INTRODUCTION AU MONDE QUANTIQUE - PCSI

1. L'effet photoélectrique et le photon :

Vidéo sur l'effet photoélectrique.
Le photon est une particule purement quantique, découvert par Einstein en 1905 pour interpréter l'effet photoélectrique.
Il permet d'interpréter le rayonnement électromagnétique de manière corpusculaire.

L'introduction du photon permit également d'interpréter le rayonnement du corps noir et l'effet Compton.

Un photon a une masse nulle et se déplace à la célérité de la lumière c.

Il possède une énergie :

$$E = h.\nu = \hbar.\omega$$

et une quantité de mouvement : Relations de Planck-Einstein

$$\vec{p} = \hbar.\vec{k}$$

Une expérience d'interférences photon par photon (thèse de V.Jacques):

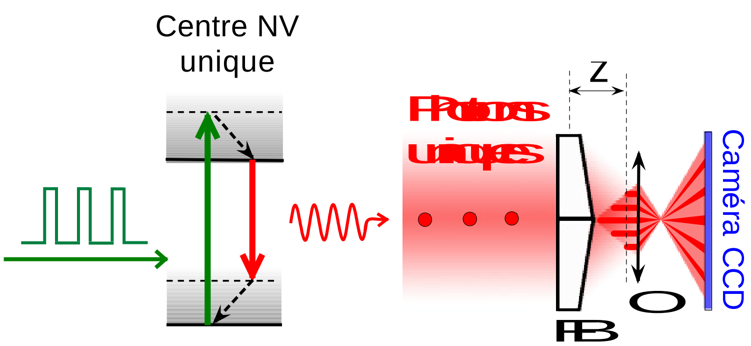

FIG. 1.8 – *Enregistrement des franges d'interférence à un photon. Un oculaire (O) de grandissement ×10 conjugue un plan d'observation situé dans la zone de recouvrement des fronts d'onde issus du biprisme de Fresnel (FB) avec la surface de détection d'une caméra CCD intensifiée. La distance z correspond à la séparation entre le biprisme et le plan conjugué par l'oculaire sur la caméra.*

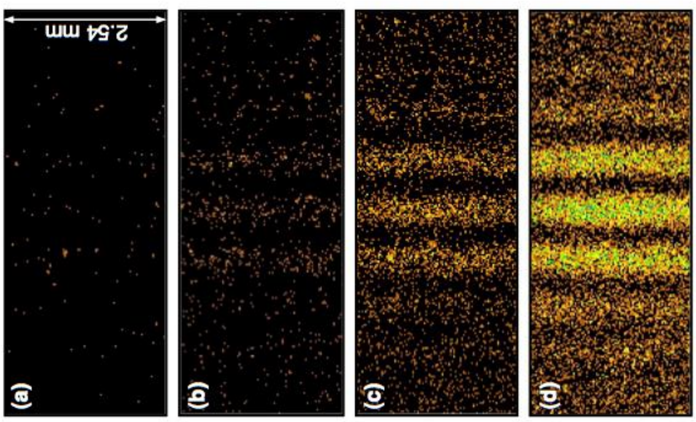

FIG. 1.9 – *Observation de la construction des franges d'interférence photon par photon au moyen de la caméra CCD intensifiée. Les images (a), (b), (c) et (d) correspondent respectivement à l'accumulation de 10, 100, 500 et 2000 clichés, chacun des clichés étant associé à un temps d'ouverture de 1 s de la caméra. Le nombre de photons détecté par cliché est en moyenne égal à 10.*

Cette expérience doit être décrite en termes de **probabilités**.

2. La dualité onde particule : relations de de Broglie :

Louis de Broglie (prononcer « de Breuil », même à Strasbourg…) postula en 1923 l'existence d'ondes associés à la matière, de longueur d'onde et de fréquence :

$$\lambda = \frac{h}{p} \; ; \; \nu = \frac{E}{h}$$

Relations de de Broglie

Remarque : ces relations peuvent également s'écrire :

$$p = \hbar k \; ; E = \hbar\omega$$

Pour que le comportement ondulatoire puisse être mis en évidence dans une expérience de diffraction, la longueur d'onde de de Broglie doit être comparable à la taille du dispositif diffractant.

Ce comportement ondulatoire fut mis en évidence expérimentalement par Davisson et Germer dans une manipulation de diffraction d'électrons en 1927.
On a depuis effectué des expériences de diffraction et d'interférences avec des neutrons, des atomes et des molécules (exemple : fullerène en 2000).

Exemples :

- Expérience de Davisson et Germer : électrons de masse $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg accélérés sous 54 V, donc vitesse $v = 4{,}4.10^{6}$ m.s^{-1} d'ou $\lambda = 1{,}7.10^{-10}$ m comparable à la distance interatomique.
- Microscopie électronique : $E \sim 100$ keV donne $v \sim 1{,}6.10^{8}$ m.s^{-1} (relativistes) et $\lambda = 3{,}7.10^{-12}$ m !

3. La constante de Planck :

C'est LA constante de la mécanique quantique.

Son unité est J.s, c'est celle d'une **action.**

Un système physique possédant une action de l'ordre de h est de nature quantique.

4. Relation d'incertitude de Heisenberg spatiale et conséquences :

4.1. Diffraction de particules :

On considère une particule de quantité de mouvement :

$$\vec{p} = p.\vec{u}$$

et de longueur d'onde de de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

diffractée par une ouverture de dimension a .

L'angle maximal sous lequel cette particule est diffractée est θ tel que :

$$\sin\theta = \lambda/a.$$

L'indétermination sur la position de la particule est :

$$\Delta x = a$$

L'indétermination sur la composante selon x de la quantité de mouvement est :

$$\Delta p_x = p.\sin\theta = h.\sin\theta/\lambda.$$

On a donc :

$$\Delta p_x\, \Delta x = a.h.\sin\theta/\lambda = h$$

Pour une particule quantique, les mesures de position et de quantité de mouvement sont affectées d'une indétermination telle que :

$$\boldsymbol{\Delta x . \Delta p_x \ \geq \ \hbar/2}$$

(inégalité de Heisenberg)

Δx (appelée indétermination quantique de x) représente l'écart quadratique moyen sur les mesures de la grandeur x :

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

5. Oscillateur harmonique quantique unidimensionnel :

L'oscillateur harmonique (OH) quantique unidimensionnel est un système quantique soumis à un potentiel harmonique :

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

pour un oscillateur de masse m et pulsation propre ω_0 à une dimension.

Son énergie totale est donc :

$$E = E_c + E_p = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

En mécanique classique cette énergie pourrait tout à fait être nulle lorsque l'oscillateur est au repos à la position d'équilibre, en choisissant l'énergie potentielle nulle à la position d'équilibre.
Cela n'est pas possible en mécanique quantique, car x et p_x seraient connus sans indétermination, ce qui est impossible.

L'énergie de l'OH est invariante par symétrie par rapport à un plan Oyz, ie on peut changer x en –x et p_x en $-p_x$ sans changer l'état de l'OH, ce qui implique :

$$\langle x\rangle = 0 \ et \ \langle p_x\rangle = 0$$

On a alors :

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle$$

L'énergie ayant une valeur constante, on a :

$$E = \langle E\rangle = \frac{\langle p_x^2\rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\langle x^2\rangle = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\Delta x)^2$$

D'après l'inégalité de Heisenberg :

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2.\Delta x}$$

donc :

$$E \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\Delta x)^2$$

On calcule que cette expression passe par un minimum pour :

$$\Delta x_{min} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$$

On en déduit :

$$E \geq \frac{1}{2}\hbar\omega_0$$

Une particule quantique possède toujours une énergie minimale.

Remarque : pour $\Delta x < \Delta x_{\min}$ l'énergie est d'autant plus grande que Δx est petit, ie que la particule occupe un domaine spatial plus petit ; le minimum d'énergie est lié au confinement de la particule.

6. Quantification de l'énergie d'une particule libre confinée unidimensionnellement :

Notion de confinement :
Une particule est dite confinée si elle se trouve nécessairement dans un domaine d'extension spatiale a.
Le confinement se retrouve dans les noyaux et les atomes en particulier.

Considérons une particule libre dans un domaine d'extension spatiale a.
Son énergie est uniquement cinétique, soit :

$$E = E_c = \frac{p_x^2}{2m}$$

En mécanique classique, dans le cas d'une onde confinée dans un domaine d'extension a (corde de Melde par exemple), l'onde était nécessairement stationnaire et telle que :

$$a = n\lambda/2$$

On démontre qu'il en est de même en mécanique quantique, que la fonction d'onde décrivant la particule est nécessairement celle d'un état stationnaire, et que les longueurs d'onde autorisées sont telles que :

$$a = n\lambda/2$$

soit :

$$p_x = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2a}$$

On en déduit :

$$E = n^2\frac{h^2}{8ma^2}$$

L'énergie d'une particule confinée est nécessairement **quantifiée**.
Plus la particule est **confinée,** plus son énergie est élevée.