) = E_0 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \alpha a}{\lambda}\right)$$

La tache centrale est deux fois plus large que les maxima secondaires ;
 Elle est beaucoup plus intense.

Sa largeur angulaire est $2\lambda/a$.



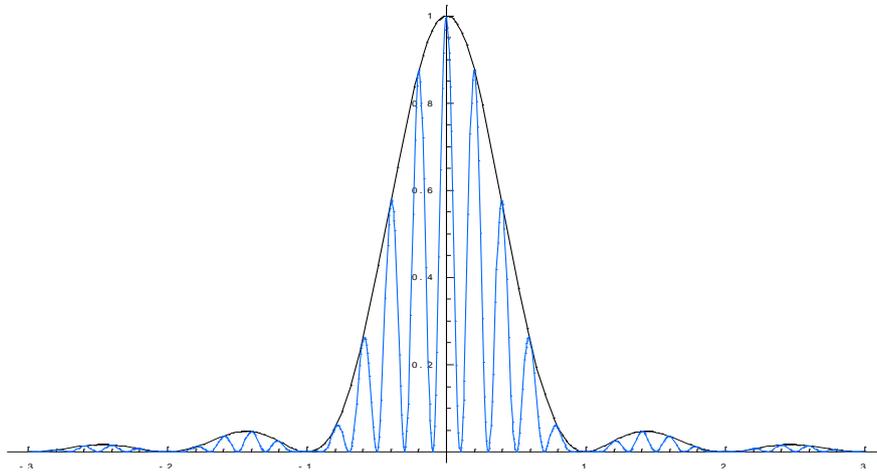
5. Diffraction par deux fentes d'Young :

Nous avons dans le cours sur les fentes d'Young implicitement supposé que les fentes étaient infiniment fines et diffractaient de manière isotrope.

Supposons que les deux fentes fines, espacées d'une distance a , ont une largeur e .

On montre qu'alors, en incidence normale :

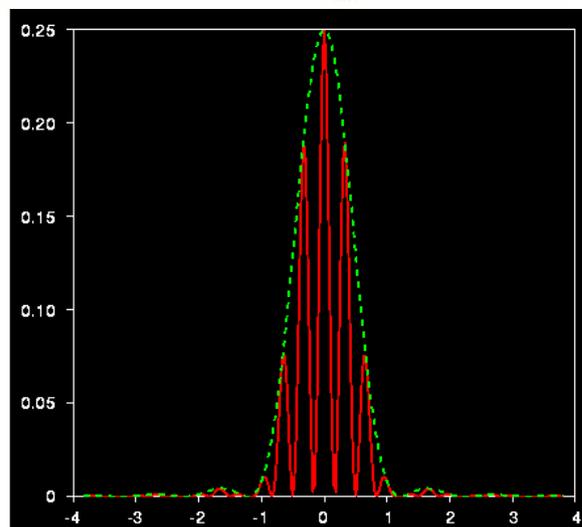
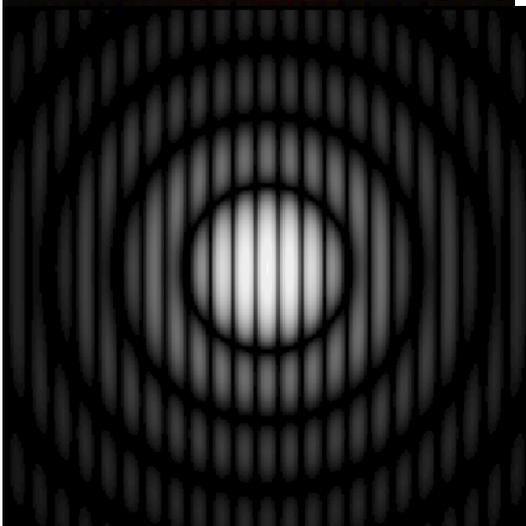
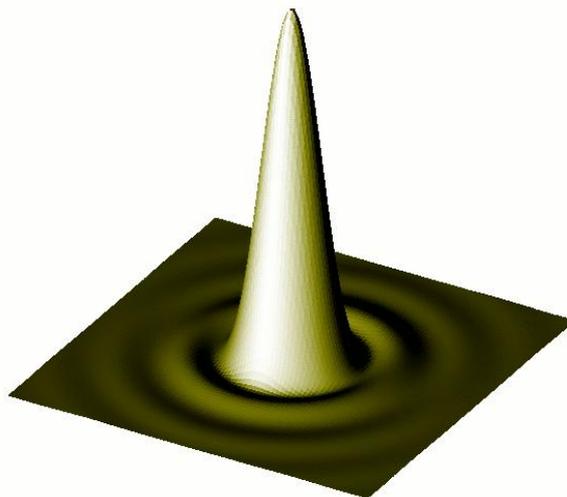
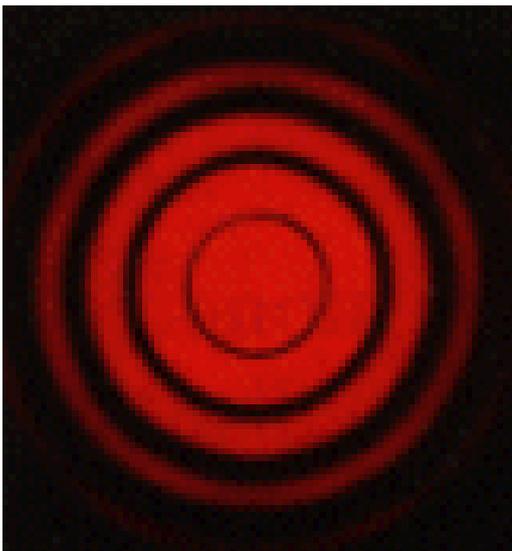
$$E(M) = \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \alpha e}{\lambda}\right) \cos^2\left(\frac{\pi \alpha a}{\lambda}\right)$$



6. Diffraction par une pupille circulaire.

C'est un cas important pour les instruments d'optique, dont la monture est généralement circulaire.

Le calcul, faisant intervenir les fonctions de Bessel, conduit aux résultats suivants :
 les franges de diffraction sont des anneaux centrés sur l'image géométrique de la source.
 la tache centrale, appelée tache d'Airy, est beaucoup plus brillante que les autres ;
 son rayon angulaire est $\sin\theta_1 = 1,22\lambda / 2R$.



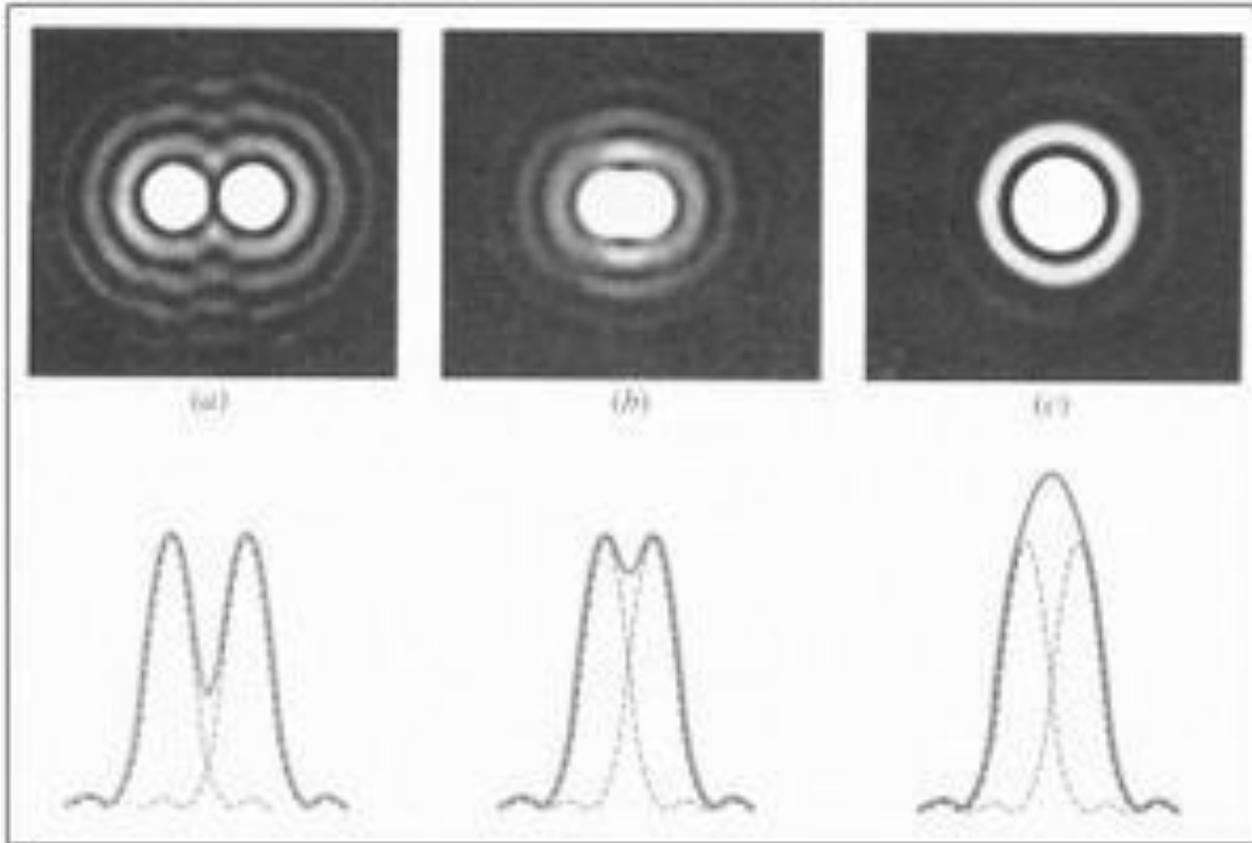
7. Rôle de la diffraction dans la formation des images :

La diffraction limite :

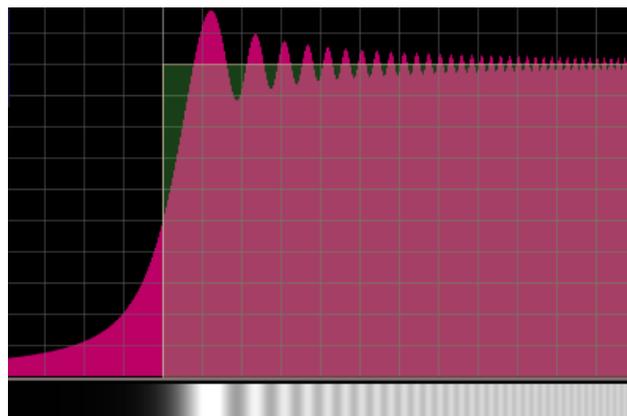
le pouvoir séparateur des instruments d'optique : les images de deux objets proches ponctuels A et B sont des taches d'extension $\rho = 1,22\lambda f' / 2R$, où R est le rayon de la lentille utilisée.

Si A' et B' sont les centres de ces images, l'expérience montre qu'on les distingue si $A'B' > \rho$;

la précision à apporter à la taille des lentilles, dans la mesure où le stigmatisme rigoureux sera impossible.



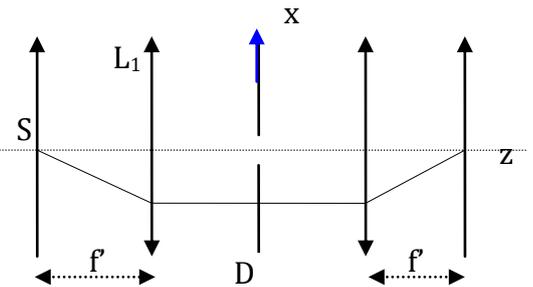
Diffraction par un bord d'écran :



DIFFRACTION - EXERCICES

1. Diffraction de Fraunhofer dans le montage 4f :

Un système optique, composé de deux lentilles minces convergentes identiques de focale f , est éclairé par un faisceau de lumière monochromatique provenant d'un point source S placé au foyer objet de L_1 . On place entre les deux lentilles, à mi-distance, un écran opaque D percé d'une fente rectangulaire de largeur a suivant Ox et de longueur $b \gg a$.



a) On observe-t-on l'image géométrique de S ? Décrire l'éclairement sur un écran situé dans le plan image. Quelle est la largeur du maximum principal ? On donne $\lambda = 500\text{nm}$; $a = 0,05\text{ mm}$ et $f' = 1\text{m}$.

b) Que se passe-t-il si l'on fait subir à la fente diffractante :

- une translation suivant la direction x ? Suivant la direction y ?
- une rotation dans son propre plan ?
- une dilatation ?

c) La fente étant placée comme l'indique la figure, que se passe-t-il lorsque l'on fait subir à la source S un petit déplacement suivant l'axe x_0 d'une valeur X_0 ? Suivant Oy ?

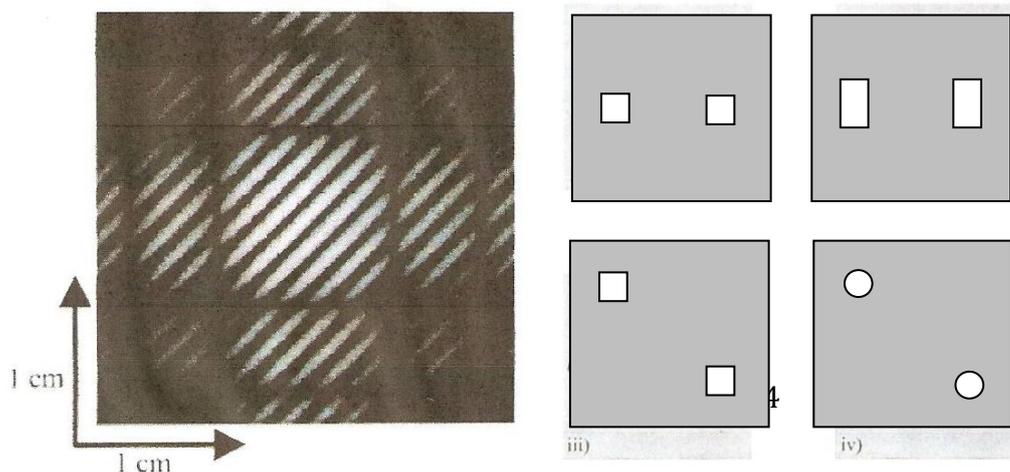
2. Etude d'une figure de diffraction :

Une pupille diffractante est constituée de deux ouvertures identiques. Elle est éclairée en incidence normale par une onde monochromatique plane de longueur d'onde $\lambda = 546\text{ nm}$. On observe la figure de diffraction ci-dessous dans le plan focal d'une lentille convergente de focale $f' = 1\text{ m}$.

Quelle est la pupille utilisée parmi les quatre proposées ? Justifier.

Evaluer les valeurs numériques des paramètres géométriques de la pupille diffractante.

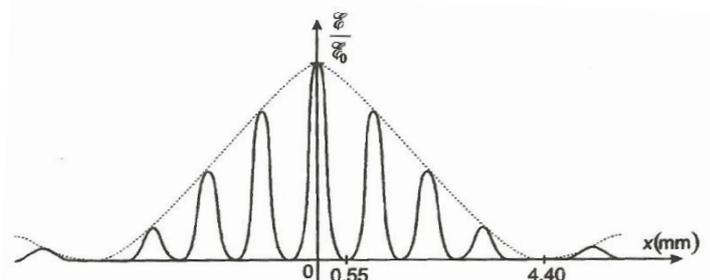
Réponses : Distance entre les trous : $a = 0,4\text{ mm}$; taille d'un trou $b = c = 0,1\text{ mm}$.



3. Observation d'une étoile (E3A PSI 03) :

Un faisceau de lumière parallèle monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 550\text{ nm}$, provenant d'une étoile, éclaire normalement un écran opaque percé de deux fentes F_1 et F_2 de grande dimension L suivant Oy et de même largeur a selon Ox .

Les centres des deux fentes sont distants de d , avec $d > a$. Dans le plan focal xOy d'une lentille de focale $f' = 2\text{m}$ et de foyer image O , un détecteur ponctuel enregistre l'éclairement aux points d'abscisse x , avec $x \ll f'$. L'éclairement



normalisé $E(x) / E_0$ enregistré par le détecteur est donné ci-dessous.

- Faire un schéma du montage.
- Déterminer a et d .
- Représenter la courbe obtenue si l'on divise d par 2, a restant constant.
- Calculer l'éclairement $E(x)$.

4. Principe de l'holographie :

On éclaire un écran de largeur $2d \gg \lambda$ et de hauteur très grande par :

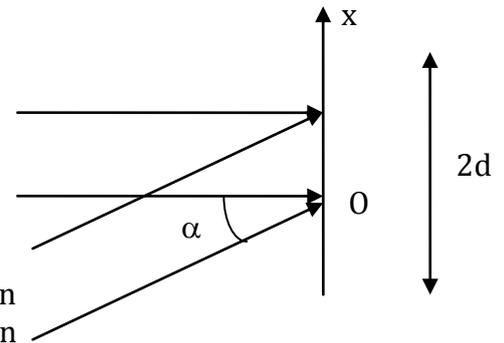
- une onde porteuse d'amplitude A , d'incidence normale ;
- une modulatrice d'amplitude nA et d'incidence α .

Les deux ondes sont cohérentes et telles que :

$$s(0) = (A + nA) \exp j\omega t.$$

a) Quelle est l'amplitude en un point de l'écran caractérisé par son abscisse x ? Quelle est l'intensité ? On choisira l'origine des phases en O .

b) On place sur l'écran une pellicule. Après développement de celle-ci, la transmission est proportionnelle à l'intensité lumineuse reçue pendant l'exposition. On éclaire ensuite cette pellicule avec l'onde porteuse seule. Que voit-on à la sortie dans une direction caractérisée par l'angle θ ?



5. Apodisation

Un faisceau de lumière parallèle monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 550$ nm, éclaire normalement un diaphragme plan percé d'une fente F de grande dimension suivant Oy et de largeur L suivant Ox ; elle est disposée dans le plan xOy .

On place contre cette fente un filtre de transmission en amplitude

- $t(x) = \cos(\pi x / L)$ pour $-L/2 < x < L/2$
- $t(x) = 0$ pour $|x| > L/2$

a) Ecrire, sous forme d'une intégrale, l'équation $s(\theta)$ de l'onde diffractée dans la direction θ .

b) Calculer l'intensité $I(u)$ dans cette direction (on posera $u = \pi L \sin \theta / \lambda$) sous la forme $I(u) = I_{\max} f(u)$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos p \exp(i p u) dp = \frac{2 \cos\left(\frac{u}{2}\right)}{1 - \frac{u^2}{\pi^2}}$$

On donne :

c) Exprimer les intensités approchées I_N du $N^{\text{ième}}$ maximum secondaire. Pour quelle valeur de N a-t-on $I_N / I_{\max} = 10^{-4}$?

d) Représenter sur un même graphe la courbe $I(u)$ et la courbe d'intensité obtenue avec une fente sans filtre. On prendra garde à la valeur de l'intensité maximale dans les deux cas.

Expliquer pourquoi l'ajout d'un tel filtre permet de distinguer deux étoiles très voisines d'intensités très différentes non résolues avec une fente parfaitement transparente (sans filtre).

Réponse : $I = I_{\max} \cos^2 u / (1 - 4u^2/\pi^2)^2$. c) $\theta_N = (2N + 1) \pi/2$ ($N \neq 0$) ; $N = 4$.

6. Luminosité des images radar :

Pour prendre une image du sol, un radar embarqué dans un avion en vol horizontal survole la terre avec une altitude constante et émet une onde de longueur d'onde $\lambda \approx 3$ cm en direction du sol avec un angle moyen de 45° par rapport à la verticale. Le même radar récupère un écho dû à la diffraction de l'onde incidente par le sol. Quelle serait la direction de diffraction maximale ? On constate que sur l'image radar les forêts paraissent beaucoup plus lumineuses que les lacs. Interpréter sans calculs.

8. Pourquoi voit-on un laser ?

On remarque qu'un laser paraît plus lumineux si on l'observe dans une direction faisant un angle $\theta_1 = \pi/4$ avec sa direction de propagation que si on l'observe dans une direction faisant un angle $\theta_2 = 3\pi/4$ avec cette direction.

Pour expliquer qu'une fraction très faible de l'éclairement du faisceau direct parvienne à l'œil alors que celui-ci n'est pas placé dans le trajet du faisceau (Danger !), on suppose que le faisceau incident est partiellement diffracté par quelques poussières en suspension dans l'air situées sur son trajet. Interpréter alors les observations et prévoir l'ordre de grandeur de la taille des poussières.

9. Apodisation : corrigé

$$s(M,t) = K' \cdot \exp(j\omega t) \iint_S t(x,y) \cdot \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP}\right] \cdot d\Sigma(P)$$

a)

b) On considère que la fente ne diffracte pas selon Oy.

On a donc :

$$\vec{u}_0 = \vec{u}_z; \vec{u} = \sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_z$$

$$\vec{OP} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$

$$s(M,t) = K' \cdot \exp(j\omega t) \int_0^b dy \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} \theta x\right] \cdot dx$$

donc :

On pose $\varphi = \pi x/L$;

$$s(M,t) = K' \cdot \exp(j\omega t) (L/\pi) \int_0^b dy \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\varphi) \exp[jm\varphi] \cdot d(\pi x/L) \text{ avec } m = 2L \sin\theta/\lambda$$

$$= K' e^{j\omega t} (bL/\pi) \frac{2 \cos(\pi L \sin\theta / \lambda)}{1 - \left(\frac{2L \sin\theta}{\lambda}\right)^2}$$

$s(M,t) =$

$$\text{On calcule alors : } I(M) = \left(\frac{bL/\pi}{1 - \left(\frac{4L \sin\theta}{\lambda}\right)^2} \right)^2 \cos^2(\pi L \sin\theta / \lambda) = I_{\max} \frac{\cos^2(\pi L \sin\theta / \lambda)}{\left(1 - \left(\frac{4L \sin\theta}{\lambda}\right)^2\right)^2}$$

Calculs ou tracé montrent que :

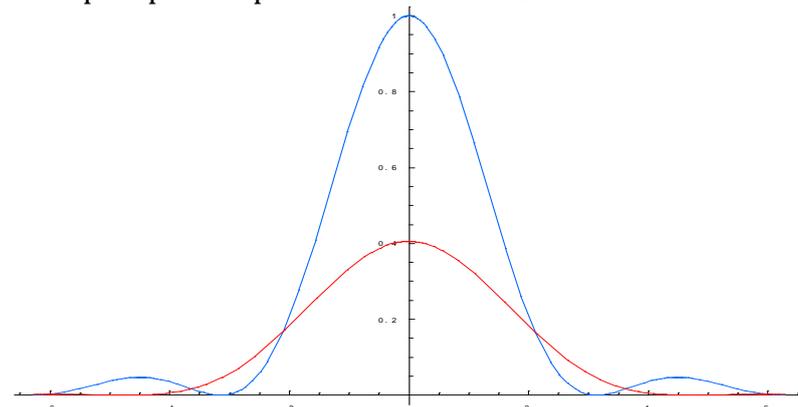
$I(M)$ s'annule pour $u = (2k+1)\pi/2$, $k \neq 0, -1$.

Le maximum principal correspond à $u = 0$;

Les maxima secondaires correspondent à $u = n\pi$, $n \neq -1, 1$.

On a donc $I_N = I_{\max} \left(\frac{1}{1 - 4(N+1)^2} \right)^2$ pour le Nième maximum secondaire.

Exemple : pour le premier maximum secondaire $N = 1$ et $I_N = 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot I_{\max}$.



$$\frac{I_N}{I_0} = 10^{-4} \Leftrightarrow N=4$$

d) Pour une fente sans filtre on a $I = I_{\max} \sin^2(u)$.

e) On a réduit l'amplitude des maxima secondaires ; il sera donc plus facile de distinguer le maximum principal de l'étoile peu intense, si son intensité est supérieure à celle du premier maximum principal de l'étoile plus intense.

CHAPITRE 5 : RESEAU OPTIQUE - PARTIE THEORIQUE

1. Présentation du réseau :

Définition : un réseau est un ensemble de fentes fines appelés **traits** du réseau, parallèles et équidistantes, situées dans un même plan et séparées par des intervalles opaques. La distance entre deux traits est appelée pas du réseau.

Outre le pas a du réseau, les principales caractéristiques sont sa largeur totale L et la largeur e de son motif élémentaire.

On caractérise souvent un réseau par le nombre de traits par unité de longueur $n = 1/a$.

Ordre de grandeur : $10^5 < n < 10^6$ traits.m⁻¹.

Application : on utilise ici un réseau 8000 LPI (lines per inch) de longueur $L = 5$ cm.

Calculer le pas de ce réseau (1 inch = 2,54 cm) et le nombre total de traits.

Les réseaux peuvent être utilisés par réflexion ou par transmission.

Fabrication des réseaux : depuis le 19^{ème}, on trace à l'aide d'un diamant des traits parallèles sur une lame de verre recouverte d'une couche métallique, formant un réseau par transmission (500 à 1700 traits/mm).

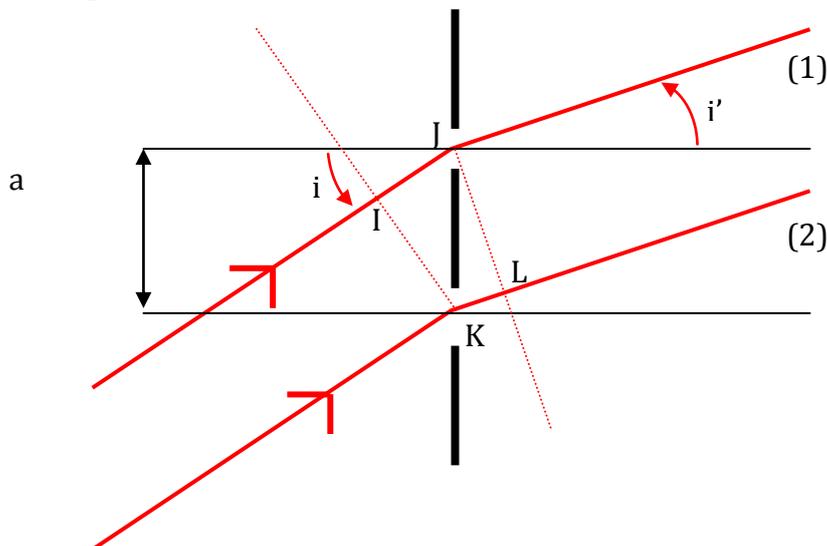
Pour des réseaux plus dispersifs, on enregistre sur une résine photosensible la figure d'interférences données par deux faisceaux laser cohérents. Après développement, la résine présente des variations périodiques d'épaisseur. Par évaporation sous vide, le réseau est recouvert d'une mince couche d'aluminium formant un réseau par réflexion.

2. Formule fondamentale du réseau.

Le réseau est utilisé dans l'air dont on prendra l'indice $n = 1$.

2.1. Utilisation par transmission :

On considère un réseau éclairé par une **onde plane** arrivant sous l'angle d'incidence i , et diffractée dans la direction i' par transmission ; les interférences sont observées en M à l'infini.



La différence de marche en M situé à l'infini, pour deux ondes issues de deux fentes successives est :
 $\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (KL) - (IJ) = a (\sin i' - \sin i)$.

Les interférences seront constructives lorsque cette différence de marche sera égale à k fois la longueur d'onde, où k est un entier relatif.

Les angles i' donnant la position des maxima d'intensité sont tels que :

$$a (\sin i' - \sin i) = k\lambda \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

k est appelé **ordre du spectre**.

Les maxima d'intensité sont appelés **maximas principaux** ; en effet il existe des maxima secondaires, peu visibles.

Pour chaque radiation, il n'existe qu'un nombre fini de maximums principaux.

Si $i = 0$, les spectres d'ordres $+k$ et $-k$ sont distribués symétriquement par rapport à la normale au réseau.

Application : combien d'ordres seront observables avec notre réseau, pour la longueur d'onde $\lambda = 546,0\text{nm}$:

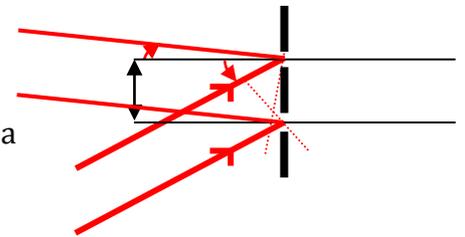
a) en incidence normale ?

b) si l'angle d'incidence vaut $i = 30^\circ$?

2.2. Utilisation par réflexion :

Les réseaux peuvent être également utilisés par réflexion ; dans ce cas la formule fondamentale s'écrit :

$$a (\sin i' + \sin i) = k\lambda \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$



3. Déviation due au réseau :

3.1. Définition : $D = |i' - i|$.

Contrairement au prisme, la déviation est plus grande pour le rouge que pour le violet.

Utilisation du réseau au minimum de déviation ; intérêt expérimental.

La déviation est extrémale lorsque :

$$dD / di = 0$$

$$\Leftrightarrow di' / di - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow di' = di$$

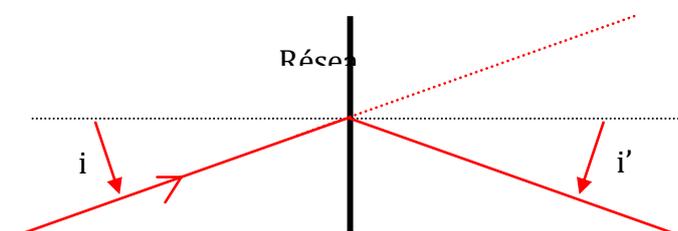
La différenciation de la relation fondamentale donne :

$$\cos i' \cdot di' = \cos i \cdot di$$

La déviation est donc extrémale pour $\cos i' = \cos i$.

La solution $i' = i$ correspond à la tache centrale non diffractée (ordre zéro).

Le seul extrémum nécessite donc $i' = -i$, ce qui signifie que le plan du réseau est bissecteur des rayons incident et diffracté. On montre qu'il s'agit d'un minimum.



On obtient finalement :

$$k \lambda / a = \sin(D_m/2)$$

Application : calculer le minimum de déviation pour notre réseau utilisé dans le second ordre avec $\lambda = 546,0 \text{ nm}$

c) Mélange des ordres :

A partir d'un certain ordre, les raies correspondant aux grandes longueurs d'onde dans l'ordre k peuvent "rattraper" les raies correspondant aux petites longueurs d'onde d'ordre $k+1$; il y a alors mélange des ordres.

Application : on se place en incidence normale ; à partir de quel ordre la raie rouge $\lambda_1 = 623,4 \text{ nm}$ du mercure dépasse-t-elle la raie violette $\lambda_2 = 404,6 \text{ nm}$?

3. Principe des mesures spectroscopiques :

On utilise un goniomètre, instrument de mesure d'angles, dont le principe a été vu en Sup.

La détermination d'une longueur d'onde nécessite (outre les angles) la connaissance du pas a et de l'ordre observé ; on tire alors λ de la relation fondamentale.

Le pas a étant à priori inconnu, on utilise une lampe spectrale dont le spectre est connu avec précision pour cette détermination.

10. Les différents types de réseau :

Outre le réseau plan utilisé au laboratoire, on trouve principalement deux types :

- les réseaux d'amplitude ; la transmittance est réelle ;
- les réseaux de phase : la transmittance est complexe, de module 1, exemples : réseau blazé, réseau acousto-optique.

11. Complément hors programme : pouvoir de résolution du réseau.

Il est défini par $R = \lambda / d\lambda$ où $d\lambda$ est le plus petit écart en longueur d'onde observable dans le plan d'observation autour de la longueur d'onde λ .

On montre que pour un réseau plan $R = k N$.

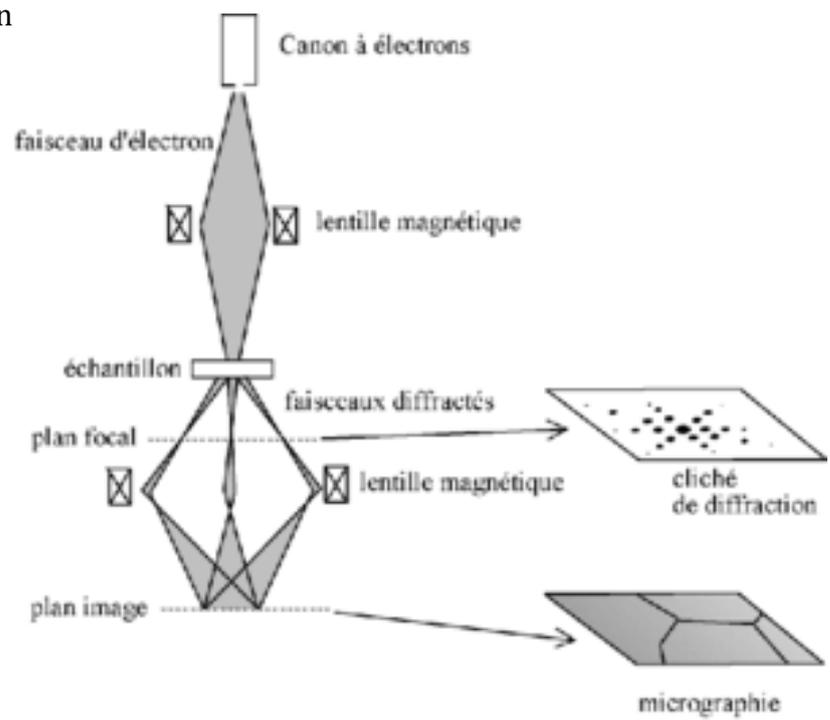
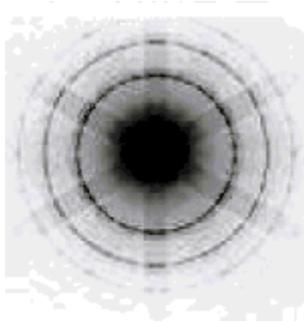
Ordre de grandeur : plusieurs milliers.

Remarque: pour un prisme (labo) : $R = 4000$.

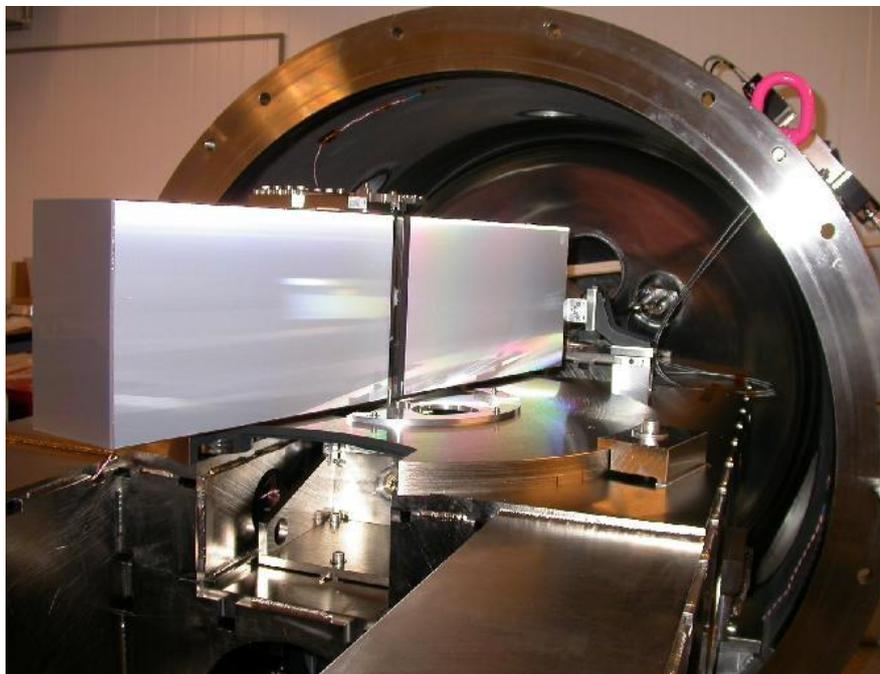
Application : Notre réseau a une longueur totale $L = 5 \text{ cm}$? A partir de quel ordre peut-on pour séparer le doublet du sodium, dont les longueurs d'onde sont $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$?

Applications du réseau :

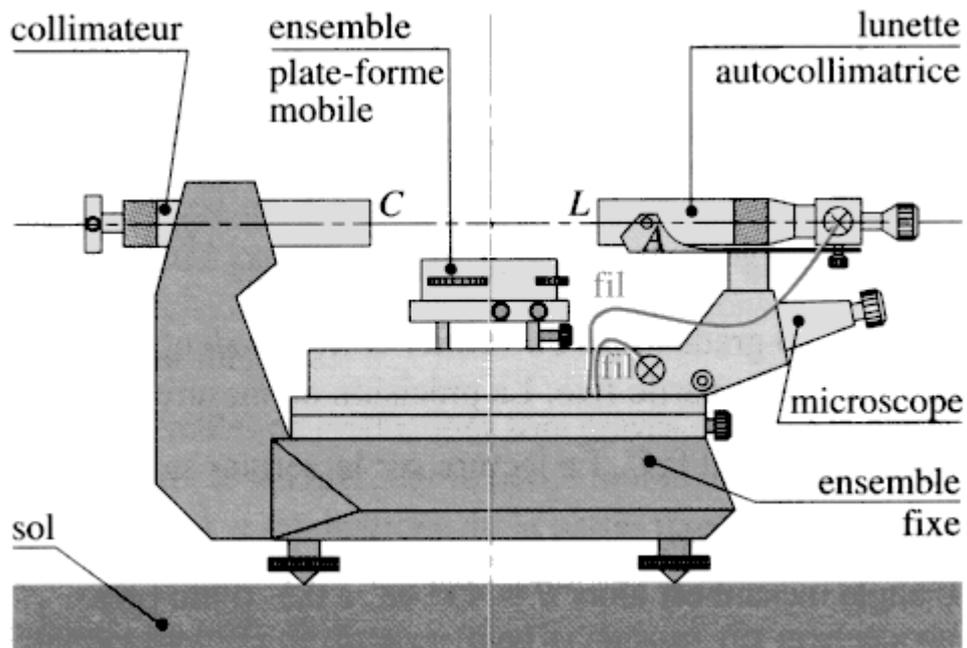
Microscope électronique en transmission :



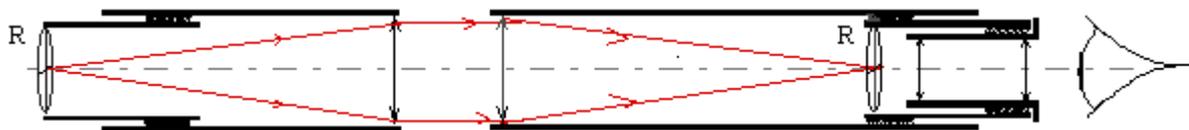
Réseau de l'instrument HARPS utilisé pour la détection d'exoplanètes (dimension 20*80 cm)



GONIOMETRE



Principe de réglage du collimateur et de la lunette



SPECTROSCOPIE A RESEAU : REGLAGE DU GONIOMETRE

1. Présentation du spectroscopie.

Les spectroscopes à réseaux sont identiques aux spectroscopes à prisme.

On distingue principalement :

un disque métallique horizontal gradué, permettant de repérer la position du viseur et du plateau, à une minute d'angle près, grâce à un vernier ;

un plateau réglable horizontalement sur laquelle on placera le réseau ;

un collimateur équipé d'une fente source réglable, derrière laquelle on place la source ;

un viseur, qu'on réglera à l'infini ;

des vis de réglage en rotation , deux pour la platine du réseau, deux pour la lunette : pour chaque couple de vis, l'une sert à bloquer, l'autre permet un **petit** mouvement autour de la position bloquée.

2. Réglage du goniomètre.

2.1. Principe :

Le réseau doit être éclairé par une onde plane ; la fente source doit donc être placée dans le plan focal objet du collimateur.

Les rayons émergents du réseau dans une direction i' interfèrent à l'infini : on observe donc ces interférences et l'image de la fente source, dans le plan focal image de l'objectif de la lunette de visée.

Pour permettre les mesures, on a placé dans l'objectif un réticule ; réticules et image de la fente source sont observées avec un oculaire.

2.2. Réglage grossier :

Régler toutes les vis à mi-course.

Régler à l'oeil nu l'horizontalité de la lunette, du collimateur et de la platine du réseau,

2.3. Réglage de l'oculaire pour voir nettement le réticule :

Allumer la lampe d'autocollimation et interposer la lame semi-réfléchissante en poussant le petit ergot placé sur la lunette, cela pour éclairer le réticule.

Mettre l'oculaire au point - par tirage - pour voir nettement le réticule (on fera l'observation sans lunettes). Pour deux observateurs différents seul ce réglage devra être modifié.

2.4. Réglage de la lunette par autocollimation pour placer le réticule dans le plan focal image de la lunette :

Placer sur le plateau un prisme dont une face soit perpendiculaire à l'axe de la lunette ; cette face va jouer le rôle de miroir, le réglage se faisant par autocollimation.

Ajuster le réglage de la lunette pour que l'image du réticule soit dans le plan du réticule.

Lorsque l'on bouge l'oeil de gauche à droite, les deux images ne doivent pas se déplacer l'une par rapport à l'autre.

Le réticule est alors dans le plan focal image de la lunette.

2.5. Réglage du collimateur :

Oter le prisme et supprimer l'éclairage du réticule.

Placer la lampe spectrale à vapeur de mercure devant la fente du collimateur, légèrement ouverte.

Chercher avec la lunette l'image de la fente.

Corriger éventuellement l'horizontalité de la lunette pour que toute la hauteur de la fente soit visible.

Régler le collimateur pour avoir une image nette.

2.6. Repérage de l'angle de déviation nulle :

Ouvrir la fente en regardant dans l'objectif, et noter qu'une seule de ses deux mâchoires se déplace ; c'est donc l'autre, fixe, qui servira de référence lors des visées.

Bloquer la lunette et ajuster le fil vertical du réticule sur le bord de la mâchoire fixe.

Mesurer l'angle θ_0 correspondant.

Refaire cette mesure deux fois et noter la valeur de l'angle de la lunette sur le plateau, soit θ_0 .

Quelle est l'incertitude sur cet angle ?

3. Réglage de la position du réseau :

Attention : le réseau est fragile et coûteux, on le manipulera avec soin !

3.1. Réglage de la verticalité du réseau :

Placer la lunette sensiblement à angle droit par rapport au collimateur.

Placer le réseau sensiblement vertical dans son support sur le plateau.

Fermer la fente d'entrée du collimateur et allumer la lampe d'autocollimation de la lunette.

En pivotant délicatement le plateau, chercher l'image du réticule réfléchi par le réseau.

Bloquer le plateau dans cette position.

Régler l'orthogonalité du réseau avec la lunette en jouant pour moitié sur la vis de réglage en hauteur de la lunette et pour moitié sur les vis de réglage horizontal de la platine, afin d'amener l'image du réticule en coïncidence avec le réticule.

Faire tourner la lunette de 180° et recommencer l'opération précédente.

Reprendre ces opérations jusqu'à ce que le réticule coïncide avec chacune de ses images données par les deux faces du réseau.

3.2. Réglage de l'incidence normale :

Eteindre la lampe d'autocollimation et ouvrir la fente du collimateur.

Pivoter la lunette et la placer à l'angle θ_0 (on doit alors visualiser l'ordre zéro).

Fermer la fente du collimateur, allumer l'autocollimation.

Pivoter la platine pour amener l'image du réticule en coïncidence avec le réticule.

Bloquer et terminer avec le petit mouvement.

Le réseau est maintenant parfaitement perpendiculaire au faisceau incident

RESEAUX – EXERCICES

1. Distance entre deux raies :

On éclaire normalement un réseau plan comportant 500 traits/mm au moyen d'une lumière contenant les radiations $\lambda_1 = 600$ nm et $\lambda_2 = 610$ nm.

La lumière diffractée est reçue sur une lentille de distance focale $f = 2$ m.

a) Où observe-t-on le phénomène de diffraction ?

b) De quelle distance les raies correspondant aux deux radiations sont-elles séparées sur l'écran dans le premier ordre ?

Réponses : $d = 11,55$ mm.

2. Réseau au minimum de déviation :

Un réseau ayant m traits/mm est éclairé par la raie verte du mercure ($\lambda = 546$ nm). On l'utilise par transmission dans le deuxième ordre et on trouve pour le minimum de déviation $D_m = 25^\circ 14' 7''$.

On utilise par la suite ce réseau dans le troisième ordre, au minimum de déviation pour la radiation jaune moyenne du sodium (doublet $\lambda_1 = 589,0$ nm ; $\lambda_2 = 589,6$ nm).

Quelle est la valeur de m ?

Déterminer la valeur de cet angle de déviation minimale.

Exprimer l'écart des directions correspondant aux maxima principaux des deux raies du sodium.

3. Caractéristiques optiques des disques audio numériques (CCP PSI 00)

On s'intéresse au réseau par réflexion constitué par un disque audio numérique. On prendra pour cela les notations suivantes : a période du réseau, i angle d'incidence, θ angle de réflexion, (figure 2), λ longueur d'onde et m l'ordre de la diffraction.

Pour simplifier on prendra comme domaine visible les longueurs d'onde λ variant de 400 nm à 800 nm. La période du réseau $a = 1,6$ μm , l'angle incident $i = -10^\circ$.

a) Calculer les deux valeurs extrêmes θ_{\min} et θ_{\max} des angles réfléchis correspondant aux deux extrêmes de longueur d'onde du spectre visible pour l'ordre $m = 1$.

b) On place le disque pour que i soit encore égal à -10° , la source de lumière est supposée très éloignée. La lumière incidente sera donc parallèle et on supposera que le faisceau lumineux est assez large pour éclairer complètement un rayon du disque. La figure 3 rappelle la largeur l de la partie enregistrée (33 mm) qui agit donc comme un réseau. A quelle distance D de notre œil devra-t-on approcher ce disque pour commencer à voir l'ensemble du spectre visible sur un rayon de la surface enregistrée de ce disque ?

Réponses : $\theta_{\min} = 25,0^\circ$; $\theta_{\max} = 42,3^\circ$; $D = 74$ mm.

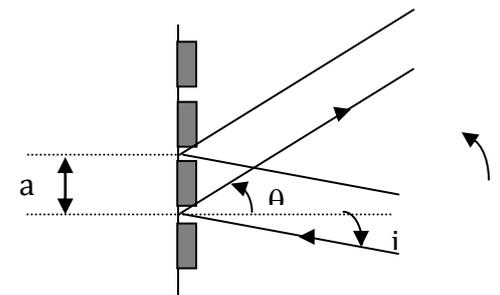


FIGURE 2

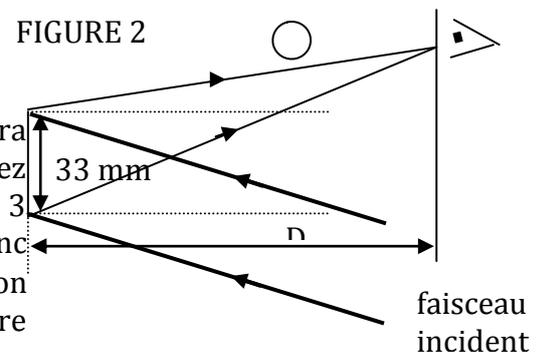


FIGURE 3

4. Résolution et largeur de fente :

Le collimateur d'un spectromètre à réseau est constitué d'une fente de largeur e et d'une lentille de focale $f = 10$ cm ; le réseau utilisé a 1000 traits. mm^{-1} .

Déterminer la largeur angulaire $\Delta\alpha$ des raies au voisinage du minimum de déviation.

On étudie le doublet du sodium dans l'ordre 2, au minimum de déviation qui est de l'ordre de 70° . En déduire l'écart angulaire entre deux raies voisines de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 .

Quelle doit être la largeur de la fente d'entrée pour résoudre le doublet jaune du sodium dont les deux raies sont distantes de $0,6$ nm ?

Réponse : $e = 0,073$ mm.

5. Réseau par réflexion :

Un système optique comprend un réseau plan réflexion de $n = 1200$ traits par mm, deux identiques F_1 et F_2 très fines et coplanaires, et miroirs plans disposés suivant la figure .

L'ensemble est placé dans l'air, dont l'indice confondu avec celui du vide.

Un pinceau incident parallèle à AI , issu de F_1 réfléchi par M_1 , atteint le réseau sous l'incidence i_0 . Calculer i_0 .

Le faisceau a une longueur d'onde $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, l'on observe à l'infini les images de F_1 dans direction faisant un angle i' avec la normale au réseau. Faire une figure mettant en évidence i_0 et i' .

Combien peut-on, théoriquement, observer de faisceaux diffractés ; calculer les angles i' correspondants.

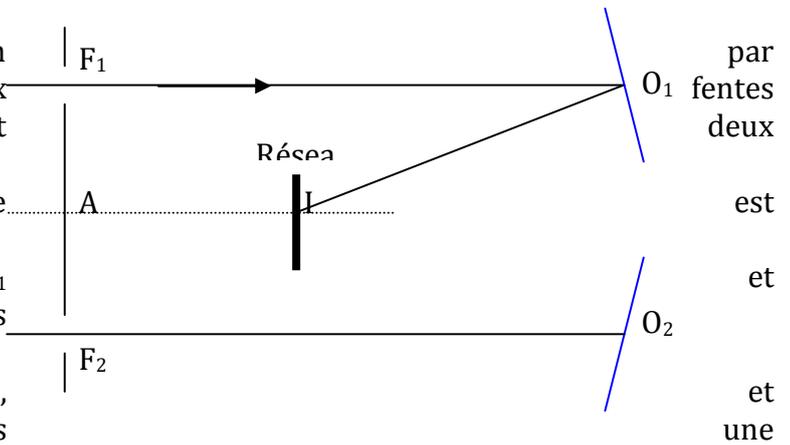
On règle le réseau pour que le faisceau diffracté par la région centrale et d'ordre 0 passe, après réflexion sur M_2 , par F_2 . Comment faut-il disposer M_2 ?

On tourne le réseau d'un angle α_0 , autour de l'axe I contenu dans le plan du réseau, de sorte que l'ordre -1 passe par la fente F_2 . Quel doit être le sens de rotation du réseau ? Que vaut α_0 ?

Calculer les valeurs de i et i' après ce réglage.

Données : $L = 30 \text{ mm}$; $F_1O_1 = 305 \text{ mm}$; $AI = 55 \text{ mm}$; $AF_1 = AF_2 = 38 \text{ mm}$.

Réponses : a) $i_0 = 8,64^\circ$ c) 3 ordres e) $\alpha_0 = 17,7^\circ$.



6. Réseau blazé :

L'intensité diffractée par un réseau est maximale dans l'ordre zéro, ce qui ne présente aucun intérêt. Le réseau blazé (échelette) permet de concentrer l'intensité diffractée dans un ordre non-

Un réseau à échelette est obtenu en traçant sur une surface métallique des dents de scie dont la coupe est représentée ci-dessus. Les bandes utiles réfléchissantes ont pour largeur b , sont inclinées de α , et constituent un réseau de N bandes de pas $a = b \cos \alpha$.

On éclaire le réseau à l'aide d'un faisceau monochromatique parallèle incident sous l'angle i , et l'on observe la lumière diffractée dans la direction i' .

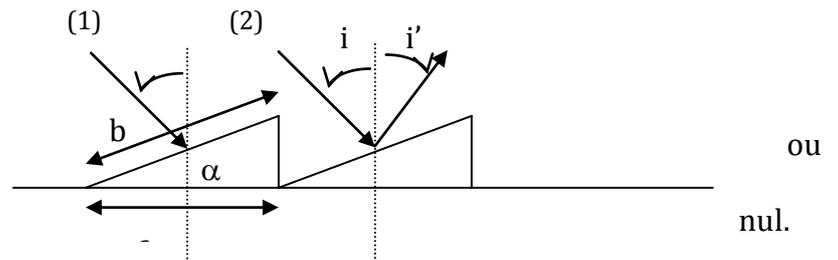
Les angles i et i' sont mesurés par rapport à la normale au plan du réseau.

Chaque bande de largeur b diffracte. Dans quelle direction i'_0 observe-t-on le maximum de la fonction de diffraction ?

Deux rayons frappant deux motifs successifs sous la même incidence i et émergeant sous l'angle i' interfèrent. Quelle est la différence de marche entre ces deux rayons ? A quelle condition observe-t-on un maximum de l'éclairement du aux interférences ?

On veut que le maximum de diffraction du a un motif coïncide avec l'ordre d'interférences k . Quelle égalité doit être satisfaite entre α , a , i , k et λ ?

Le réseau utilisé comporte 200 motifs/mm. Il est utilisé en autocollimation ($i = 0$). Il concentre l'énergie dans l'ordre 4. En déduire l'angle α appelé angle de blaze.



7. Corrigé réseau blazé :

Le maximum de diffraction s'observe dans la direction de l'image géométrique, soit :

$$(i - \alpha) = -(i'_0 - \alpha) \text{ avec } \alpha > 0 \text{ et } i'_0 < 0, \text{ d'où } i'_0 = 2\alpha - i.$$

La différence de marche entre les rayons (1) et (2) vaut $\delta = a (\sin i' + \sin i)$; on observe un maximum de l'éclairement si $\delta = k\lambda$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On doit avoir : $\sin(2\alpha - i) + \sin i = k\lambda/a$;

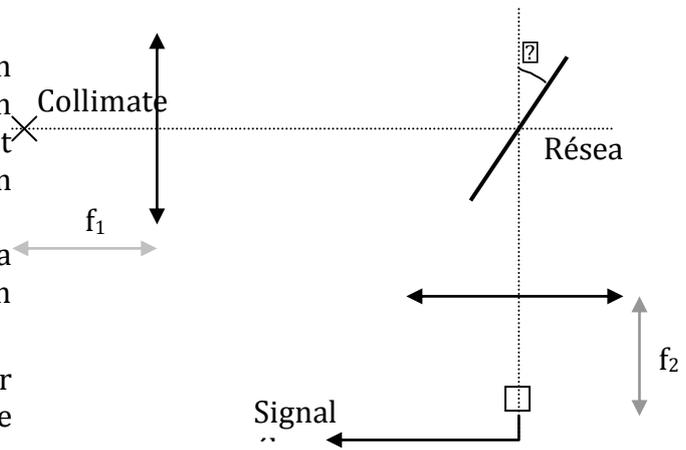
$$\alpha = \frac{1}{2} \text{Arcsin}(4 \lambda/a) = 11,5^\circ .$$

8. Spectrophotomètre :

Un spectrophotomètre est constitué d'un collimateur, d'un réseau par transmission tournant, et d'un objectif dont l'axe est perpendiculaire à l'axe du collimateur. Un détecteur est placé au foyer de l'objectif.

Tracer la courbe d'étalonnage donnant la longueur d'onde au centre du détecteur en fonction de l'angle α .

Quel est l'intervalle utile en α si l'on veut balayer le spectre visible dans l'ordre 2 avec un réseau de 500 traits par mm ?



9. Pouvoir dispersif d'un réseau et d'un prisme :

Un réseau de pas a est éclairé en incidence normale par une lumière polychromatique. $D(\lambda)$ étant l'angle de déviation de l'onde de longueur d'onde λ , déterminer son pouvoir dispersif $\left| \frac{dD}{d\lambda} \right|$ au voisinage d'une longueur d'onde λ en fonction de λ , de l'ordre k et du pas a .

Un prisme d'angle $A = 30^\circ$ est taillé dans un verre dont l'indice dépend de la longueur d'onde selon la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + B/\lambda^2 \text{ avec } A = 1,500 \text{ et } B = 0.004 \mu\text{m}^2$$

La lumière incidente, polychromatique, a une incidence normale sur la face d'entrée. Calculer la déviation $D(\lambda)$, puis le pouvoir dispersif.

Déterminer le nombre de traits par mm d'un réseau utilisé en incidence normale dont le pouvoir dispersif dans l'ordre 1 est du même ordre que celui du prisme au voisinage de $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$.

Réponse : 50 Traits.mm⁻¹.

10. Critère de Rayleigh :

Le pouvoir de résolution d'un réseau défini par $R = \lambda/d\lambda$ obéit au critère de Rayleigh : deux raies sont séparées si le bord de la bande de diffraction du maximum principal de l'une coïncide avec l'axe du maximum principal de l'autre (cf figure).

On considère un réseau par transmission comportant N traits.

Soit i' l'angle de diffraction et i l'angle d'incidence.

L'intensité diffractée par un réseau dans la direction i' est :

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \left[\frac{\sin(N\varphi/2)}{N \sin(\varphi/2)} \right]^2 \text{ où } \varphi = 2\pi a (\sin i' - \sin i) / \lambda$$

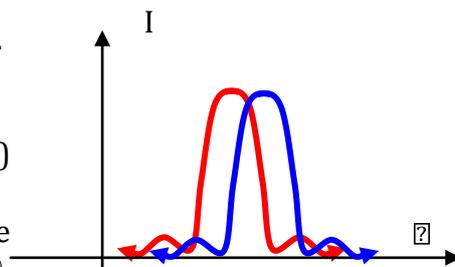
a) Quelle est la variation de φ (déphasage) entre l'axe et le bord du maximum principal d'ordre k de la longueur d'onde λ ? En déduire la variation di'_k correspondante .

b) Quel est la variation de l'angle di'_λ de la lumière diffractée entre les maximum principaux d'ordre k des longueurs d'onde λ et $\lambda+d\lambda$?

c) En déduire que $R = kN$.

d) On utilise un réseau comportant $N = 750$ traits pour résoudre le doublet du sodium ($\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$; $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$). A partir de quel ordre peut-on le résoudre ?

Réponses : a) $|di'_k| = \lambda / (N \cos i'_k)$; b) $|di'_\lambda| = k \cdot d\lambda / \lambda \cos i'_k$.



COMPLEMENT : LE LASER

Références de problèmes :

X-Cachan 2010, Centrale TSI 08, ENS MP/PC 06, Centrale TSI 06, E3A PC 05, Mines-Ponts MP 98, ENS Lyon Cachan 97, Banque PT 97.

Bibliographie :

Bulletin de l'Union des Physiciens N°721 : R.Farcy ; Analogie oscillateur électronique-laser.

D.Dangoisse, D.Hennequin et V. Zehnlé-Dahoui, Les lasers, Dunod.

Le **laser** est un appareil inventé en 1960 par Maiman ; son nom est l'acronyme de « *light amplification by stimulated emission of radiation* » (en français : « amplification de la lumière par émission stimulée de radiation ») ; il fonctionne en émettant un rayonnement amplifié par émission stimulée et produit une lumière spatialement et temporellement cohérente.

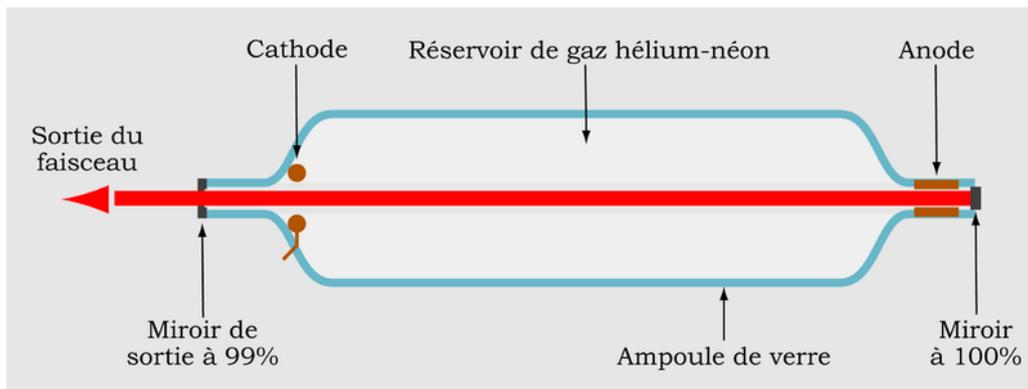
1. Caractéristiques typiques : laser He-Ne

$P \approx 2 \text{ mW}$; $\lambda = 632,8 \text{ nm}$; divergence du faisceau 1 mrad ; rayon du faisceau 0,4 mm.

Que vaut la puissance surfacique ? La comparer à celle reçue du Soleil.

En déduire l'amplitude du champ électrique émis en utilisant un modèle d'OPPH dans le vide.

2. Description :



Une source laser associe un milieu amplificateur à une cavité optique, encore appelée résonateur, généralement constituée de deux miroirs, dont au moins l'un des deux est partiellement réfléchissant : une faible partie de la lumière sort de la cavité et l'autre partie est réfléchie vers l'intérieur de la cavité laser.

Le milieu doit être excité, souvent par une décharge électrique.

Le milieu amplificateur peut être gazeux (laser He-Ne du labo), liquide (laser à colorant), ou solide (laser à cristaux).

3. Pompage optique ; inversion de population ; émission stimulée (ou induite)

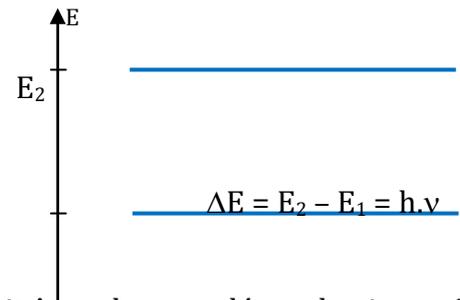
3.1. Transitions entre deux niveaux énergétiques d'un atome :

Trois phénomènes :

Absorption d'un photon de fréquence ν ;

Emission spontanée d'un photon de fréquence ν ;

Emission stimulée : par un photon de fréquence ν : dans ce cas le photon émis a les mêmes caractéristiques que le photon incident.

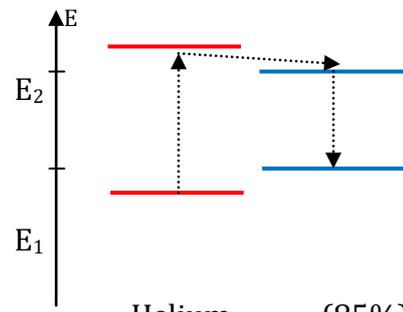


Pour que l'émission stimulée domine l'absorption, le niveau 2 doit être plus peuplé que le niveau 1 : or à l'équilibre thermique, les populations sont données par le facteur de Boltzmann, et le niveau 1 est le plus peuplé ; on doit donc réaliser une inversion de population par pompage optique.

3.2. Pompage optique (Kastler 1950) :

La décharge électrique provoque le remplissage du niveau E₃, légèrement plus élevé que le niveau E₂.

Par collisions, les atomes de néon sont excités au niveau E₂ et réalisent l'inversion de population du néon.



3.3. Résonateur :

D'autres raies peuvent être émises dans le milieu.

C'est la cavité optique qui filtre les ondes émises ; en effet la condition de résonance s'écrit : $2 \cdot nL = k \cdot \lambda = k \cdot c / \nu \Leftrightarrow \nu = k \cdot c / 2nL$

L'intervalle entre deux fréquences de résonance, appelé intervalle spectral libre, est $\Delta \nu = c / 2nL$. Pour un laser He-Ne courant, $L = 20$ cm et $n = 1$, d'où $\Delta \nu = 750$ MHz.

La cavité est stable si les rayons lumineux y restent confinés ; la plus utilisée est la cavité hémisphérique, formée d'un miroir plan et d'un miroir concave.

4. Utilisations du laser :

Transfert d'information

[Téledétection](#) ; [Collimation](#) d'instrument optique (exemple : télescope newton) ; [Granulométrie](#) et [vélocimétrie](#)

[Holographie](#) ; Lecture et enregistrement de support optique numérique ([CD](#), [DVD](#), Laser Disc...)

[Mesure](#) de distance ([télémétrie](#) par [interférométrie](#)) ; Télécommunications via réseaux de [fibres optiques](#)

[Transmission](#) inter-satellitaire [Vibrométrie](#)

[Désignateur laser](#) de cibles lors d'attaques aériennes

Étude de l'atmosphère ([Lidar](#))

Transfert de puissance

[Refroidissement d'atomes par laser](#) ; [Imprimerie](#) : périphériques d'écriture de plaques [offset](#) ([CtP](#))

[Caractérisation des matériaux](#) par [ellipsométrie](#) ou [spectroscopie](#)

Procédés laser et matériaux

[Fusion superficielle](#) de matériaux ; [Soudure](#) de matériau homogène ou hétérogène ; [Découpe](#)

Décapage de surface ; Durcissement de surface

Applications Médicales

[Ophtalmologie](#) ; [Dermatologie](#) : [épilation laser](#), [détatouage laser](#),... ; [Dentisterie](#) : [laser dentaire Erbium](#), [laser dentaire YAP](#) ; [Physiothérapie](#) (débridement) ; [Trépanation](#)

Nucléaire

[Fusion nucléaire](#) contrôlée [laser Mégajoule](#)

Applications militaires

[Armes](#) anti-[satellite](#), anti-[missile](#), [incapitantes](#)... ([Boeing YAL-1](#) ; [IDS](#) dit [Programme StarWars](#))
[Pod](#) de [désignation laser](#)

Artistique

Spectacle « [son et lumière](#) » ; [Harpe laser](#)

LASER : EXERCICES

1. À propos de l'émission stimulée (Centrale TSI 08) ;

La loi de distribution de Maxwell-Boltzmann permet de connaître le nombre d'atomes N_1 (ou de molécules) d'énergie E_1 dans un système gazeux en équilibre thermique avec un thermostat à la température T :

$$N_1 = K \cdot \exp(-E_1/kT).$$

où $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann.

1) Dédurre le rapport N_1/N_0 où :

- N_1 : nombre d'atomes dans l'état excité d'énergie E_1 .
- N_0 : nombre d'atomes dans l'état fondamental d'énergie E_0 .

2) Que vaut ce rapport à la température $T \rightarrow 0 \text{ K}$? Était-ce prévisible ? Justifier. Que devient ce rapport à très haute température ? Peut-il être égal à l'unité ? Justifier.

3) Sachant que l'énergie d'un photon associé à une onde de fréquence ν est $E = h \cdot \nu$, quelle est l'énergie d'un photon associé à une onde de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ que l'on assimilera à la désexcitation d'un atome du niveau d'énergie E_1 vers le fondamental ? Calculer alors, et commenter, le rapport N_1/N_0 pour la température $T = 298 \text{ K}$? (On rappelle que $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$).

Pour passer de l'état énergétique fondamental E_0 à l'état énergétique excité E_1 , l'atome peut absorber de l'énergie sous forme radiative, c'est-à-dire absorber un photon d'énergie $\Delta E = E_1 - E_0$.

4) On considère un système gazeux comportant N atomes, soumis à un flux lumineux de densité énergétique $u(\nu)$. La variation élémentaire $dN_{1\text{abs}}$ du nombre d'atomes qui peuplent l'état excité d'énergie, lorsque le système est soumis au flux lumineux pendant un temps dt , est proportionnel au nombre N_0 d'atomes dans l'état fondamental, présents dans le milieu, au temps d'exposition et à la densité énergétique du flux photonique. Établir l'expression de $dN_{1\text{abs}}$ en notant C la constante de proportionnalité qui intervient dans cette expression.

5) D'autre part, les états d'énergie supérieure au fondamental sont instables et l'atome perd, au bout d'un temps plus ou moins long, spontanément l'énergie qu'il a acquise lors de l'absorption du photon. On admet que la variation élémentaire d'atomes $dN_{1\text{em}}$ de l'état excité, due à ce processus, est proportionnelle au nombre d'atomes dans l'état excité et au temps d'observation. Établir l'expression de $dN_{1\text{em}}$ en notant A la constante de proportionnalité.

6) Si les N atomes ont été placés dans une enceinte éclairée par un faisceau lumineux (flux de photons d'énergie $\Delta E = E_1 - E_0$), à l'équilibre, le nombre d'atomes dans l'état excité doit rester constant. Montrer que cet équilibre se traduit par $N_1/N_0 = -C u(\nu) / A$.

7) Sachant que la densité d'énergie est donnée par la relation : $u(\nu) = D(\nu) [\exp(h\nu/kT) - 1]^{-1}$, que devient le rapport N_1/N_0 ?

Ce résultat est-il compatible avec la distribution de Maxwell-Boltzmann traitée précédemment ?

Einstein fait l'hypothèse de l'existence d'une émission supplémentaire qu'il appelle émission induite. Le nombre d'atomes qui se désexcitent par ce processus est donné par la relation suivante : $dN_{1\text{ind}} = BN_1 u(\nu) dt$.

8) Montrer que cette hypothèse permet de lever la contradiction rencontrée dans la question précédente sous réserve que A , B et $D(\nu)$ vérifient une relation que l'on déterminera.

Corrigé : A propos de l'émission stimulée

1 $N_1/N_0 = \exp(-(E_1 - E_0)/kT)$

2 Quand T tend vers 0, N_1 tend vers 0 : les atomes sont tous dans leur état fondamental, A haute température, N_1 tend vers N_0 : tous les atomes sont dans un état excité ; $N_1 = N_0$ est impossible.

3 $E_{\text{photon}} = h \nu = h c / \lambda$ d'où $E_{\text{photon}} = 1,87 \cdot 10^{-19} \text{ J} = E_1 - E_0$

$N_1/N_0 = 1,8 \cdot 10^{-20}$: rapport extrêmement faible.

4. $dN_{1\text{abs}} = C N_0 u(\nu) dt$ 5. $dN_{1\text{em}} = A N_1 dt$

6. Le nombre d'atomes doit rester constant donc $dN_{1\text{abs}} = -dN_{1\text{em}}$ d'où $N_1/N_0 = -C u(\nu)/A$

7. En remplaçant $u(\nu)$: $N_1/N_0 = -C D(\nu) (\exp(h\nu/kT) - 1)^{-1}/A$

Ce résultat n'est pas compatible avec la distribution de Maxwell-Boltzmann

8. Le nombre d'atomes doit rester constant donc $dN_{1\text{abs}} = -dN_{1\text{em}} - dN_{1\text{ind}}$

$$CN_0 u(v)dt = -A N_1 dt - BN_1 u(v)dt$$

$$N_1/N_0 = -C u(v)/(A+Bu(v)) = -C D(v)/[BD(v)+A(\exp(h_{\text{Planck}} v/kT)-1)]$$

On retrouve la forme de la distribution de Maxwell Boltzmann si $A = B D(v)$

2. Largeur d'une raie laser :

La largeur de la raie laser du laser He-Ne est principalement due à l'effet Doppler.

Soit v_x la vitesse d'un atome selon x dans la cavité ; la fréquence émise dans son référentiel propre est ν_0 .

La fréquence vue dans le référentiel de l'observateur est $\nu = \nu_0 / (1 - v_x/c)$ où c est la célérité de la lumière.

D'après la statistique de Boltzmann, la répartition des vitesses obéit à la loi :

$$dN = K \cdot \exp(-mv_x^2/2kT) dv_x$$

qui représente le nombre d'atomes de néon de vitesses comprises entre v_x et v_x+dv_x .

1) Tracer la courbe dN/dv_x et calculer sa largeur à mi-hauteur Δv_x .

2) En déduire que la largeur Doppler de la raie laser est $\Delta \nu_{\text{Doppler}} = \frac{2\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} \ln 2}$.

3) La température du néon est $t = 120^\circ\text{C}$ et sa masse molaire $M = 20 \text{ g.mol}^{-1}$. Calculer $\Delta \nu_{\text{Doppler}}$ et commenter.

Réponse : $\Delta \nu_{\text{Doppler}} = 1500 \text{ MHz}$.

3. Facteur de qualité d'une cavité laser :

On le définit par $Q = 2\pi \frac{\text{Energie stockée dans la cavité}}{\text{Energie perdue par période}}$.

1) Le coefficient de réflexion des miroirs en énergie valant R_1 et R_2 , montrer que $Q = 2\pi \frac{2L}{\lambda} \frac{1}{[1 - R_1 R_2]}$.

2) Effectuer l'application numérique pour $L = 20 \text{ cm}$; $R_1 = 1,00$; $R_2 = 0,99$.

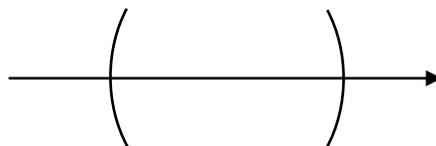
3) En déduire la largeur cavité $\Delta \omega_c$.

4. Cavité optique :

Les deux miroirs de la cavité sont des miroirs supposés sphériques et parfaitement réfléchissants .

On considère que l'on peut décrire le comportement de l'onde électromagnétique par les lois de l'optique géométrique et que l'on travaille dans le cadre de l'approximation de Gauss.

Les deux miroirs, qui réalisent une cavité optique, sont identiques, concaves et placés l'un par rapport à l'autre de façon à ce que leurs foyers respectifs soient confondus avec le centre de la cavité optique.



1) On suppose que l'axe optique est confondu avec le rayon moyen et qu'il est orienté dans le sens de propagation de la lumière. Rappeler la formule de conjugaison pour un miroir sphérique de rayon R , de sommet S et de centre C . Calculer le grandissement.

2) On considère un objet placé contre la surface réfléchissante de l'un des miroirs. Construire l'image de cet objet après un aller-retour puis deux de la lumière. Quel est l'intérêt de cette configuration ?

QUELQUES REFERENCES DE PROBLEMES :

2012 :

CCP 1 PC : verre a sake (optique géométrique).

CCP 2 PC : spectroscopie à prisme et à réseau (avec optique physique).

MinesPonts PC 1 : propagation en milieu non homogène (optique géométrique).

2011 :

ENS Ulm PC 2011 : analyse d'un mirage : pas trop difficile mais calculatoire.

ENS ULM PC 2011 : réfraction astronomique et dispositifs d'invisibilité.

2010 :

CCP MP : miroirs plans

Banque PT : prisme et arc-en-ciel

Capex externe : étude d'une paire de jumelles

2009 :

Centrale PSI 1 09 : optique géo.

MinesPonts PC 2 : rayon vert.

2007 :

CCP PC 1 07 : jeux d'eau

Capex 05 : modélisation d'un microscope ;

CP PC 05 : arc-en-ciel ;

CCP PC 04 : prisme.