DIFFUSION THERMIQUE

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.3. Diffusion thermique	
Vecteur densité de flux thermique $\mathbf{j_Q}$	Exprimer le flux thermique à travers une surface orientée en utilisant le vecteur $\mathbf{j_Q}$.
Premier principe de la thermodynamique.	Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, éventuellement en présence de sources internes. Utiliser l'opérateur divergence et son expression fournie pour exprimer le bilan local dans le cas d'une géométrie quelconque, éventuellement en présence de sources internes.
Loi de Fourier.	Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, métaux.
Régimes stationnaires. Résistance thermique.	Utiliser la conservation du flux thermique sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Établir l'expression d'une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel. Utiliser les lois d'associations de résistances thermiques.
Équation de la diffusion thermique.	Établir une équation de diffusion thermique. Utiliser l'opérateur laplacien et son expression fournie pour écrire l'équation de diffusion dans le cas d'une géométrie quelconque. Analyser une équation de diffusion en ordres de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Utiliser la loi de Newton fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.**

On considère dans ce cours des grandeurs unidimensionnelles, soit f(x,t) en cartésiennes, f(r,t) en cylindriques et sphériques.

1. Modes de transfert thermique :

Les transferts thermiques peuvent se faire :

- par **rayonnement** : l'énergie est véhiculée par une onde , exemple : four à micro-ondes, feu de cheminée.
- par c**onvection** : l'énergie s'échange par déplacement de fluide, exemple : radiateur soufflant (convecteur !), Gulf Stream.
- par **diffusion** (ou **conduction**) : migration d'énergie sans déplacement macroscopique du milieu ; cette migration d'énergie est due à **l'agitation thermique** : l'énergie s'échange par chocs, exemple : diffusion dans une cuiller en métal, diffusion à travers un mur.

La diffusion thermique se produit lorsqu'il existe un **gradient de température** dans un milieu ; l'énergie est transférée spontanément des zones chaudes vers les zones froides du milieu considéré.

http://www.youtube.com/watch?v=nbzYilygJs4 ; http://www.youtube.com/watch?v=2LGfriM3O0Y

2. Définitions :

Définition : on appelle **flux thermique** Φ à travers une surface S le transfert thermique à travers S par unité de temps.
Unité : J. s^{-1} = W

Le transfert thermique δQ traversant S pendant dt est donc :

$$\delta Q = \Phi.dt$$

Définition : le vecteur **densité de flux thermique** $\overrightarrow{J_Q}(\vec{r},t)$ est un vecteur dirigé dans le sens du flux thermique, et dont le module est égal au transfert thermique traversant une surface unité perpendiculaire à $\overrightarrow{J_Q}(\vec{r},t)$ par unité de temps.

Il s'exprime en $J.m^{-2}.s^{-1} = W.m^{-2}$.

On a donc la relation :

$$\phi = \iint \overrightarrow{J_Q}(\vec{r},t).d\vec{S}$$

Dans le cas fréquent où $\overrightarrow{J_Q}(\vec{r},t)$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires et de même sens, et où $\overrightarrow{J_Q}(\vec{r},t)$ est uniforme sur la surface S, on a :

$$\phi = \iint \overrightarrow{J_Q}(\vec{r},t).d\vec{S} = \iint J_Q(\vec{r},t).dS = J_Q(\vec{r},t)\iint dS = J_Q(\vec{r},t).S$$

La grandeur analogue à n(x,t) en diffusion de particules est l'énergie volumique ; pour une phase condensée de masse volumique ρ et de capacité calorifique massique C, elle s'écrit :

$$u = \rho.C.T$$

3. Equation de conservation de l'énergie :

3.1. Sources internes :

Dans certains cas, il peut exister une « source interne » d'énergie, produisant une puissance thermique p_{vol} par unité de volume (exemple : effet Joule, radioactivité).

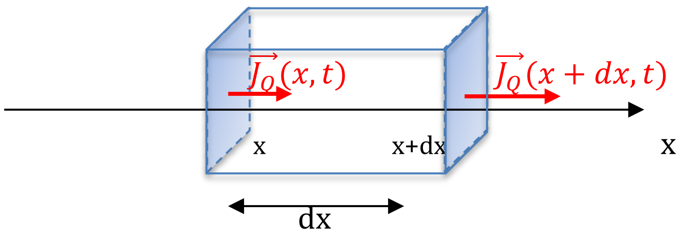
Exemple : si un barreau de volume V possède une résistance R et est parcouru par I, on aura :

$$p_{vol} = \frac{RI^2}{V}$$

Remarque 1 : une source interne traduit une <u>conversion</u> d'énergie, pas une création
Remarque 2 : une fuite thermique pourra être considérée comme une source à $p_v < 0$ (cf fin du poly).

3.2. Bilan d'énergie interne en cartésiennes :

On considère un cylindre de matériau solide d'axe Ox, de longueur L, section S (volume constant), de masse volumique ρ et de capacité calorifique <u>massique</u> C.



L'énergie interne d'une masse dm de solide s'écrit :

U(x,t) = dm.c.T(x,t) + cte

Le système considéré est une masse dm de ce solide comprise entre x et x+ dx ; sa masse s'écrit :

dm = ρ.S.dx

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à cette tranche de section S perpendiculaire à Ox comprise entre x et x+ dx s'écrit entre t et t+ dt :

$$dU = \delta W + \delta Q = \delta W + \delta Q_{entrant} - \delta Q_{sortant} + \delta Q_{interne}$$

avec :

- $dU = U(t+dt) - U(t) = dm.c.(T(x,t+dt) - T(x,t)) = dm.c.\frac{\partial T}{\partial t}.dt$
- $\delta W = 0$ pour un solide
- $\delta Q_{entrant} = \delta Q(x,t) = \Phi(x,t).dt$
- $\delta Q_{sortant} = \delta Q(x+dx,t) = \Phi(x+dx,t)$
- $\delta Q_{interne} = p_{vol}.dV.dt$

avec :

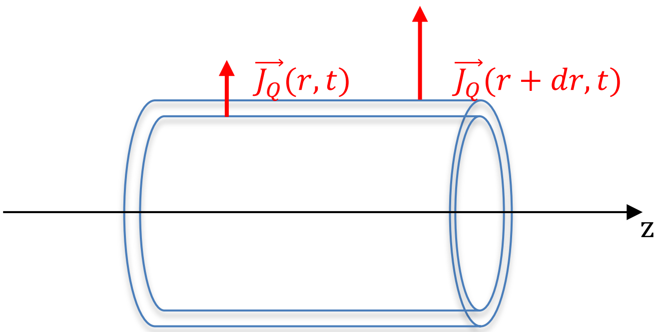
$$\Phi = \iint \overrightarrow{J_Q}.d\vec{S} = \iint j_Q.dS = j_Q \iint dS = j_Q.S$$

On obtient donc :

$$\boldsymbol{\rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} + p_{vol}}$$

Equation de conservation de l'énergie à une dimension cartésienne

3.3. Bilan d'énergie interne en géométrie cylindrique :



On considère un barreau dans lequel existe une densité de flux thermique radiale :

$$\overrightarrow{J_Q}(r,t) = J_Q(r,t)\overrightarrow{e_r}$$

et une source interne de densité volumique de puissance :

$$p_{vol}$$

On considère un volume élémentaire dV d'un barreau de longueur H compris entre les rayons r et r+dr , entre les instants t et t+dt, à température T(r,t).

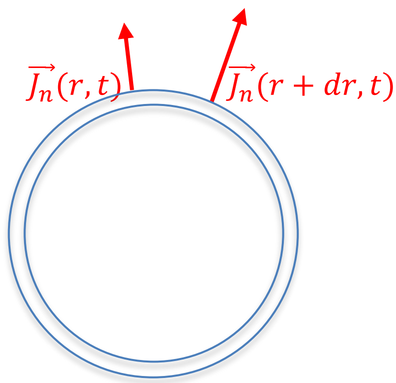
Le volume élémentaire est $dV = 2\pi r dr H = S_{lat}(r)dr$

Le bilan (à faire selon le modèle de la diffusion de particules permet d'obtenir :

$$\boldsymbol{\rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial (J_Q.r)}{\partial r} + p_{vol}}$$

Equation de conservation de l'énergie à une dimension cylindrique

3.4. Bilan d'énergie interne en géométrie sphérique :



On considère un milieu dans lequel existe une densité de courant de flux thermique radiale **à symétrie sphérique** :

$$\overrightarrow{J_Q}(r,t) = J_Q(r,t)\overrightarrow{e_r}$$

et une source interne de densité volumique :

$$p_{vol}$$

On considère un volume élémentaire dV compris entre les rayons r et r+dr , entre les instants t et t+dt, à une température T(r,t).

Le volume élémentaire est $dV = 4\pi r^2 dr = S(r)dr$

Le bilan (à faire selon le modèle de la diffusion de particules) permet d'obtenir :

$$\boldsymbol{\rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial (J_Q.r^2)}{\partial r} + p_{vol}}$$

Equation de conservation de l'énergie à une dimension sphérique

3.5. Forme générale de l'équation de conservation de l'énergie :

L'équation de conservation de l'énergie se généralise sous la forme :

$$\rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} = -div(\overrightarrow{J_Q}) + p_{vol}$$

avec en cartésiennes :

$$div(\overrightarrow{J_n}) = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

Remarque : les expressions de la divergence en coordonnées cylindriques et sphériques sont beaucoup moins simples ! Vous n'avez pas à les retenir.

La divergence est un **opérateur** ; elle a pour unité m^{-1}, elle s'applique à un champ de vecteurs et donne un scalaire : pour le rappeler il n'y a pas de flèche sur div.

La divergence d'un champ de vecteurs exprime le **flux volumique** de ce champ de vecteur en un point.

3.6. Cas du régime stationnaire avec $p_{vol} = 0$:

a) Théorème de Green-Ostrogradsky :

L'équation se réduit à :

$$div(\overrightarrow{J_Q}) = 0$$

Théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_V div(\vec{A}).dV = \oiint_S \vec{A}.d\vec{S}$$

où V est le volume fermé par la surface S (fermée) orientée <u>vers l'extérieur</u>.

On a donc ici :

$$\oiint_S \overrightarrow{J_Q}.d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \phi = cte$$

En régime stationnaire, si p_{vol} = 0, le flux thermique ϕ se conserve

b) Exemple en symétrie cylindrique :

On considère un tuyau de longueur L et de rayon R, dont les températures extérieure et intérieure sont différentes : le gradient de température est donc radial :

$$\vec{j} = j(r,t).\overrightarrow{u_r}$$

Le flux de $\vec{j}$ à travers un cylindre de rayon r et de longueur L est donc :

$$\Phi = j(r,t).2\pi.r.L.$$

Ce flux étant constant on en déduit que la densité de flux j(r,t) est inversement proportionnelle à r.

Il est également possible d'exploiter un formulaire ; en coordonnées cylindriques :

$$div(j(r,t).\overrightarrow{u_r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r.j)$$

donc :

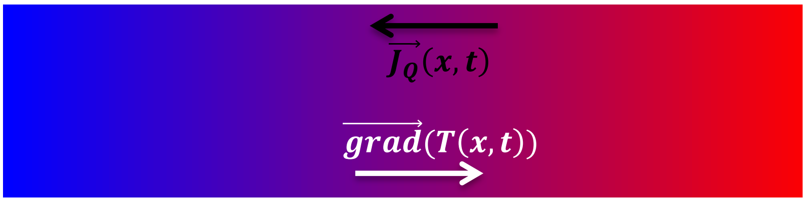
$$div(j(r,t).\overrightarrow{u_r}) = 0 \Rightarrow r.j = cte$$

4. Loi de Fourier :

Loi de Fourier (phénoménologique) :

$$\overrightarrow{J_Q} = -\lambda.\overrightarrow{grad}T$$

λ (positive)est la conductivité thermique, en $W.m^{-1}K^{-1}$.



http://www.youtube.com/watch?v=h0dgQRN9qeo

Rappel : en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{grad}(T(x,y,z,t)) = \frac{\partial T}{\partial x}.\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial T}{\partial y}.\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial T}{\partial z}.\overrightarrow{u_z}$$

Pour une répartition de température T(x,t) :

$$\overrightarrow{J_Q}(x,t) = -\lambda.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\overrightarrow{e_x}$$

Ordres de grandeurs :

	Air	Polystyrène expansé	**Eau**	Bois	Verre	**Béton**	**Acier**	Cuivre
$\lambda\ (Wm^{-1}K^{-1})$	**0,03**	0,004	**0,6**	0,3	0,5 à 2	**1**	**20**	400

Il y a analogie entre la loi de Fick et la loi de Fourier.

5. Equation de la diffusion thermique :

5.1. Exemple de la géométrie cartésienne :

En injectant la loi de Fourier dans l'équation de conservation, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p_{vol}}{\rho c}}$$

Equation de la diffusion

Remarques :

- Cette équation est linéaire.
- Le fait que t ne puisse être remplacé par -t montre que la conduction est un phénomène irréversible.

5.2. Généralisation à une géométrie quelconque :

L'équation de la diffusion se généralise à trois dimensions sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}.\Delta T + \frac{p_{vol}}{\rho c}}$$

où l'opérateur « laplacien » s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\boldsymbol{\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

Remarque : les expressions du laplacien en coordonnées cylindriques et sphériques sont beaucoup moins simples ! Vous n'avez pas à les retenir.

Le laplacien est un **opérateur** ; il a pour unité m^{-2}, il peut s'appliquer à un champ scalaire ou à un champ de vecteurs. Ici il s'applique à un scalaire et donne un scalaire : pour le rappeler il n'y a pas de flèche sur Δ.

5.3. Exemple en coordonnées sphériques :

On considère un solide à symétrie sphérique, compris entre les rayons R_1 et R_2, avec $T(R_1) = T_1$ et $T(R_2) = T_2$. Le gradient de température est donc radial, soit :

$$T = T(r,t)$$

On suppose le régime stationnaire, T ne dépend pas du temps, donc :

$$T = T(r)$$

Un formulaire donne :

$$\Delta T(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

On a donc :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{p_{vol}}{\lambda}$$

5.4. Diffusivité : relation entre les échelles spatiale et temporelle :

Définition : D = $\frac{l}{rC}$ est appelé **diffusivité**. Unité : m^2.s^{-1}.

La diffusivité est l'analogue du coefficient de diffusion D en diffusion de particules.

Soit L un ordre de grandeur des variations spatiales de T(x,t) et τ un ordre de grandeur des variations temporelles de T(x,t).

On calcule en ordre de grandeurs littéraux :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T}{\tau}\ ;\ \Delta T \approx \frac{T}{L^2}$$

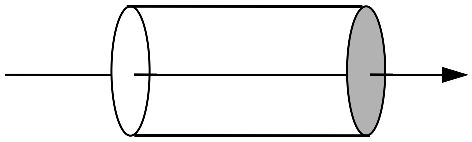
Si $p_{vol} = 0$, l'équation de la chaleur fournit :

$$\boldsymbol{L^2 \approx D.\tau}$$

6. Régime stationnaire sans sources internes ; résistance thermique :

6.1. Modèle en géométrie cartésienne :

On considère un barreau d'axe Ox, homogène, de longueur L, section S et conductivité λ dont les deux extrémités sont maintenues aux températures $T_1 > T_2$ et T_2.
On suppose $p_{vol} = 0$ et le régime stationnaire.



On calcule alors :

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1).\frac{x}{L}$$

d'où :

$$\phi_{1\to 2} = \frac{\lambda S}{L}.(T_1 - T_2)$$

6.2. Résistance thermique :

Définition : $R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{\Phi_{1->2}}$ est la résistance thermique du barreau. Unité : $K.W^{-1}$.

En géométrie cartésienne avec T = T(x), on calcule

$$\boldsymbol{R_{th} = \frac{L}{\lambda S}}$$

Définition : la conductance thermique est l'inverse de la résistance thermique du barreau :

$$G_{th} = 1/R_{th}$$

Unité : $W.K^{-1}$.

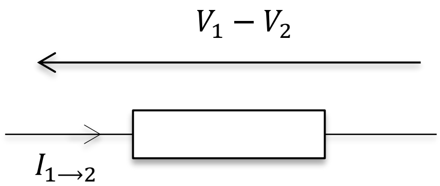
6.3. Analogie électricité-thermique :

La loi :

$$T_1 - T_2 = R_{th}.\phi_{1\to 2}$$

est analogue à la loi d'Ohm :

$$V_1 - V_2 = R.I_{1\to 2}$$



On a donc les analogies suivantes :

Potentiel V	-> Température T
Intensité i	-> Flux thermique ϕ.
Résistance électrique R	-> Résistance thermique R_{th}.

Remarque : attention, les unités des grandeurs analogues sont strictement différentes !!

6.4. Associations de résistances :

Deux résistances thermiques sont dites en série si elles sont parcourues par le même flux thermique ; on a alors :

$$R_{equ} = R_1+R_2$$

Deux résistances thermiques sont dites en parallèle si elles sont soumises au même gradient de température ; on a alors :

$$G_{equ} = G_1+G_2$$

7. Conditions aux limites :

L'équation de la chaleur comportant une dérivée temporelle et une dérivée seconde spatiale, sa résolution nécessite une condition aux limites temporelle (appelée condition initiale en général car donnée à un instant t=0), et deux conditions aux limites spatiales.

7.1. Continuité du flux thermique :

Le flux thermique est une fonction continue de la position :

Le flux est continu à une interface entre deux milieux.

Cas particulier : flux thermique au niveau d'une paroi calorifugée :

Le flux thermique dirigé selon la normale à une paroi calorifugée est nul par définition.

7.2. Continuité/discontinuité de la température :

a) Contact thermique parfait :

Ce cas constitue une modélisation simple de l'interface entre deux corps, valable lorsqu'il n'existe pas de convection au voisinage de la surface (contact solide-solide).

On considère alors que la température est une fonction continue de la position :

Pour un contact thermique parfait, la température est continue à une interface.

b) Discontinuité de la température à une interface solide - fluide : loi de Newton.

On constate expérimentalement que dans le cas d'un matériau solide dont la surface est à température T vers un fluide à son contact, à température T_f, la température n'est pas continue ; on parle de transfert conducto-convectif.

Le flux thermique élémentaire échangé par une surface élémentaire dS du matériau vers le fluide est donné par la loi phénoménologique :

$$d\Phi = h.(T - T_f).dS$$

Loi de Newton de la conducto-convection.

h est le coefficient de convection en $W.m^{-2}K^{-1}$; il dépend du matériau, du fluide et de sa vitesse.

Exemple : Air le long d'une paroi métallique : $v < 5\ m.s^{-1}$: $h = 5,8 + 4v$
$v > 5\ m.s^{-1}$: $h = 7,14\ (v)^{0,78}$

Le transfert thermique élémentaire échangé pendant dt sur une surface dS est donc :

$$\delta^2 Q = h.(T-T_f).dS.dt$$

La résistance thermique d'un contact conducto-convectif est :

$$R_{th} = 1/hS.$$

7.3. Exemple : barre droite non calorifugée en régime stationnaire sans sources internes :

On suppose toujours T = T(x) (c'est maintenant une approximation) et on souhaite calculer T(x).

Première méthode : on reprend la démonstration de l'équation de conservation, pour tenir compte du transfert conducto-convectif.

Le système est toujours un élément de longueur dx du barreau, de rayon R.

La variation d'énergie interne entre t et t+dt est nulle en régime stationnaire.

$$d^2U = dU(t+dt) - dU(t) = 0.$$

Le seul travail considéré étant celui des forces de pression, on a toujours :

$$\delta^2 W = 0$$

Les transferts thermiques sont à présent :

- Du a la conduction à travers les surfaces terminales :

$$\delta^2 Q(x,t) = \Phi(x,t).dt - \Phi(x+dx,t) = -\frac{d\Phi}{dx}.dx.dt = -\frac{d(j.S_{term})}{dx}.dx.dt = -\frac{d(j)}{dx}.S_{term}.dx.dt$$

avec $S_{term} = \pi R^2$

- Du à la conducto-convection sur la surface latérale :

$$\delta^2 Q = -h(T-T_f).dS_{lat}.dt$$

avec $dS_{lat} = 2\pi R.dx$

On obtient donc :

$$\frac{dj}{dx}.\pi R^2 - h(T - T_f).2.\pi.R = 0$$

La loi de Fourier s'écrit :

$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

d'où :

$$\boldsymbol{\lambda \frac{d^2T}{dx^2}.R - 2.h(T - T_f) = 0}$$

Deuxième méthode : on interprète la conducto-convection comme une $p_v < 0$.

Pour une tranche d'épaisseur dx, on a :

$$\delta^2 Q = -h(T-T_f).\ 2\pi R.dx.dt$$

Le volume de cette tranche est :

$$dV = \pi R^2.dx$$

La puissance volumique perdue est donc :

$$p_v = \frac{\delta^2 Q}{dV.dt} = -\frac{2h}{R}(T - T_f)$$

On peut ensuite utiliser l'équation de la chaleur en régime stationnaire :

$$\lambda.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{vol} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{R}(T - T_f) = 0}$$

Annexe : CONDUCTIBILITES THERMIQUES ($W.m^{-1}.K^{-1}$)

Métal	λ
Aluminium	237
Argent	430
Cuivre	401
Fer	802
Plomb	353

Liquide	λ
Eau	0.60
Glycérine	0.29
Ether	0.13
Huile de graissage	0.13

Gaz	λ
Air sec	0.025
Hélium	0.143
Méthane	0.030
Argon	0.016

Divers	λ
Tourbe	0.08
Laine	0.039
Fonte	5800
Sciure de bois	0.06

Construction	λ
Chêne	0.17
Sapin	0.14
Vitre	0.81
Laine de verre	0.04
Brique	1
Béton armé	0.39…1.6