# MECANIQUE DU POINT – Exercices de Noel

## 1. Pendule simple :

On considère un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m accrochée au bout d'un fil sans masse inextensible de longueur l, oscillant dans le champ de pesanteur **g**.
Trouver l'équation du mouvement de la masse m en utilisant le PFD puis le théorème du moment cinétique.
Quelle est la solution dans le cas des petites oscillations ?

## 2. Bille dans un tube :

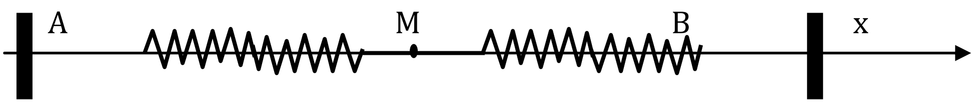
On considère une bille B, de masse m, assimilée à un point matériel, soumise à la pesanteur et susceptible de se déplacer **sans frottements** à l'intérieur d'un tube cylindrique mince T, de longueur 2L, effectuant des mouvements caractérisés par une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ autour d'un axe contenant son centre O.
Le référentiel R lié à l'axe est galiléen.
Le tube T est dans le plan horizontal ( O, x, y ) et tourne autour de l'axe Oz vertical à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = \omega \, \mathbf{k}$ constante .
A l'instant initial $r = r_0$ et $v = v_0 = 0$ ( par rapport au tube ).

1) Exprimer la vitesse de B par rapport à R.
2) Exprimer l'accélération de B par rapport à R.
3) Etablir l'équation différentielle en r du mouvement de B.
4) Intégrer cette équation différentielle pour les conditions initiales $r_0$, $v_0$.
5) On donne $L = 0{,}1$ m ; $r_0 = 0{,}01$ m ; $\omega = 2$ rad.s$^{-1}$.

Vérifier qu'au bout du temps $\tau = 1{,}5$ s la bille sort du tube.

## 3. Mobile lié à deux ressorts :

Considérons un mobile supposé ponctuel de masse M astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction Ox. Ce mobile est maintenu par deux ressorts identiques, de même raideur k et même longueur au repos $l_0$, dont les extrémités sont fixées en deux points A et B.
Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $l_{éq}$.




Dans un premier temps, on néglige tout frottement.
1/ A t = 0, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0$ (avec $x_0 \neq 0$ ).
Etablir l'équation différentielle dont x(t) est solution.
1/ b/ Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation et la période $T_0$ en fonction de k et m.
1/ c/ Donner l'expression de x(t) en tenant compte des conditions initiales.
2/ Donner les expressions de l'énergie potentielle élastique $E_p(t)$ des deux ressorts, de l'énergie cinétique $E_c(t)$ du mobile et de l'énergie mécanique totale E(t) du système en fonction de k, $x_0$, $\omega_0$ et t et éventuellement $l_0$ et $l_{éq}$.
En fait, il existe entre le mobile et la tige horizontale un frottement de type visqueux. La force de frottement est de la forme : $f = -\mu v$.
Les conditions initiales sont les mêmes que pour les questions précédentes.
3/ a/ Etablir l'équation différentielle dont x(t) est solution.
3/ b/ Donner la solution de cette équation et tracer le portrait de phase du système dans le cas d'un régime pseudo-périodique.

## 4. Glissement d'une particule sur une sphère :

Une particule M de masse m est lâchée sans vitesse initiale du sommet d'une sphère de rayon a et de centre O. Elle glisse sans frottements sur la sphère puis décolle et quitte la sphère au point S. La position de M à un instant t sera décrite par l'angle $\theta$ que fait OM avec la verticale ou la cote z de M par rapport à O ; on a donc $z = a\cos\theta$.

a) Quel systèmes de coordonnées est adapté ? Ecrire l'accélération de M en fonction de $\theta(t)$ et de ses dérivées dans ce système de coordonnées.

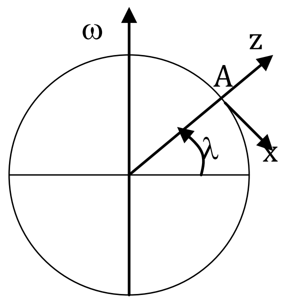
b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire deux équations scalaires.

c) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre deux instants bien choisis et en déduire une troisième équation ( cette troisième équation peut aussi être déduite d'une des deux équations obtenues en b ).

d) En déduire la réaction R du support en fonction de $\theta$ et de constantes.

e) En déduire la position de S.

## 5. Tir d'un obus vers le zénith :




En un lieu A de latitude $\lambda = 48°$N, un canon tire un obus à la vitesse $v_0 = 100$ m.s$^{-1}$ suivant la verticale ascendante Az.

On désigne par Axyz un repère orthonormé lié à la Terre, Ax étant dirigé vers le Sud.

On assimile la Terre à une sphère homogène, tournant autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire $\omega_0 = 7{,}3\ 10^{-5}$ rad.s$^{-1}$.

On note $\vec{g}_0$ le champ de pesanteur terrestre, de module $g_0$ supposé constant égal à 10 m.s$^{-2}$.

On considère que le référentiel géocentrique est galiléen.

a) Définir un référentiel galiléen.

b) Ecrire l'équation du mouvement de l'obus en considérant le référentiel terrestre comme galiléen, et en déduire la loi $v_z(t)$.

c) Ecrire l'équation vectorielle du mouvement de l'obus en considérant le référentiel terrestre comme non-galiléen. Pourquoi la force d'inertie d'entraînement n'intervient-elle pas explicitement dans l'équation du mouvement ?

d) On évalue la force d'inertie de Coriolis en utilisant la loi de vitesse obtenue au b) .Montrer qu'on a alors $\ddot{y} \approx -2\omega_0 (v_0 - g_0 t) \cos\lambda$ et en déduire une expression approchée de l'ordonnée y de l'obus.

e) Évaluer y au moment où l'obus tombe sur le sol. La déviation se fait-elle vers l'Ouest ou vers l'Est ? Le résultat dépend-il de l'hémisphère dans lequel on effectue le tir ?

Réponses : b) $v_z(t) = -g_0.t + v_0$ ; d) $\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = -2m\omega\cos(\lambda).(v_0 - g_0 t).\vec{u}_y$ ; e) L'obus touche le sol à $t_0 = 2.v_0/g_0$ ; $y(t_0) = -4\omega.\cos\lambda.v_0^3/3g_0^2$.

## 6. Cyclotron de Lawrence :

Le premier cyclotron fut construit en 1932 par Lawrence à Berkeley ( Californie ). L'appareil avait un rayon de 14 cm et communiquait à des protons une énergie cinétique de 1,2 MeV. La différence de potentiel était de 4000 V au moment du passage entre les dés.

Quels étaient :

a) La vitesse maximale des protons ?

b) La tension accélératrice qu'il aurait fallu utiliser pour leur communiquer cette vitesse ?

c) La fréquence du champ électrique accélérateur ?

d) Le nombre de tours décrits par les protons ?

e) Le champ magnétique ?

Données : $m_p = 1{,}672.10^{-27}$ kg ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

Réponses : a) $v = 15.10^6$ m.s$^{-1}$ b) $U = 1{,}2.10^6$ V ( voir définition de l'eV ! ) ; c) f = 17,2 MHz ; d) n = 150 tours ; e) $R = m.v / eB$ d'où B = 1,12 T.