INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

1. Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :

1. Nature de l'approximation :

Lorsque le temps de variation caractéristique T de $\vec{j}(\vec{r},t)$ et $\rho(r, t)$, sources du champ sont grandes devant les temps de propagation du champ (entre le point P "source" et le point M où l'on étudie le champ), on peut négliger ce temps de propagation.
Cela se traduit par : PM / c << T, c étant la célérité de l'onde électromagnétique.

En ordre de grandeur littéral :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right\| \approx E / PM \; ; \left\|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right\| \approx B/T$$

d'où :

$$E \approx PM\, B/T$$

De même :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right\| \approx B/ PM \quad \text{et} \quad \varepsilon_0\mu_0 \left\|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\| \approx E / c^2\, T \approx PM\, B / c^2\, T^2 << (B/PM)$$

On néglige alors dans l'équation de Maxwell-Ampère le courant de déplacement.

Seule l'équation de Maxwell-Ampère est modifiée et s'écrit à présent :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

2. Loi de Faraday :

On a vu que l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit sous forme intégrale , pour un circuit filiforme fermé de contour orienté C :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

où

$$\phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

est le flux du champ magnétique à travers la surface S <u>ouverte</u> s'appuyant sur C et orientée en concordance avec C.

Remarque : en pratique les circuits inductifs sont des circuits bobinés constitués d'un grand nombre N de spires ; on peut confondre le flux à travers le circuit avec le flux à travers N spires fermées, donc on pourra toujours utiliser la loi de Faraday.

Le signe - de la loi de Faraday traduit **la loi de Lenz** : la fém induite tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

3. Equation de conservation de la charge :

On montre que l'équation de conservation de la charge s'écrit sous forme locale :

$$\mathrm{div}\,\vec{j} = 0.$$

Et sous forme intégale :

$$\oiint \vec{\jmath}.d\vec{S} = 0$$

Le flux de $\vec{j}$ est conservatif ; cela traduit la loi des noeuds.

4. Champs E et B :

Le théorème d'Ampère est valable dans l'ARQS, ainsi les champs magnétiques créés par les courants gardent dans l'ARQS la même forme qu'en magnétostatique.

Par contre le champ électrique n'est plus à circulation conservative, car :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Le champ électrique ne dérive plus d'un potentiel scalaire V dans l'ARQS.

2. Cas d'un circuit fixe dans un champ dépendant du temps :

2.1. Coefficient d'inductance propre :

Un circuit traversé par un courant variable crée à travers lui même un flux proportionnel à i(t) appelé flux propre Φ_p ; on parle alors d'**auto-induction**.

Défintion : L = Φ_P / i(t) est le coefficient d'auto-inductance du circuit. Unité : Henry (H)

Propriété : L est toujours positif et ne dépend que de la géométrie du circuit.

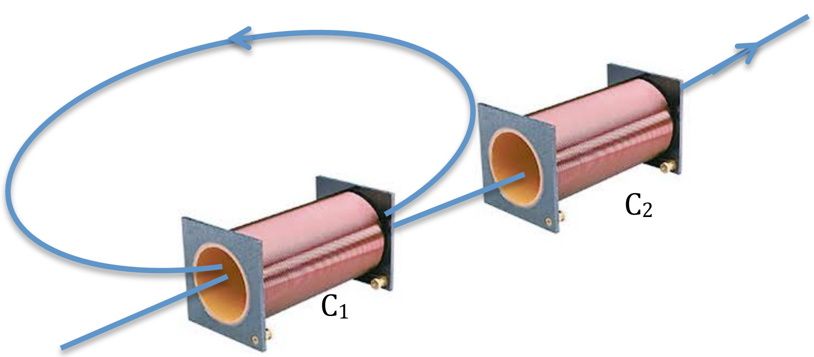
Exercice 1 : inductance propre d'une bobine dans le modèle du solénoide infini (longueur l, section S, N spires) :

a) Rappeler l'expression du champ magnétique créé par un courant i circulant dans le solénoide.
b) Calculer le flux de $\vec{B}$ à travers les N spires du solénoide.
c) En déduire que l'inductance propre de ce solénoïde est donnée par :

$$L = \mu_0 . N^2 . S / \ell$$

2.2. Coefficients d'inductance mutuelle :

Soit deux circuits C_1 et C_2 parcourus par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, par exemple deux solénoides.



Le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par $i_1(t)$ flue (totalement ou partiellement) à travers le circuit C_2 , créant un flux $\Phi_{1\text{->}2}$ proportionnel à $i_1(t)$.

Définition : $M_{1->2} = \Phi_{1->2} / i_1(t)$ est le coefficient d'inductance mutuelle du circuit 1 dans le circuit 2.

De même le champ magnétique $\vec{B}_2$ créé par $i_2(t)$ flue à travers le circuit C_1, créant un flux $\Phi_{2->1}$ proportionnel à $i_2(t)$:

Définition : $M_{2->1} = \Phi_{2->1} / i_2(t)$ est le coefficient d'inductance mutuelle du circuit 2 dans le circuit 1.

On a : $M_{2\rightarrow 1} = M_{1\rightarrow 2} = M$ (admis). Unité : Henry.

Remarque : M est algébrique ; son signe est lié aux orientations choisies pour C_1 et C_2 et n'a pas de signification physique.

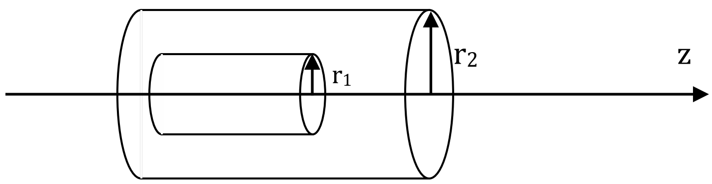
Le flux total à travers le circuit C_1 est :

$$\Phi_1 = L_1 i_1(t) + M.i_2(t) ;$$

Le flux total à travers le circuit C_2 est :

$$\Phi_2 = L_2 i_2(t) + M.i_1(t).$$

Exercice 2 : blindage électromagnétique :



Un petit solénoïde (1) de rayon r_1, comportant N_1 tours de fil, a même axe Oz qu'un solénoïde (2) assimilé à un solénoïde infini de longueur l_2 et de rayon $r_2 > r_1$, comportant N_2 tours de fil et une résistance R_2.

1. Rappeler l'expression du champ magnétique créé par le solénoide 2 parcouru par un courant I_2.
2. Montrer que le coefficient de mutuelle inductance des deux circuits est :

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_2} \pi r_1^2$$

Exercice 3 : mesure d'inductance mutuelle :

On considère deux bobines de résistances négligeables et de coefficients d'inductance propre L_1 et L_2. Les deux bobines sont disposées en série et couplées avec un coefficient d'inductance mutuelle M. Elles sont alimentées par un générateur de fém E et de résistance interne négligeable.

a) Faire unschéma du circuit.
b) Ecrire les tensions aux bornes de chaque bobine.
c) En déduire que l'inductance équivalente aux deux bobines en série est :

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

d) Que se passe-t-il si l'on permute les bornes d'une bobine ? En déduire une méthode de mesure de M.

2.3. Energie magnétique :

a) Cas d'un seul circuit :

Soit un circuit de coefficient d'inductance propre L, parcouru par un courant i(t) ; l'énergie magnétique emmagasinée dans le circuit est :

$$W_m = \frac{1}{2} L . i(t)^2$$

Cette énergie étant positive, on en déduit : L > 0.

b) Cas de deux circuits couplés par mutuelle :

Soit deux circuits C_1 et C_2 parcourus par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, de coefficients d'inductance propre L_1 et L_2, de coefficient d'inductance mutuelle M :

L'énergie magnétique stockée dans l'ensemble des deux circuits est :

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 . i_1(t)^2 + \frac{1}{2} L_2 . i_2(t)^2 + M . i_1(t) . i_2(t)$$

<u>Exercice 4</u> : inductance équivalente :

On considère deux bobines de résistances négligeables et de coefficients d'inductance propre $L1$ et $L2$. Les deux bobines sont disposées <u>en série</u> et couplées avec un coefficient d'inductance mutuelle M. Elles sont alimentées par un générateur de fém E et de résistance interne négligeable.

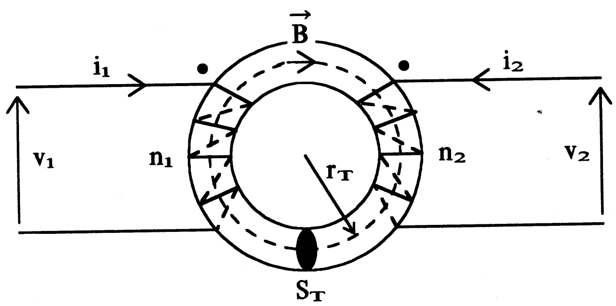
a) Ecrire l'énergie magnétique du circuit.

e) En identifiant cette énergie à celle de l'inductance équivalente L_{eq}, déduire cette inductance équivalente.

2.4. Application au transformateur :

Un transformateur est constitué de deux bobinages, l'un de n_1 spires dit primaire, l'autre de n_2 spires dit secondaire , enroulés sur une noyau de fer.

Dans le modèle du tranformateur parfait, on néglige les résistances des enroulements, et l'on suppose que le flux Φ à travers une spire est identique au primaire et au secondaire.



<u>Exercice 5</u> : loi des tensions :

a) Comment s'écrit la tension aux bornes de l'enroulement primaire en fonction de n_1 et Φ ?

b) Même question pour la tension aux bornes de l'enroulement secondaire.

c) En déduire la loi des tensions :

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{n_2}{n_1}$$

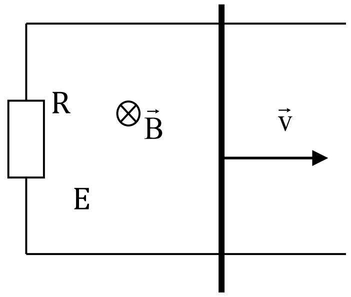
3. Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire :

3.1. Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique (dite « électromécanique ») :

a) Exemple du rail de Laplace :

Exercice 6 : rail de Laplace :

On considère une tige glissant sans frottements sur deux rails parallèles et horizontaux, distants de b et connectés à une extrémité à une résistance R ; le circuit est plongé dans un champ perpendiculaire au plan des rails, uniforme et permanent $\vec{B}$.
On éloigne la barre de l'extrémité du circuit à une vitesse $\vec{v}$ constante.
a) Calculer la fém induite e et le courant induit.
b) Calculer la puissance électrique fournie par la fém induite.
c) Calculer la force nécessaire pour assurer le déplacement de la barre.
d) Calculer la puissance de cette force et conclure.



b) Cadre en rotation dans un champ uniforme :

Exercice 7 : circuits en mouvement dans B :

Deux cadres métalliques rectangulaires verticaux et orthogonaux tournent autour de leur axe commun Δ initialement à la vitesse angulaire ω_0. Les deux cadres sont isolés.
Chacun a un moment d'inertie J, une résistance R, une surface S.
A l'instant t = 0, ils sont plongés dans un champ $\vec{B}$ uniforme et horizontal.
a) Déterminer la fém induite dans le premier cadre, puis l'intensité parcourant ce cadre.
b) Même question pour le second cadre.
c) Ecrire l'équation mécanique pour le système des deux cadres.
d) Etablir que l'équation différentielle vérifiée par ω est :
$$J\frac{d\omega}{dt} + \frac{B^2S^2}{R}\omega = 0$$
e) Faire un bilan énergétique. Que remarque-t-on ?

c) Courants de Foucault :

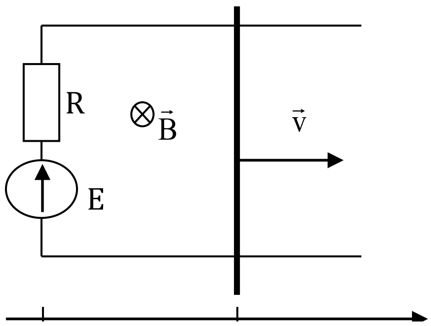
Les courants de Foucault sont des **courants volumiques induits** dans un matériau conducteur.
On les utilise souvent pour du freinage, exemple : freins de camion Telma.

3.2. Conversion d'énergie électrique en énergie mécanique :

a) Moteur à courant continu à entrefer plan :

Exercice 8 : Principe du moteur à courant continu :

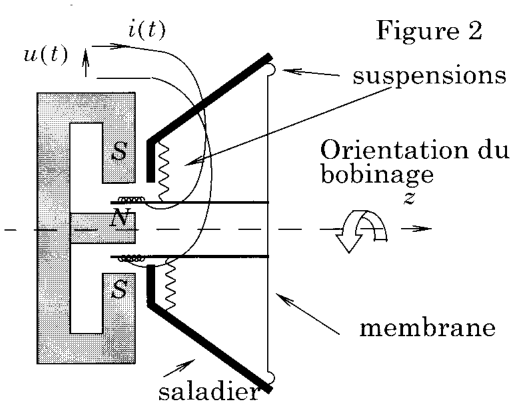
On considère une tige glissant sans frottements sur deux rails parallèles et horizontaux, distants de b et alimenté par un générateur fournissant une fém E. Le circuit possède une résistance R ; il est plongé dans un champ perpendiculaire au plan des rails, uniforme et permanent $\vec{B}$.
La barre se déplace à une vitesse $\vec{v}$.



a) Ecrire l'équation électrique du circuit.
b) Calculer la puissance électrique fournie par la fém induite.
c) Calculer la force de Laplace sur la barre et sa puissance. Conclure. x

b) Haut-parleur électrodynamique:

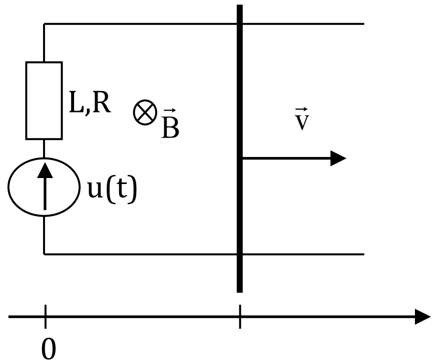
Le schéma d'un haut-parleur est donné ci-contre.



La membrane est modélisée par une barre de longueur l et de masse m se déplaçant sur deux rails, et soumise :

- à son poids, normal à l'axe Oz ;
- à une réaction du support normale au déplacement car sans frottement sec ;
- à une force de rappel exercée par le support de la membrane, modélisée par $\vec{F} = -k.z.\overrightarrow{u_z}$;
- à une force de frottement fluide : $\vec{f} = -\lambda.\frac{dz}{dt}.\overrightarrow{u_z}$ traduisant l'émission sonore ;
- à la force de Laplace $\vec{F_L}$.

Le circuit est alimenté par une tension u(t) variable ; il est constitué d'un solénoïde d'inductance L et de résistance R, et placé dans un champ $\vec{B}$ normal au plan du circuit et stationnaire.



<u>Exercice 9 : haut-parleur :</u>

a) Calculer la force de Laplace et montrer que l'équation mécanique de la membrane est :

$$m.\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \lambda\frac{dz(t)}{dt} + k.z(t) = i(t).l.B \quad (1)$$

b) Calculer la fém induite dans le circuit et montrer que l'équation électrique s'écrit :

$$L\frac{di(t)}{dt} + R.i(t) = u(t) - B.l.\frac{dz(t)}{dt} \quad (2)$$

c) On se place en régime permanent sinusoidal de pulsation ω. Comment s'écrivent les équations précédentes ?

d) Montrer que l'impédance du haut-parleur s'écrit :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{B^2l^2}{\underline{Z_m}} \; avec \; \underline{Z_m} = \lambda + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \; impédance \; motionnelle$$