Chapitre 3. ACTIONS DE CONTACT DANS UN FLUIDE EN MOUVEMENT

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2 Actions de contact dans un fluide en mouvement	
Forces de pression. Équivalent volumique.	Utiliser les relations d**F** = -p**dS** et d**F** = -**grad**p dτ
Contraintes tangentielles dans un écoulement **v** = $v_x(y)$ $\mathbf{u}_x$ au sein d'un fluide newtonien ; viscosité. Équivalent volumique des forces de viscosité dans un écoulement incompressible.	Utiliser l'expression fournie d**F**=$\eta\partial v_x/\partial y$ dS$\mathbf{u}_x$ Établir sur cet exemple l'expression d**F** = η **Δv** dτ. Utiliser sa généralisation admise pour un écoulement incompressible quelconque.

Coefficient de tension superficielle.	**Mesurer un coefficient de tension superficielle.** **Utiliser l'expression de l'énergie de tension superficielle pour interpréter un protocole expérimental.**
Traînée d'une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide newtonien : nombre de Reynolds ; coefficient de traînée C_x ; graphe de C_x en fonction du nombre de Reynolds ; notion d'écoulement laminaire et d'écoulement turbulent.	Évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique.

Dans le fluide au repos, nous n'avons tenu compte – en référentiel galiléen - que des forces de pression et de la pesanteur. Une autre force surfacique peut intervenir : la tension superficielle.
D'autre part, lorsque le fluide est en mouvement de nouvelles forces apparaissent : les forces de viscosité.

1. Force de viscosité :

1.1.Forces dans les fluides :

Les forces dans les fluides peuvent être décomposées en deux types :

- les forces volumiques, qui s'appliquent à chaque élément dV du fluide ; on définit dans ce cas une densité volumique de forces par :

$$\overrightarrow{dF} = \vec{f}_V.dV\,,$$

Ce sont des forces à distance : la force d'interaction gravitationnelle, les forces électromagnétiques, les forces d'inertie en référentiel non galiléen (donc le poids).

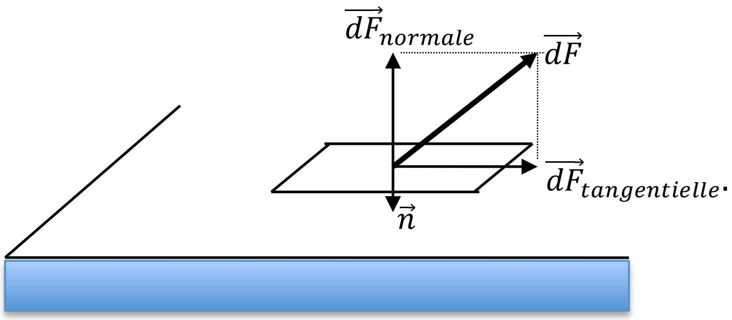
- les forces superficielles, ou de contact, exercées par le fluide sur chaque élément dS de la surface qui l'entoure ;

On peut définir dans ce cas une force surfacique appelée **contrainte** $\overrightarrow{f_s}$ par :

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{f_s}.dS$$

La contrainte s'exprime en $N.m^{-2}$ = Pa.

La force $\overrightarrow{dF}$ peut se décomposer en une composante normale $\overrightarrow{dF}_{normale}$ et une composante tangentielle $\overrightarrow{dF}_{tangentielle}$.



1.2. Pression :

La composante normale est telle que :

$$\overrightarrow{dF_{normale}} = -P(M).\overrightarrow{dS}$$

où P(M) est la pression. La normale $\vec{n}$ est dirigée ici de la surface vers le fluide.

Rappel : les forces de pression exercées sur toutes les faces d'un petit volume dV peuvent s'écrire :

$$d\vec{F}_{pression} = -\overrightarrow{grad}P.dV$$

et admettent donc une résultante volumique :

$$\vec{f}_{vpression} = -\overrightarrow{grad}P$$

1.3. Contrainte de cisaillement :

Dans un écoulement unidirectionnel :

$$\vec{v} = v(y,t).\overrightarrow{u_x}$$

la composante tangentielle exercée par un élément de fluide de surface dS à y sur la couche immédiatement supérieure s'exprime par :

$$\overrightarrow{dF_{tangentielle}} = -\eta.\frac{\partial v_x}{\partial y}\overrightarrow{u_x}.dS$$

La constante de proportionnalité η (« eta ») est appelée **viscosité dynamique ;** dans les fluides **newtoniens**, c'est une **constante** caractéristique du fluide.

Son unité SI est le **Poiseuille (Pl)** ; 1 Pl = 1 Pa.s.

Ordre de grandeur à 20°C : eau $\eta = 10^{-3}$ Pl ; air (P = 1 bar) $\eta = 2.10^{-5}$ Pl ; glycérine $\eta = 0{,}85$ Pl.

Remarque : la composante tangentielle $\vec{\sigma}_S = \dfrac{d\vec{F}_t}{dS}$ est appelée contrainte de cisaillement.

Définition : la viscosité cinématique, notée ν, est $\nu = \eta/\rho$.

Unité : $m^2.s^{-1}$.

1.4.Conditions de continuité :

La contrainte de cisaillement devant rester finie, la vitesse est une fonction continue des variables d'espace.

En conséquence, à la surface fixe d'un solide de vitesse $\overrightarrow{V_{solide}}$, on doit avoir :

$$\overrightarrow{V_{fluide}} = \overrightarrow{V_{solide}}$$

En particulier si le solide est fixe, à sa surface :

$$\overrightarrow{V_{fluide}} = \vec{0}$$

A l'interface entre deux fluides non miscibles 1 et 2 , en négligeant la tension superficielle, on a continuité de la contrainte, ce qui se traduit à l'interface par :

$$\begin{cases} P_1 = P_2 \\ \eta_1.\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)_1 = \eta_2.\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)_2 \end{cases}$$

En particulier, à la l'interface liquide gaz, appelée surface libre d'un liquide, on a :

$$\eta_{gaz} \ll \eta_{liquide}$$

On en déduit :

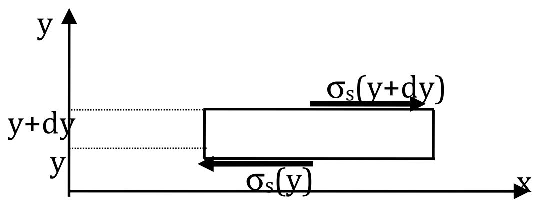
$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{liquide} = 0$$

1.5. Force volumique de viscosité pour un fluide incompressible :

Soit un élément de fluide de volume dV = dx.dy.dz entre les abscisses y et y + dy , dans un écoulement unidirectionnel

$$\vec{v} = v(y,t).\overrightarrow{u_x}$$

Cet élément est soumis à deux forces de cisaillement :



en y :

$$dF(y) = -\eta.dS.\frac{\partial\, v_x(y,t)}{\partial y}(y) \text{ où } dS = dx.dz \,;$$

en y+dy :

$$dF(y+dy) = \eta.dS.\frac{\partial v_x(y,t)}{\partial y}(y+dy).$$

La résultante est donc :

$$dF = F(y) + F(y+dy)$$
$$= \eta.dS.\left[\frac{\partial v_x(y,t)}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v_x(y,t)}{\partial y}(y)\right]$$

Il existe donc une densité volumique :

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\vec{u}_x.$$

On admettra que pour un écoulement incompressible ($div(\vec{v}) = \vec{0}$), on généralise à trois dimensions par :

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \eta\Delta\vec{v}$$

où :

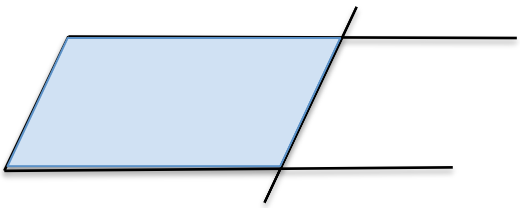
$$\Delta\vec{v} = \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2} = (\Delta v_x)\vec{u}_x + (\Delta v_y)\vec{u}_y + (\Delta v_z)\vec{u}_z$$

est l'opérateur « laplacien vectoriel » en coordonnées cartésiennes.

2. Forces de tension superficielle :

2.1. Mise en évidence :

http://www.youtube.com/watch?v=DZOB5GVAxJg



A l'interface entre deux liquides, ou à l'interface entre un solide et un gaz, se produisent des effets de surface.

Expérience : le travail élémentaire nécessaire pour accroitre la surface du film de savon de dS est :

$$\delta W = 2.\gamma.dS$$

ou γ est le coefficient de tension superficielle, en $N.m^{-1}$.

Ordre de grandeur : $\gamma_{eau} = 72\ mN.m^{-1}$.

En conséquence la tension superficielle a tendance à minimiser la surface liquide-vapeur.

2.2. Longueur capillaire :

Les phénomènes de tension superficielle sont en général en compétition avec la gravité. On définit dans ce cas une longueur caractéristique des effets capillaires dite longueur capillaire :

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

Pour l'eau on calcule l_c = 3 mm.

2.3. Quelques manifestations de la tension superficielle :

a) Angle de mouillage :

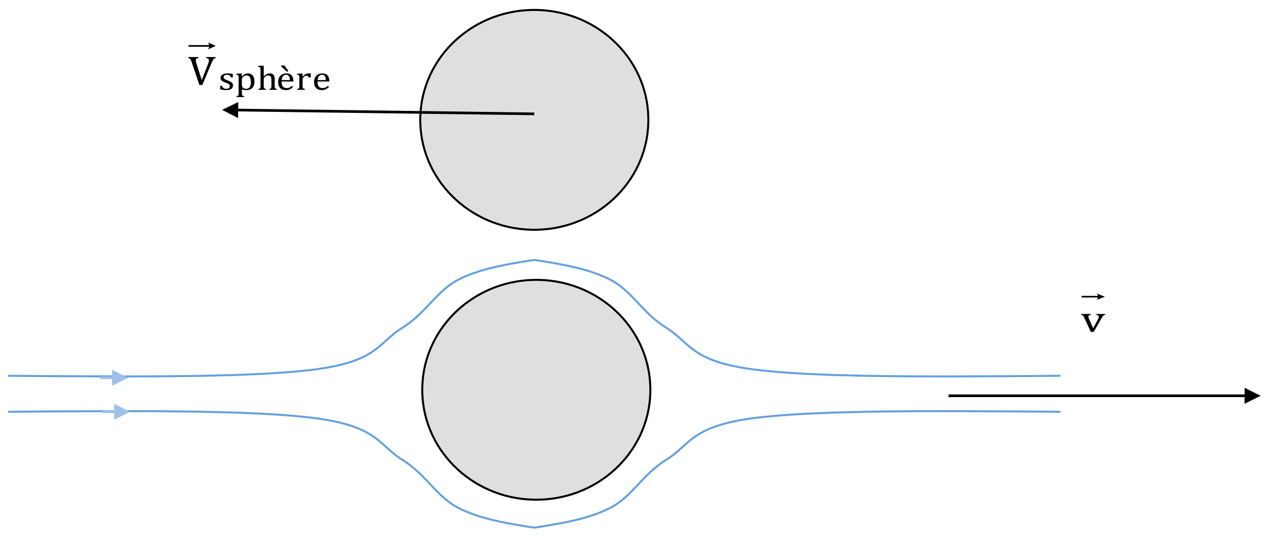
$$\cos\theta = \frac{\gamma_{S-V} - \gamma_{S-L}}{\gamma_{L-V}}$$

b) Loi de Jurin : $h = \frac{2\gamma_{L-V}\cos\theta}{\mu g r}$

c) Loi de Laplace : $P_{int} - P_{ext} = \frac{4\gamma_{L-V}}{R}$

3. Etude de la trainée sur une sphère :

On considère une sphère de diamètre d plongée dans un écoulement uniforme à vitesse $\vec{V}_{\text{sphère}}$. La masse volumique du fluide est ρ et sa viscosité η.
Le problème est équivalent à celui d'une sphère immobile dans un flux à vitesse $\vec{v} = -\vec{V}_{\text{sphère}}$ loin de l'obstacle.



La force exercée par le fluide sur la sphère se décompose en une composante parallèle et opposée à $\vec{v}$, appelée **trainée,** et d'une éventuelle composante perpendiculaire à $\vec{v}$ appelée **portance.**

On cherche la forme de la traînée F exercée par le fluide sur la sphère, en fonction de d, V, ρ et η.

Peut-on calculer l'expression de la traînée F par homogénéité ?

On pose :

$$F = K.\rho^{\alpha}.d^{\beta}.V^{\gamma}.\eta^{\delta}.$$

On a 3 équations pour 4 inconnues ; choisissons d'éliminer α, β et γ pour ne conserver que δ.

On obtient alors :

$$F = K.\rho.d^2.V^2.\left(\frac{\eta}{\rho.d.V}\right)^{\delta},$$

soit :

$$F = \rho.d^2.V^2.f(Re).$$

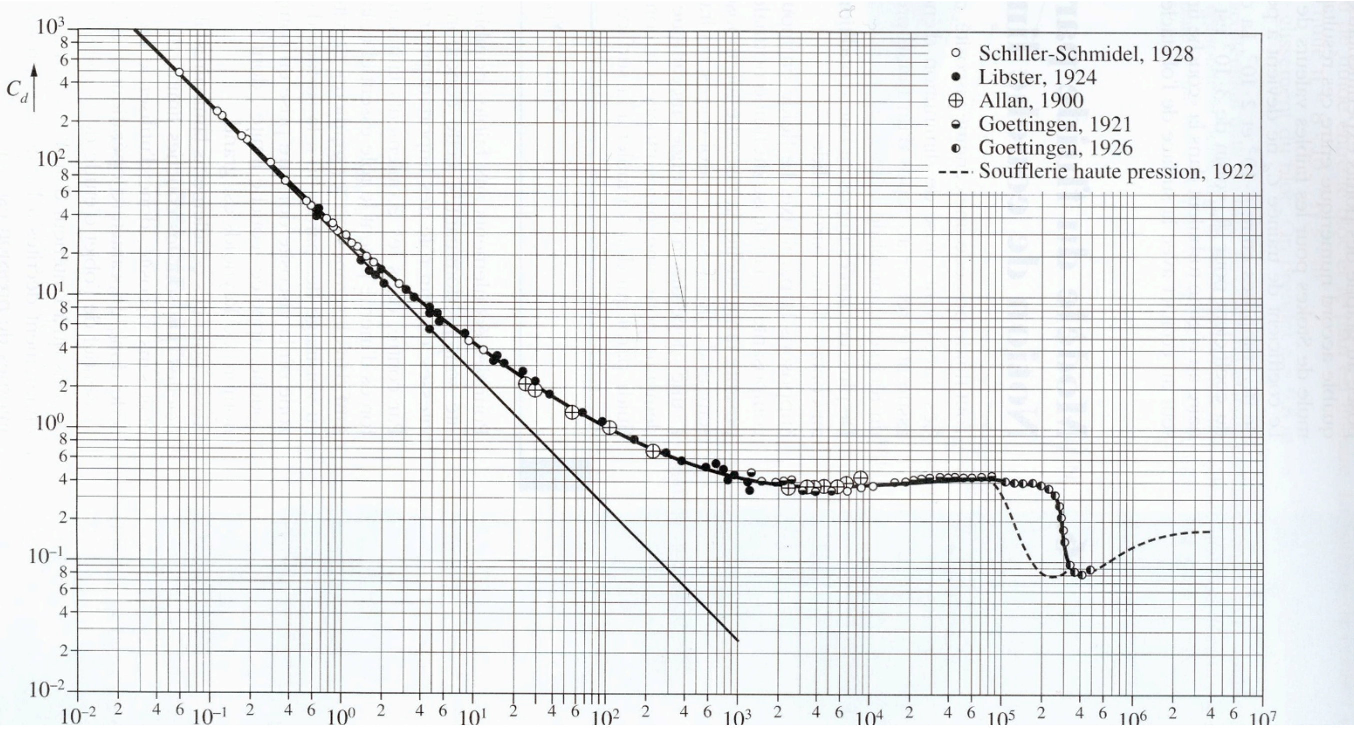
Où $R_e = \rho V d / \eta$ est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds.

Définition : coefficient de traînée $C_d = \dfrac{|F|}{\frac{1}{2}\rho A v^2}$ sans dimension

A est la surface frontale de l'obstacle appelé maître-couple, ici $A = \pi R^2$.

On vient de montrer que ce coefficient de trainée ne doit être fonction que de Re .

On étudie alors $C_d = f(Re)$ dans un diagramme logarithmique.



Pour des petits nombres de Reynolds (R < ≈ 1), C_d est inversement proportionnel à Re ; une analyse précise donne :

$$C_d = 24 / Re,$$

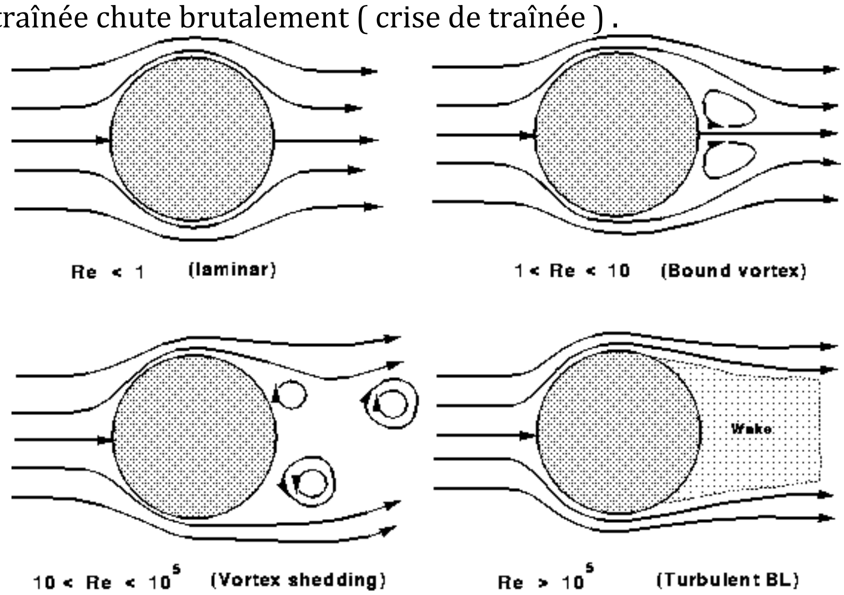
La force exercée par le fluide sur la sphère est alors :

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v} \quad \text{(formule de Stokes)}$$

Pour de plus grands nombres de Reynolds, $10^3 \leq Re \leq 10^5$, C_d est constant, ce qui traduit le fait que la traînée se stabilise.
On a alors :

$$\vec{F} = -C.\pi.\rho.R^2.v^2\overrightarrow{u_x} \text{ avec } C \approx 0{,}2.$$

Pour $Re \approx 2.10^5$, la traînée chute brutalement (crise de traînée) .



ball_05.mov ball_01.mov ball_03.mov ball_06.mov 1_061~35.MOV

1_061~35.MOV

3.2. Ecoulements laminaires et turbulents :

Un écoulement est **laminaire** lorsque le mouvement des particules fluides se fait de manière régulière et ordonnée. La **viscosité** y domine $R_e < 1$.
Il est **turbulent** lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide. La **convection** y domine $R_e >> 1$.

Remarques :

* pour un même fluide, on peut observer la transition laminaire à turbulent en augmentant la vitesse d'écoulement (robinet).

* la nature du fluide joue un rôle important : pour un même débit, un écoulement d'huile sera laminaire alors que celui d'eau sera turbulent. (ex. de la vidange).

$R < 1$: les effets de la viscosité sont prépondérants. L'écoulement est laminaire.
$R > 10^3$: les effets de la convection sont prépondérants. L'écoulement est turbulent.

Chapitre 3 : EQUATIONS LOCALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3 Équations dynamiques locales	
Équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Terme convectif. Terme diffusif. Nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.	Utiliser cette équation. Évaluer en ordre de grandeur le rapport du terme convectif sur le terme diffusif et le relier au nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.
Notion d'écoulement parfait et de couche limite.	Exploiter l'absence de forces de viscosité et le caractère isentropique de l'évolution des particules de fluide. Utiliser la condition aux limites sur la composante normale du champ des vitesses.
Équation d'Euler.	Utiliser cette équation.
Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.	Justifier et utiliser cette relation. Interpréter d'éventuels écarts observés en vérifiant les conditions de validité.

1. Cas d'un fluide newtonien :

1.1.Equation de Navier-Stokes :

On suppose un écoulement de fluide incompressible, soumis uniquement aux forces de pression, de pesanteur et de viscosité.

On considère un élément de fluide dV de masse dm = ρ.dV dans un référentiel R galiléen.
Le théorème de la résultante dynamique appliqué à dm donne :

$$\rho.\mathrm{dV}\vec{\mathrm{a}} = \rho\left[\left(\vec{\mathrm{v}}.\vec{\nabla}\right)\vec{\mathrm{v}} + \frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{t}}\right].\mathrm{dV} = \mathrm{d}\vec{\mathrm{F}} - \vec{\nabla}\mathrm{P}.\mathrm{dV} + \eta\Delta\vec{\mathrm{v}}.\mathrm{dV}$$

où dF représente les forces autres que les forces de pression et de viscosité, ici la pesanteur.

On en déduit l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$

2.2.Nombre de Reynolds (le retour) :

On cherche à évaluer l'effet de la viscosité dans le mouvement d'un fluide ; on doit pour cela comparer le terme de viscosité au terme d'inertie (convection).

Le terme traduisant la viscosité dans l'équation de Navier-Stokes vaut, en ordre de grandeur :

$\left\|\eta\Delta\vec{\mathrm{v}}\right\| \approx \eta\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{L}^2}$,où L est l'échelle spatiale des variations de v dans l'écoulement ;

Le terme traduisant l'inertie est $\rho\left(\vec{\mathrm{v}}.\vec{\nabla}\right)\vec{\mathrm{v}}$; il vaut en ordre de grandeur :

Le nombre de Reynolds R_e traduit le rapport des deux termes.

Définition : nombre de Reynolds $\mathbf{R_e = \rho VL / \eta}$.

C’est un nombre sans dimension.

Ordres de grandeur :

Manteau terrestre	10^{-20}
Glacier	10^{-11}
Spermatozoïdes dans le liquide séminal	10^{-3}
Bille dans du miel	10^{-2}
Têtard	100
Homme dans l'eau	10^{5}
Requin dans l'eau	10^{8}

kinematic_irreverse.mov

Dans un écoulement à grand nombre de Reynolds, l’inertie domine.

kinematic_reverse.mov

Dans un écoulement à petit nombre de Reynolds, la viscosité domine.

2.3. Ecoulements de Poiseuille :

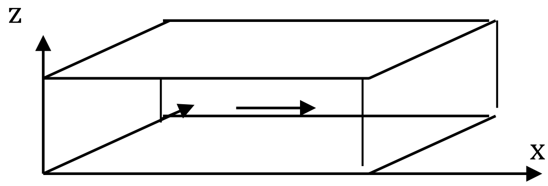
Un écoulement de Poiseuille est un écoulement stationnaire dans une conduite dont les parois sont immobiles.
Un gradient de pression est nécessaire pour provoquer l’écoulement.
L’écoulemen reste laminaire jusqu’à Re = 2000 environ.

a) Ecoulement de Poiseuille plan :

Soit $\Delta P = P(x=0) - P(x=L)$

Ecoulement de Poiseuille plan : $\vec{v} = \frac{DP}{2hL}(ze - z^2).\vec{u}_x$

Débit de volume par unité de largeur : $D_v = \frac{e^3}{12\eta L}\Delta P$.



b) Ecoulement de Poiseuille cylindrique

C'est l'écoulement d'un liquide visqueux dans une conduite cylindrique de rayon R et d'axe Oz.

On montre que le profil de vitesse est : $\vec{v} = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2}).\vec{u}_z$

Les lignes de courant et les trajectoires sont des droites parallèles à Oz.

BR EAT~F3 .MOV

Loi de Poiseuille : $D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta L}.\Delta P$

2.4. Ecoulements de Couette :

Un écoulement de Couette est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois sont à des vitesses différentes.

a) Ecoulement de Couette plan :

Si P = P(z) uniquement : $v_x = V_0.y / e$.

b) Ecoulement de Couette cylindrique :

L'écoulement de Couette cylindrique est un écoulement visqueux entre deux cylindres coaxiaux d'axe Oz, l'un de ces cylindres étant animé d'une vitesse angulaire ω.

On montre que le champ des vitesses est : $v_\theta(M) = A.r + B/r$.

2. Couche limite :

2.1. Définition :

Dans un écoulement à grand nombre de Reynolds, les termes de viscosité ne sont à prendre en compte que dans une zone de faible épaisseur autour de l'obstacle, appelée couche limite, d'autant plus petite que Re est grand, et à l'intérieur de laquelle la vitesse varie rapidement..

L'épaisseur δ de cette couche est de l'ordre de $d=\frac{L}{\sqrt{Re}}$

L'écoulement du fluide dans cette couche peut être laminaire ou turbulent ; lors de la transition vers la turbulence (ex : Re = 2.10^5 pour une sphère) , les phénomènes de convection deviennent prépondérants dans la couche limite et la traînée chute brutalement (crise de trainée).

2.2. Décollement de la couche limite :

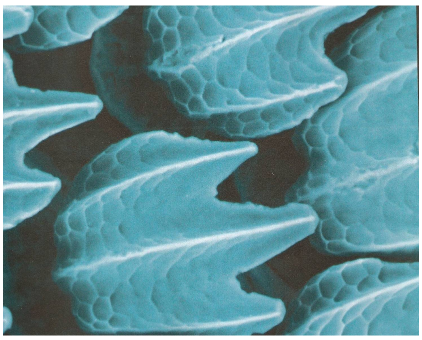
Lorsque la vitesse et le nombre de Reynolds croissent, il y a renversement local du sens de l'écoulement près de la paroi. Ce phénomène se traduit par un autre phénomène : le décollement de la couche limite.

Il apparaît alors en arrière du point de décollement une zone turbulente de grande largeur avec un sillage important ; la force de traînée augmente de façon considérable, alors que la portance (composante de la force normale au sens de l'écoulement) chute ; ce problème est crucial en aéronautique.

On observe qu'une couche limite turbulente « résiste » mieux au décollement qu'une couche limite laminaire : on peut stabiliser une couche limite en provoquant sa transition vers la turbulence grâce à un obstacle placé en amont du point de décollement, ou retarder son décollement en utilisant des volets de bords d'attaque.

2.3. Ecoulement parfait :

Un écoulement parfait est un écoulement dans lequel tous les phénomènes diffusifs, en particulier la viscosité, sont négligeables ; les particules de fluides évoluent de manière adiabatique et réversible.



3. Cas du fluide parfait :

3.1. Equation d'Euler.

On considère des écoulements parfaits, incompressibles et homogènes ; on a alors ρ = cte.

On rappelle qu'un écoulement parfait exclut les phénomènes dissipatifs : viscosité, diffusion thermique, diffusion de particules, etc. Le terme de viscosité disparaît ; l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho\left[(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right]=-\overrightarrow{grad}P+\overrightarrow{f_{vol}}$$

Equation d'Euler

On rappelle que : $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\frac{v^2}{2})+(\overrightarrow{rot}\vec{v})\wedge\vec{v}$

3.2. Equation de Bernoulli.

On considère un écoulement parfait, incompressible, homogène, et stationnaire dans le seul champ de pesanteur et dans un référentiel galiléen.

Les hypothèses se traduisent par :; η = 0 ; ρ = cte ; ∂/∂t = 0.

a) Cas de l'écoulement irrotationnel : $\overrightarrow{rot}\vec{v}=\vec{0}$

La quantité $P + \rho gz + \rho v^2/2$ = constante dans tout le fluide.

Remarque : la quantité ρgz est appelée pression statique; ρv^2 est appelée pression cinétique·

b) Cas de l'écoulement rotationnel : $\overrightarrow{rot}\vec{v}\neq\vec{0}$

La quantité $P + \rho gz + \rho v^2/2$ = constante le long d'une ligne de courant.

4. Applications du théorème de Bernoulli :

4.1. Pression en des points remarquables :

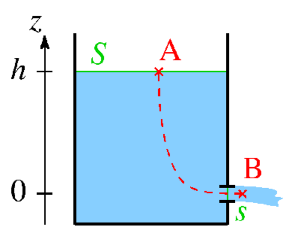
Prise de pression axiale : au point A, appelé point d'arrêt on mesure la pression dynamique

$$P(A) = P(A_\infty) + \rho v^2(A_\infty) / 2.$$

Prise de pression latérale : au point B, on mesure la pression statique :

$$P(B) = P(B_\infty)$$

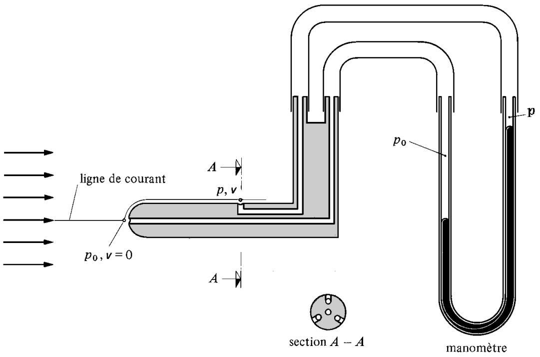
4.2. Formule de Torricelli :



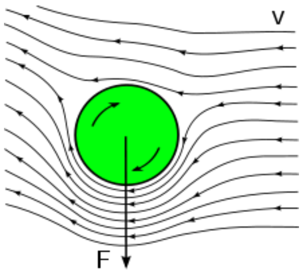
En supposant S >> s, on montre que $v = \sqrt{2gh}$.

4.3. Effet Venturi :
Dans un étranglement, en régime permanent, la vitesse augmente et la pression diminue.

4.4. Mesures de vitesses : tubes de Pitot.



4.5. Effet Magnus.



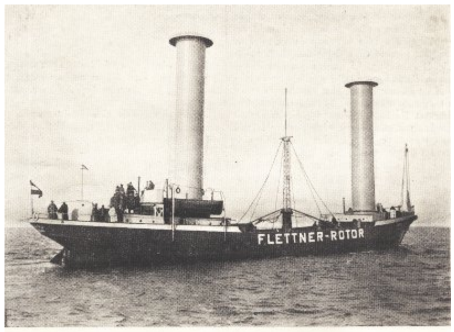


Fig. 1. — Le Buckau, bateau à vent muni des deux rotors du système Flettner.

5. Paradoxe de d'Alembert.

Un mobile en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide ne subit ni trainée ni portance dans le modèle de l'écoulement parfait incompressible.
Ce résultat est naturellement contraire à toutes les expériences ; il est paradoxal.
On lève ce paradoxe grâce à la viscosité du fluide, qui intervient toujours dans la couche limite, et se traduit par des forces sur le mobile.