ELECTROMAGNETISME CHAPITRE 4 : EQUATIONS DE MAXWELL

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Équations de Maxwell	
4.1 Postulats de l'électromagnétisme	
Force de Lorentz. Équations locales de Maxwell. Formes intégrales. Compatibilité avec les cas particuliers de l'électrostatique et de la magnétostatique ; compatibilité avec la conservation de la charge. Linéarité.	Utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale. Faire le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday étudiée en PCSI. Utiliser une méthode de superposition.
4.2 Aspects énergétiques	
Vecteur de Poynting. Densité volumique d'énergie électromagnétique. Équation locale de Poynting.	Utiliser les grandeurs énergétiques pour faire des bilans d'énergie électromagnétique. Associer le vecteur de Poynting et l'intensité utilisée en optique.
4.3 Validation de l'approximation des régimes quasi-stationnaires « magnétique »	
Équations de propagation des champs **E** et **B** dans le vide. Caractère non instantané des interactions électromagnétiques. Relation $\varepsilon_0\mu_0c^2=1$.	Établir les équations de propagation. Interpréter c.
ARQS « magnétique ».	Discuter la légitimité du régime quasi-stationnaire. Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge et utiliser les formes simplifiées. Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.

1. Force de Lorentz

Le champ électromagnétique est accessible à l'expérience par l'intermédiaire de la loi de force de Lorentz.

Dans un référentiel galiléen R, la force $\vec{F}(\vec{r},t)$ subie par une particule de charge q dont la vitesse par rapport à R est $\vec{v}(t)$ est donnée par :

$$\vec{F}(\vec{r},t) = q(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(\vec{r},t))$$

Cette loi de force constitue un postulat.

La puissance de cette force est :

$$P = q.\vec{E}.\vec{v}$$

La puissance volumique associée est :

$$p = \frac{dP}{dV} = \rho.\vec{E}.\vec{v} = \vec{\jmath}.\vec{E}$$

La force magnétique ne travaille pas.

2. Equations de Maxwell (1864).

Les équations de Maxwell permettent de relier le champ $(\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t))$ aux sources $(\rho(\vec{r},t),\vec{j}(\vec{r},t))$.
Ce sont des équations « locales » : elles s'appliquent en un point du milieu.
Ces équations sont des postulats.

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\ ;\ div\,\vec{B} = 0\ ;\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ \ ;\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Elles sont **linéaires**, ce qui permet d'appliquer aux champs $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ le théorème de superposition.
Dans ces équations $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ sont **couplés**.

Les constantes ε_0 et μ_0 sont liées au système d'unités ; dans le système MKSA :

ε_0 est la permittivité du vide ; $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ F.m^{-1} ;

μ_0 est perméabilité magnétique du vide ; $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} = $1{,}2566.10^{-6}$ H.m^{-1}

3. Forme intégrales des équations de Maxwell :

1. Théorème de Gauss :

Rappel : théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint div(\vec{A}).dV = \oiint \vec{A}.d\vec{S}$$

où V est le volume fermé par la surface S (fermée) orientée vers l'extérieur.

On déduit de l'équation de Maxwell-Gauss l'équation intégrale appelée théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Le théorème de Gauss montre que le flux du champ électrique à travers une surface S fermée n'est non nul que lorsque cette surface contient une charge non nulle.

2. Flux du champ magnétique :

On a grace au théorème de Green-Ostrogradsky

$$\oiint \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

Cette équation traduit le fait qu'il n'existe pas de « charges magnétiques ».

3. Loi de Faraday :

Théorème de Stokes :
Soit une surface S ouverte et orientée en concordance avec le contour C sur lequel elle s'appuie :

$$\iint_S \overrightarrow{rot}\vec{A}.d\vec{S} = \oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

On déduit alors de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}.d\vec{S}$$
$$\Leftrightarrow e = -\frac{d\phi}{dt}$$

4. Théorème d'Ampère généralisé :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

En utilisant le théorème de Stokes, on obtient :

$$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enlacé} + \mu_0\varepsilon_0\iint\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}$$

4. Equation de conservation de la charge :

On utilise la formule d'analyse vectorielle suivante :

$$\forall\,\vec{A}\;\; div(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = 0$$

On prend ensuite la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = \mu_0 div\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 div\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$
$$\Leftrightarrow 0 = \mu_0 div\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial div\vec{E}}{\partial t}\right)$$
$$\Leftrightarrow 0 = div\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

5. Equation de conservation de l'énergie électromagnétique :

Forme locale :

$$0 = div\vec{\pi} + \frac{\partial u_e}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E}$$

Forme intégrale :

$$\oiint \vec{\pi}.d\vec{S} + \iiint\left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E}\right).d\tau = 0$$

Définition : $\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B}$ est le vecteur de Poynting, en W.m^{-2}.

Définition : $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$ est la densité volumique d'énergie électromagnétique ;

$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E}$ est la puissance volumique fournie aux charges.

6. Les différents régimes de l'électromagnétisme :

6.1. Régimes stationnaires (dits statiques) :

Dans ces régimes, les densités de charges et de courants sont indépendantes du temps.

Les équations de Maxwell deviennent :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

Les équations sont découplées ; on étudie d'une part l'électrostatique, d'autre part la magnétostatique.

6.2. Approximation des regimes quasi-stationnaires (ARQS).

Lorsque le temps de variation caractéristique T de $\vec{j}(\vec{r},t)$ et $\rho(r, t)$, sources du champ sont grandes devant les temps de propagation du champ (entre le point P "source" et le point M où l'on étudie le champ), on peut négliger ce temps de propagation.

Cela se traduit par : PM / c << T, c étant la célérité de l'onde électromagnétique.

En ordre de grandeur : $\left\|\overrightarrow{rot}\vec{E}\right\| \approx E / PM$; $\left\|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right\| \approx B/T$ d'où $E \approx PM\, B/T$

De même $\left\|\overrightarrow{rot}\vec{B}\right\| \approx B/PM$ et $\varepsilon_0\mu_0 \left\|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\| \approx E / c^2 T \approx PM\, B / c^2 T^2 << (B/PM)$

On néglige alors dans l'équation de Maxwell-Ampère le courant de déplacement.

Seule l'équation de Maxwell-Ampère est modifiée et s'écrit à présent :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

La force de Lorentz est inchangée.

L'électrocinétique des circuits et l'induction (PCSI) sont étudiées dans l'ARQS.

L'équation de conservation de la charge s'écrit à présent :

$$div\vec{j} = 0$$

Le flux de $\vec{j}$ est conservatif ; cela traduit la loi des noeuds.

6.3. Régime de propagation :

Aucune approximation n'est faite dans les équations de Maxwell ; on montre alors (cf cours sur les ondes électromagnétiques) que les champs $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ se propagent.