Chapitre 2 : ELECTROSTATIQUE

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Électrostatique	
2.1 Champ électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle : relation **E** = - **grad** V. Principe de superposition. Circulation conservative du champ électrique et signification physique : énergie potentielle d'une charge q dans un champ **E**. Équation locale **rot E** = **0**. Propriétés de symétrie. Théorème de Gauss et équation locale div**E**=ρ/ε_0. Propriétés topographiques.	Citer l'ordre de grandeur du champ créé par le noyau sur l'électron dans un atome d'hydrogène. Associer la circulation de **E** au travail de la force q**E**. Utiliser le théorème de Stokes. Associer les propriétés locales **rot E** = **0** dans tout l'espace et **E**=-**grad** V. Associer la relation **E** = - **grad** V au fait que les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants. Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé. Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss. Justifier qu'une carte de lignes de champs puisse ou non être celle d'un champ électrostatique ; repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme de **E** à l'évasement des tubes de champ loin des sources. Déduire les lignes équipotentielles d'une carte de champ électrostatique, et réciproquement. Évaluer le champ électrique à partir d'un réseau de lignes équipotentielles.
2.2 Exemples de champs électrostatiques	
Dipôle électrostatique. Moment dipolaire Potentiel et champ créés. Actions subies par un dipôle placé dans un champ électrostatique d'origine extérieure :	Décrire les conditions de l'approximation dipolaire. Établir l'expression du potentiel V. Comparer la décroissance avec la distance du champ et du potentiel dans le cas d'une charge ponctuelle et dans le cas d'un dipôle. Tracer l'allure des lignes de champ. Utiliser les expressions fournies de l'énergie

résultante et moment. Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure. Approche descriptive des interactions ion-molécule et molécule-molécule. Dipôle induit. Polarisabilité.	potentielle E_p, de la résultante **F** et du moment **M**. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle dans un champ d'origine extérieure **E**. Expliquer qualitativement la solvatation des ions dans un solvant polaire. Expliquer qualitativement pourquoi l'énergie d'interaction entre deux molécules polaires n'est pas en $1/r^3$. Exprimer la polarisabilité d'un atome en utilisant le modèle de Thomson. Associer la polarisabilité et le volume de l'atome en ordre de grandeur.
Plan infini uniformément chargé en surface. Condensateur plan modélisé par deux plans parallèles portant des densités superficielles de charges opposées et uniformes. Capacité. Densité volumique d'énergie électrostatique.	Établir l'expression du champ créé. Établir l'expression du champ créé. Déterminer la capacité du condensateur. Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air. Associer l'énergie d'un condensateur apparue en électrocinétique à une densité volumique d'énergie.
Noyau atomique modélisé par une boule uniformément chargée : énergie de constitution de la distribution.	Exprimer l'énergie de constitution du noyau à un préfacteur numérique près par analyse dimensionnelle. Obtenir le préfacteur numérique en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini. Relier les ordres de grandeur mis en jeu : rayons et énergies. Justifier la nécessité de l'interaction forte.
2.3 Analogies avec le champ gravitationnel	
Analogies formelles entre champ électrostatique et champ gravitationnel.	Mettre en évidence les analogies formelles entre les forces électrostatique et gravitationnelle pour en déduire l'analogie des propriétés des champs.

1. Equations générales et conséquences :

1.1. Equations vérifiées par $\vec{E}$:

Sous forme locale :

$$\boldsymbol{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\;;\;\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}} \quad ♡$$

Sous forme intégrale :

$$\oiint \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}\;;\;\oint \vec{E}\,.\,d\vec{l} = 0 \quad ♡$$

cette dernière relation exprime le fait que le champ $\vec{E}$ est à **circulation conservative.**

On déduit de la forme locale de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \;\Leftrightarrow\; dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dM} \quad ♡$$

V est le potentiel électrostatique.

1.2. Equations de Poisson et de Laplace :

On utilise la relation vectorielle : $div\left(\overrightarrow{grad}V\right) = \Delta V$

La combinaison des équations de Maxwell-Gauss et Mxwell-Faraday permet d'écrire :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \;\; (\textit{equation de Poisson})$$

Dans une région vide de charges ($\rho = 0$), cette équation s'écrit :

$$\Delta V = 0 \;\; (\textit{equation de Laplace})$$

1.3. Principe de superposition :

Les équations vérifiées par les champs étant **linéaires** (cf équations de Maxwell) les champs obéissent au principe de superposition : le champ créé par une distribution de charges est égal à la somme (vectorielle) des champs créés par chacune de ses charges.

Exemple : molécule d'eau.

1.4. Relation entre lignes de champ et équipotentielles :

Définition : les équipotentielles sont les lieux des points M sur lesquels le potentiel est constant.

La relation :

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dM}$$

exprime le fait que les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ .

Le signe – exprime le fait que les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

1.5. Energie potentielle électrostatique :

La force exercée par un champ électrostatique $\vec{E}$ sur une charge q' est :

$$\vec{F} = q'\vec{E} = -q.\overrightarrow{grad}V = -\overrightarrow{grad}(qV)$$

L'énergie potentielle d'une charge q' dans un potentiel V est donc :

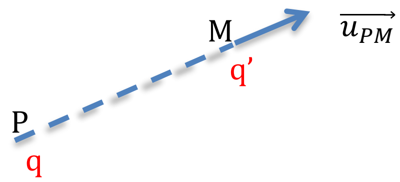
$$E_p(r) = q.V(r)$$

2. Cas des charges ponctuelles :

2.1. Loi de Coulomb :

La force exercée par une particule ponctuelle de charge q située en P sur une particule ponctuelle de charge q' située en M est la force de Coulomb :

$$\vec{F}(M) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_{PM}} \quad \heartsuit$$



Le champ créé en un point M par une charge ponctuelle q située en P s'écrit en conséquence :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

La relation entre champ et potentiel permet de calculer le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + cte$$

En général on choisit le potentiel nul à l'infini ce qui annule la constante ; on choisit toujours cette convention lorsqu'il n'y a pas de charges à l'infini.

2.2. Ordre de grandeur atomique :

Pour l'atome d'hydrogène, on a : r ≈ 50 pm (rayon de Bohr) ; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ SI ;

le champ créé par le noyau sur l'électron dans un atome d'hydrogène vaut E = 6.10^{11} V.m^{-1}.

2.3. Energie potentielle électrostatique :

Le travail de la force de Coulomb pour déplacer la charge q' d'une position M caractérisée par r_1, à une position M' caractérisée par r_2, est :

$$W_{1\to 2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}.d\vec{r} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

On en déduit :

$$E_p(r) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + cte$$

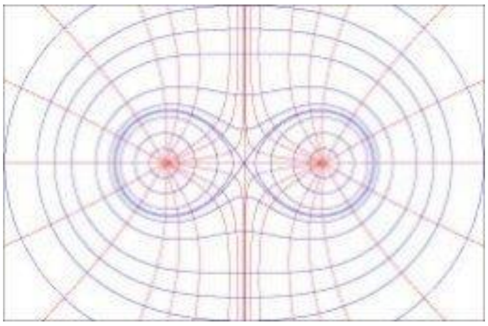
La circulation du champ électrostatique d'un point A à un point B s'écrit :

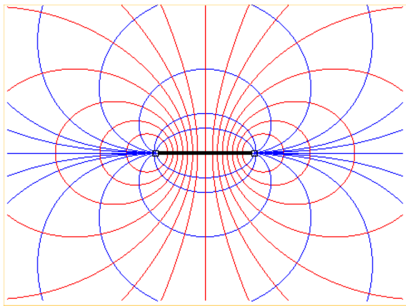
$$C_{1\to2} = \int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{W_{1\to2}}{q'}$$

On vérifie bien que :

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{l} = 0$$

2.4. Etude de quelques cartes de champ :





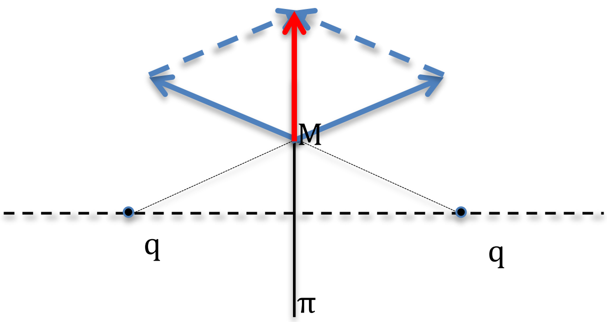
Quelles informations peut-on déduire de la lecture d'une carte de champ, ou d'une carte de potentiels ?

3. Symétries d'une distribution de charges :

L'étude des symétries permet de connaître la direction du champ.

3.1.Champ en un point d'un plan de symétrie :

Considérons un couple de 2 charges identiques.
Cette distribution – discrète – possède un plan de symétrie π : la distribution de charges est inchangée dans une symétrie par rapport au plan π.

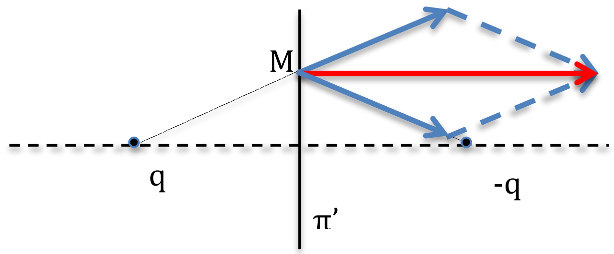


On constate que si M est dans le plan de symétrie $\vec{E}(M)$est contenu dans ce plan ; cette propriété est générale pour les distributions discrètes et continues.

En un point M d'un plan de symétrie d'une distribution de charges le champ $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan ♡.

3.2.Champ en un point d'un plan d'antisymétrie :

Considérons un couple de 2 charges opposées.
Cette distribution – dite discrète – possède un plan d'antisymétrie π' : la distribution de charges est transformée en son opposée dans une symétrie par rapport au plan π'.



On constate que dans le plan d'antisymétrie $\vec{E}(M)$est perpendiculaire dans ce plan ; cette propriété est générale, pour les distributions discrètes et continues.

En un point M d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges le champ $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan ♡.

Dans le cas général, une distribution de charges peut présenter à la fois des plans de symétrie et des plans d'antisymétrie, ainsi il est souvent possible de connaître la direction de $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace.

Attention, pour caractériser les plans, il faut d'abord choisir un système de coordonnées adaptées !

3.3. Exemples :

- plan infini chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$;
- ensemble de deux plans infinis distants de a et chargés avec les densités surfacique σ et $-\sigma$;
- ligne droite infinie chargée avec une densité linéique de charges λ ;
- sphère de rayon R chargée avec une densité volumique de charges ρ.

4. Invariances d'une distribution de charges :

Les invariances permettent de savoir de quelles variables dépend le champ.

Définition : une distribution de charges est dite invariante par une transformation T de l'espace si cette distribution est inchangée dans la transformation T.

Les transformations considérées sont :
- Les translations (selon un certain axe) ;
- Les rotations (autour d'un certain axe).

On admet que si une distribution de charges est invariante dans une transformation, le champ électrostatique est également invariant dans cette transformation.
C'est le **principe de Curie** : les symétries des causes se retrouvent dans les effets.

Exemple : plan infini chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$.

Les coordonnées adaptées les plus naturelles sont les coordonnées cartésiennes (on peut aussi utiliser des coordonnées cylindriques, l'axe 0z étant perpendiculaire au plan chargé.

Toute translation dans une direction parallèle à l'axe Ox ou 0y laisse la distribution invariante ; on en déduit que le champ ne dépend ni de x ni de y.

5. Théorème de Gauss :

5.1. Méthode :

Le théorème de Gauss est l'équation de Maxwell-Gauss intégrale :

$$\oiint \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Ce théorème peut servir à calculer le champ dans les distributions à « haute symétrie » : distributions dans lesquelles la direction du champ est connue en tout point de l'espace, et pour lesquelles le champ ne dépend que d'une variable.

Rappel : surface fermée : on dit qu'une surface est fermée si elle permet de définir un intérieur et un extérieur à cette surface. Une surface fermée est toujours orientée vers l'extérieur par un vecteur $d\vec{S}$ normal à cette surface.

On doit chercher une surface fermée passant par le point M d'étude, sur laquelle le champ $\vec{E}$ sera uniforme, et dont le vecteur $d\vec{S}$ est :

- soit colinéaire à $\vec{E}$;
- soit perpendiculaire à $\vec{E}$.

Cette surface peut être la réunion de plusieurs surfaces ouvertes.

5.2. Champ créé par une sphère de rayon R et de centre O uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charges ρ :

La charge totale de la sphère est : $Q = \rho.\frac{4}{3}\pi.R^3$.

On montre qu'à l'intérieur de la sphère :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\overrightarrow{u_r}$$

et à l'extérieur de la sphère :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Remarques :

- le champ est identique au champ créé par une charge ponctuelle Q située en O ;
- le champ est continu en r = R : cette continuité est générale pour les distributions de charges volumiques.

5.3. Champ créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ :

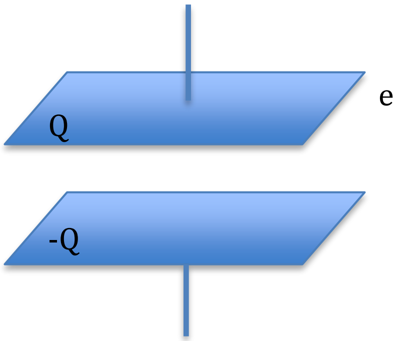
Si le plan chargé est le plan Oxy :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour } z > 0 \,;$$
$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour } z < 0.$$

Remarque : le champ est discontinu en z=0, la discontinuité valant :

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$$

6. Principe de superposition : application au condensateur plan :



6.1. Définition :

Un condensateur plan est formé de deux armatures planes de surface S, distantes de e, et portant des charges Q et –Q opposées uniformément réparties avec les densités σ et -σ.
On a naturellement :

$$Q = \sigma . S$$

Une modélisation simple consiste à considérer les plans comme infinis, ie à négliger les effets de bord.

On a montré que le champ créé par une plaque plane infinie perpendiculaire à un axe Oz et chargée avec une densité uniforme σ est :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour z > 0 ;}$$
$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour z < 0.}$$

Par superposition, le champ créé par le condensateur plan est nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur, avec :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$$

La différence de potentiel entre les deux armatures vaut donc :

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}e$$

6.2. Capacité du condensateur :

$$C \overset{\text{def}}{=} \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Remarque : l'espace inter armatures n'est pas vide, mais rempli d'un isolant (dit « diélectrique ») et caractérisé par sa permittivité <u>relative</u> (ie relative au vide et sans dimension) notée ε.
La capacité devient alors :

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{e}$$

6.3. Energie du condensateur :

L'énergie électrostatique d'une distribution de charge qui crée un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dans l'espace a pour expression :

$$E_e = \iiint_{espace} \frac{\varepsilon_0 . E^2}{2} . dt$$

On calcule ici :

$$E_e = \frac{1}{2}C . U^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

7. Energie électrostatique d'un noyau atomique :

7.1. Première approche de l'énergie :

On modélise le noyau atomique par une sphère de rayon a uniformément chargée en volume de charge totale Q = Z.e.

L'énergie électrostatique du noyau est l'énergie à fournir pour constituer le noyau à partir de charges situées à l'infini.
Par analyse dimensionnelle, l'énergie électrostatique est de la forme :

$$E_e = K\frac{Q^2}{\varepsilon_0 a}$$

où le préfacteur K est sans dimensions.

Un calcul exact montre que :

$$E_e = \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

7.2. Modèle du noyau :

Le premier modèle de noyau (modèle de la goutte) du à Niels Bohr et Von Weiszacker (1935) stipule que :

- Le noyau est sphérique ;
- La densité de la matière nucléaire est constante et identique pour tous les noyaux, soit :

$$\frac{N}{V} = \frac{A}{4\pi R^3/3}$$

d'où $R = R_0.A^{1/3}$ avec $R_0 = 1{,}2.10^{-15}$ m.

Exemple d'un noyau d'U (Z = 92, A= 235, a = 7,0 fm) ; on calcule :

E = 1000 MeV

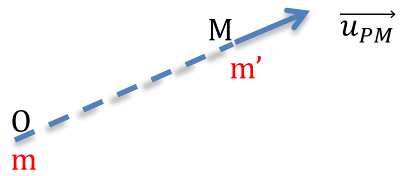
Cette énergie tend naturellement à faire éclater le noyau, ainsi il existe une force permettant la liaison : la force nucléaire, associée à une énergie par nucléon largement supérieure à 4 MeV/nucléon pour la plupart des noyaux.

Voir Feynman Electromagnétisme 1 « Energie électrostatique » .

8. Analogie avec le champ de gravitation :

La force exercée par une masse ponctuelle m située en O sur une masse ponctuelle m' située en M est la force de Coulomb :

$$\vec{F}(M) = -G\frac{mm'}{r^2}\overrightarrow{u_{OM}} \quad \text{(loi de Newton ♡)}$$



G = $6{,}67.10^{-11}$ SI est la constante de gravitation

Le champ de gravitation créé en un point M par une masse ponctuelle m située en O s'écrit en conséquence :

$$\vec{A}(M) = -G\frac{m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Le théorème de Gauss pour le champ de gravitation $\vec{A}$ s'exprime donc :

$$\oiint \vec{A}\,.\,d\vec{S} = -4\pi G.M_{int}$$

REVISONS L'ELECTROSTATIQUE

- Ecrire la loi de force de Coulomb et le champ créé par une charge ponctuelle.
- Calculer le champ créé par le proton de l'atome d'hydrogène sur l'électron.
- Quel est le travail de la force électrostatique entre deux points A et B ? En déduire l'énergie potentielle électrostatique d'une charge ponctuelle dans le champ d'une autre charge ponctuelle.
- Définir le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle.
- Donner les deux équations locales de l'électrostatique ; passer à la forme intégrale en utilisant les théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradsky.
- Quelle relation locale lie le potentiel électrostatique V à $\vec{E}$? Quelle relation intégrale ? Le potentiel est-il unique ?
- Quelles sont les symétries du champ $\vec{E}$; les appliquer dans les cas des plans, sphères et cylindres chargés uniformément .
- Savoir calculer le champ du à une plaque plane chargée en surface .
- Savoir calculer le champ du à une sphère chargée en volume.
- Enoncer la loi de Coulomb ; faire l'analogie avec la loi de Newton de la gravitation ; en déduire le théorème de Gauss pour la gravitation.

- Définir le dipôle électrostatique ; donner l'expression du potentiel créé (avec démonstration) , en déduire le champ créé, tracer qualitativement les lignes de champ.
- Savoir calculer les formes des actions subies par un dipôle rigide dans un champ extérieur uniforme (résultante et couple) , et son énergie d'interaction avec ce champ.
- Savoir utiliser la forme de la force subie par un dipole dans un champ non uniforme.

- Expliquer qualitativement pourquoi un ion se solvate et comment des molécules neutres peuvent interagir.