

## DIFFUSION THERMIQUE

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>2.2 Diffusion thermique</b>	
Vecteur densité de flux thermique $j_Q$	Exprimer le flux thermique à travers une surface en utilisant le vecteur $j_Q$ .
Premier principe de la thermodynamique.	Utiliser le premier principe dans le cas d'un milieu solide pour établir une équation locale dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne, éventuellement en présence de sources internes. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
Loi de Fourier.	Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
Régimes stationnaires. Résistance thermique.	Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Exprimer une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel en géométrie cartésienne. Utiliser des associations de résistances thermiques.
Équation de la diffusion thermique en l'absence de sources internes.	Établir une équation de la diffusion dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Utiliser la relation de Newton $\delta Q = h(T_s - T_a) dS dt$ fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide.

On considère dans ce cours des grandeurs unidimensionnelles, soit  $f(x,t)$ .

### 1. Modes de transfert thermique :

Les transferts thermiques peuvent se faire :

- par **rayonnement** : l'énergie est véhiculée par une onde , exemple : four à micro-ondes, feu de cheminée.
- par **convection** : l'énergie s'échange par déplacement de fluide, exemple : radiateur soufflant ( convecteur !), Gulf Stream.
- par **diffusion** (ou **conduction**) : migration d'énergie sans déplacement macroscopique du milieu ; cette migration d'énergie est due à **l'agitation thermique** : l'énergie s'échange par chocs, exemple : diffusion dans une cuiller en métal, diffusion à travers un mur.

La diffusion thermique se produit lorsqu'il existe un **gradient de température** dans un milieu ; l'énergie est transférée spontanément des zones chaudes vers les zones froides du milieu considéré.

<http://www.youtube.com/watch?v=nbzYilygJs4>

## 2. Définitions :

**Définition** : on appelle **flux thermique**  $\Phi$  à travers une surface  $S$  le transfert thermique à travers  $S$  par unité de temps.

Unité :  $J \cdot s^{-1} = W$

Le transfert thermique  $\delta Q$  traversant  $S$  pendant  $dt$  est donc :

$$\delta Q = \Phi \cdot dt$$

**Définition** : le vecteur **densité de flux thermique**  $\vec{J}_Q(\vec{r}, t)$  est un vecteur dirigé dans le sens du flux thermique, et dont le module est égal au transfert thermique traversant une surface unité perpendiculaire à  $\vec{J}_Q(\vec{r}, t)$  par unité de temps.

Il s'exprime en  $J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1} = W \cdot m^{-2}$ .

On a donc la relation :

$$\phi = \iint \vec{J}_Q(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

Dans le cas fréquent où  $\vec{J}_Q(\vec{r}, t)$  et  $d\vec{S}$  sont colinéaires et de même sens, et où  $\vec{J}_Q(\vec{r}, t)$  est uniforme sur la surface  $S$ , on a :

$$\phi = \iint \vec{J}_Q(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \iint J_Q(\vec{r}, t) \cdot dS = J_Q(\vec{r}, t) \iint dS = J_Q(\vec{r}, t) \cdot S$$

La grandeur analogue à  $n(x,t)$  en diffusion de particules est l'énergie volumique ; pour une phase condensée de masse volumique  $\rho$  et de capacité calorifique massique  $C$ , elle s'écrit :

$$u = \rho \cdot C \cdot T$$

## 3. Equation de conservation de l'énergie :

### 3.1. Sources internes :

Dans certains cas, il peut exister une « source interne » d'énergie, produisant une puissance thermique  $p_{vol}$  par unité de volume ( exemple : effet Joule, radioactivité ).

Exemple : si un barreau de volume  $V$  possède une résistance  $R$  et est parcouru par  $I$ , on aura :

$$p_{vol} = \frac{RI^2}{V}$$

Remarque : une source interne traduit une conversion d'énergie, pas une création !

### 3.2. Bilan d'énergie interne :

On considère un cylindre de matériau solide d'axe  $Ox$ , de longueur  $L$ , section  $S$  (volume constant), de masse volumique  $\rho$  et de capacité calorifique massique  $C$ .

On suppose le problème unidimensionnel : les grandeurs ne dépendent que de  $x$  (et de  $t$ ). Pour cela la barre doit être calorifugée latéralement : pas d'échange thermique sur la surface latérale.

L'énergie interne d'une masse  $m$  de solide s'écrit alors :

$$U(x,t) = m.c.T(x,t) + cte$$

Le système considéré est une masse  $dm$  de ce solide comprise entre  $x$  et  $x+ dx$  ; sa masse s'écrit :

$$dm = \rho.S.dx$$

et son énergie interne :

$$dU(x, t) = dm.c.T(x,t) + cte$$

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à cette tranche de section  $S$  perpendiculaire à  $Ox$  comprise entre  $x$  et  $x+ dx$  s'écrit entre  $t$  et  $t+ dt$  :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

ou plutôt :

$$d^2U = \delta^2W + \delta^2Q$$

car nous calculons la variation d'énergie interne d'un volume élémentaire pendant une durée élémentaire, donc c'est de l' « élémentaire au carré » !

La variation d'énergie interne entre  $t$  et  $t+dt$  est :

$$d^2U = dU(t+dt) - dU(t) = dm.c.(T(x,t+dt) - T(x,t)) = dm.c.\frac{\partial T}{\partial t}.dt$$

Le seul travail considéré étant celui des forces de pression, on a pour un solide :

$$\delta^2W = 0$$

Les transferts thermiques peuvent se faire :

- Par les « sources internes » : on a alors :

$$\delta^2Q_{interne} = p_{vol}.dV.dt$$

- par flux thermiques à travers les surfaces terminales :

$$\delta^2Q(x,t) = \Phi(x,t).dt - \Phi(x+dx,t) = -\frac{d\Phi}{dx}.dx.dt$$

avec :

$$\Phi = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j \cdot dS = j \cdot \iint dS = j \cdot S$$

On obtient donc :

$$\rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} + p_{vol}$$

**Equation de conservation de l'énergie à une dimension.**

Cette équation se généralise à trois dimensions :

$$\rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{J}_Q) + p_{vol} \quad \heartsuit$$

3.3. Cas du régime stationnaire avec  $p_{vol} = 0$  ; théorème d'Ostrograsky :

L'équation se réduit à :

$$\text{div}(\vec{J}_Q) = 0$$

On a vu ( cours de diffusion de particules ) que la divergence d'un champ de vecteurs exprimait le flux volumique de ce vecteur en un point.

C'est ce qu'exprime le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{A}) \cdot dV = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

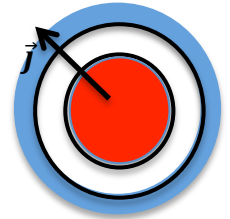
où V est le volume fermé par la surface S ( fermée ) orientée vers l'extérieur.

**En régime stationnaire, si  $p_{\text{vol}} = 0$ , le flux thermique  $\phi$  se conserve** ♥

Exemple d'un système à symétrie cylindrique :

Si le système est assez long ( Longueur L  $\gg$  rayon R ) et possède la symétrie de révolution :

$$\vec{j} = j(r, t) \cdot \vec{u}_r$$



Le flux de  $\vec{j}$  à travers un cylindre de rayon r et de longueur L est donc :

$$\Phi = j(r, t) \cdot 2\pi \cdot r \cdot L$$

Ce flux étant constant on en déduit que la densité de flux  $j(r, t)$  est inversement proportionnelle à r.

Il est également possible d'exploiter un formulaire ; en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div}(j(r, t) \cdot \vec{u}_r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot j)$$

donc :

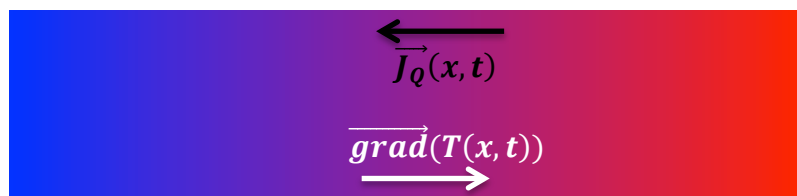
$$\operatorname{div}(j(r, t) \cdot \vec{u}_r) = 0 \Rightarrow r \cdot j = \text{cte}$$

#### 4. Loi de Fourier :

Loi de Fourier ( phénoménologique ) :

$$\vec{J}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}T} \quad \heartsuit$$

$\lambda$  ( positive ) est la conductivité thermique, en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .



<http://www.youtube.com/watch?v=h0dgQRN9qeo>

Rappel : en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(T(x, y, z, t)) = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \vec{u}_z \quad \heartsuit$$

Pour une répartition de température  $T(x, t)$  :

$$\vec{J}_Q(x, t) = -\lambda \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \vec{e}_x$$

Ordres de grandeurs :

	<b>Air</b>	Polystyrène expansé	<b>Eau</b>	Bois	Verre	<b>Béton</b>	<b>Acier</b>	Cuivre
$\lambda$ ( $Wm^{-1}K^{-1}$ )	<b>0,03</b>	0,004	<b>0,6</b>	0,3	0,5 à 2	<b>1</b>	<b>20</b>	400

Il y a analogie entre la loi de Fick et la loi de Fourier.

## 5. Equation de la chaleur :

En injectant la loi de Fourier dans l'équation de conservation, on obtient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p_{vol}}{\rho c}$$

Equation « de la chaleur »

Cette équation se généralise à trois dimensions sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \Delta T + \frac{p_{vol}}{\rho c}$$

Remarques :

- Cette équation est linéaire.
- Le fait que t ne puisse être remplacé par -t montre que la conduction est un phénomène irréversible.

**Définition** :  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$  est appelé **diffusivité**. Unité :  $m^2 \cdot s^{-1}$ .

La diffusivité est l'analogue du coefficient de diffusion D en diffusion de particules.

Soit L un ordre de grandeur des variations spatiales de T(x,t) et  $\tau$  un ordre de grandeur des variations temporelles de T(x,t).

On calcule en ordre de grandeurs littéraux :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T}{\tau} ; \Delta T \approx \frac{T}{L^2}$$

Si  $p_{vol} = 0$ , l'équation de la chaleur fournit :

$$L^2 \approx D \cdot \tau \quad \heartsuit$$

Exemple en coordonnées sphériques :

On considère un solide à symétrie sphérique, compris entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ , avec  $T(R_1) = T_1$  et  $T(R_2) = T_2$ .

On a donc :

$$T = T(r, t)$$

En régime stationnaire, T ne dépend pas du temps, donc :

$$T = T(r)$$

Un formulaire donne :

$$\Delta T(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

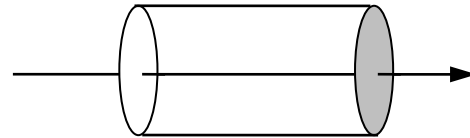
On a donc :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = - \frac{p_{vol}}{\lambda}$$

## 6. Régime stationnaire sans sources internes ; résistance thermique :

### 6.1. Modèle :

On considère un barreau d'axe Ox, homogène, de longueur L, section S et conductivité  $\lambda$  dont les deux extrémités sont maintenues aux températures  $T_1 > T_2$  et  $T_2$ .



On suppose  $p_{vol} = 0$  et le régime stationnaire.

On calcule alors :

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot \frac{x}{L}$$

d'où :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\lambda S}{L} \cdot (T_1 - T_2)$$

### 6.2. Résistance thermique :

**Définition :**  $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}}$  est la résistance thermique du barreau. Unité :  $K \cdot W^{-1}$ .

En géométrie cartésienne avec  $T = T(x)$ , on calcule

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

**Définition :** la conductance thermique est l'inverse de la résistance thermique du barreau :

$$G_{th} = 1/R_{th}$$

Unité :  $W \cdot K^{-1}$ .

### Associations de résistances :

Deux résistances thermiques sont dites en série si elles sont parcourues par le même flux thermique ; on a alors :

$$R_{equ} = R_1 + R_2$$

Deux résistances thermiques sont dites en parallèle si elles sont soumises au même gradient de température ; on a alors :

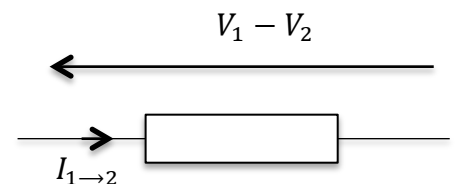
$$G_{equ} = G_1 + G_2$$

### 6.3. Analogie électricité-thermique :

La loi :

$$T_1 - T_2 = R_{th} \cdot \phi_{1 \rightarrow 2}$$

est analogue à la loi d'Ohm :



On a donc les analogies suivantes :

Potentiel V	-> Température T
Intensité i	-> Flux thermique $\phi$ .
Résistance électrique R	-> Résistance thermique $R_{th}$ .

Remarque : les unités des grandeurs analogues sont strictement différentes !!

## 7. Conditions aux limites :

L'équation de la chaleur comportant une dérivée temporelle et une dérivée seconde spatiale, sa résolution nécessite une condition aux limites temporelle ( appelée condition initiale en général car donnée à un instant  $t=0$ ), et deux conditions aux limites spatiales.

### 7.1. Continuité du flux thermique :

Le flux thermique est une fonction continue de la position :

**Le flux est continu à une interface entre deux milieux.**

**Cas particulier** : flux thermique au niveau d'une paroi calorifugée :

Le flux thermique dirigé selon la normale à une paroi calorifugée est nul par définition.

### 7.2. Continuité/discontinuité de la température :

#### a) Contact thermique parfait :

Ce cas constitue une modélisation simple de l'interface entre deux corps, valable lorsque ces deux corps sont deux fluides, pour lequel le contact est bon.

On considère alors que la température est une fonction continue de la position :

**Pour un contact thermique parfait, la température est continue à une interface.**

#### b) Discontinuité de la température à une interface solide - liquide : loi de Newton.

On constate expérimentalement que dans le cas d'un matériau solide dont la surface est à température T vers un fluide à son contact, à température  $T_f$ , la température n'est pas continue ; on parle de transfert conducto-convectif.

Le flux thermique élémentaire échangé par une surface élémentaire  $dS$  du matériau vers le fluide est donné par la loi phénoménologique :

$$d\Phi = h.(T - T_f).dS$$

Loi de Newton de la conducto-convection.

h est le coefficient de convection en  $W.m^{-2}K^{-1}$  ; il dépend du matériau, du fluide et de sa vitesse.

Le transfert thermique élémentaire échangé pendant dt sur une surface dS est :

$$\delta^2Q = h.(T - T_f).dS.dt$$

La résistance thermique d'un contact conducto-convectif est :

Exemple : barre droite non calorifugée en régime stationnaire sans sources internes :

On suppose toujours  $T = T(x)$  ; c'est maintenant une approximation.

On doit reprendre la démonstration de l'équation de conservation, pour tenir compte du transfert conducto-convectif.

Le système est toujours un élément de longueur  $dx$  du barreau, de rayon  $R$ .

La variation d'énergie interne entre  $t$  et  $t+dt$  est nulle en régime stationnaire.

$$d^2U = dU(t+dt) - dU(t) = 0.$$

Le seul travail considéré étant celui des forces de pression, on a toujours :

$$\delta^2W = 0$$

Les transferts thermiques sont à présent :

- Du à la conduction à travers les surfaces terminales :

$$\delta^2Q(x,t) = \Phi(x,t).dt - \Phi(x+dx,t) = -\frac{d\Phi}{dx} \cdot dx \cdot dt = -\frac{d(j \cdot S_{term})}{dx} \cdot dx \cdot dt = -\frac{d(j)}{dx} \cdot S_{term} \cdot dx \cdot dt$$

avec  $S_{term} = \pi R^2$

- Du à la conducto-convection sur la surface latérale :

$$\delta^2Q = -h(T - T_f).dS_{lat}.dt$$

avec  $dS_{lat} = 2\pi R \cdot dx$

On obtient donc :

$$\frac{dj}{dx} \cdot \pi R^2 - h(T - T_f) \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = 0$$

La loi de Fourier s'écrit :

$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

d'où :

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} \cdot R - 2 \cdot h(T - T_f) = 0$$

Exemple : Air le long d'une paroi métallique :  $v < 5 \text{ m.s}^{-1}$  :  $h = 5,8 + 4v$

$$v > 5 \text{ m.s}^{-1} : h = 7,14 (v)^{0,78}$$