

# CONCOURS BLANC EPREUVE DE PHYSIQUE MARDI 22 FEVRIER 2022 8H - 12H

## RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.

### I. Couche anti-reflet :

Les couleurs présentes dans le monde animal, végétal ou minéral sont le plus souvent d'origine pigmentaire, comme la couleur de la plupart des plantes. Certaines couleurs résultent toutefois de propriétés structurales de la matière comme la couleur de certaines nacres ou celle des ailes de certains papillons et sont régies par un ou plusieurs phénomènes physiques.



Ces phénomènes sont aussi utilisés dans l'industrie pour fabriquer des dépôts aux propriétés particulières comme les traitements antireflets des pare-brises de voitures, des lunettes ou plus généralement des instruments optiques.

## Partie I - Intérêt d'une couche antireflet

On souhaite savoir s'il est nécessaire d'utiliser des verres traités antireflets dans l'appareil photographique de la **figure 1a** dont une schématisation très simplifiée est proposée **figure 1b**.



Figure 1a - Canon EOS R5 ([www.canon.fr](http://www.canon.fr))

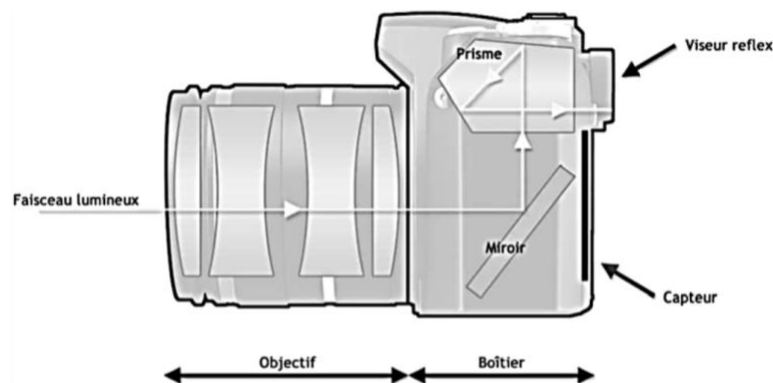
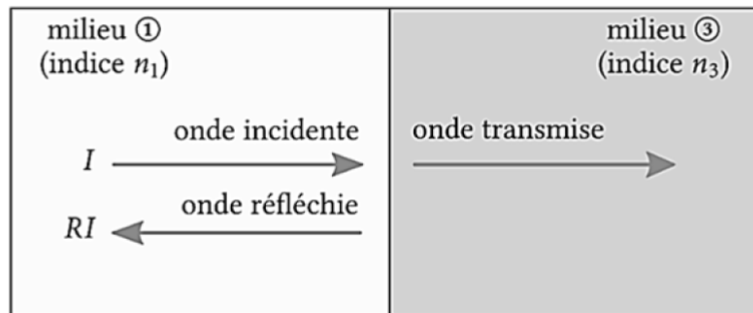


Figure 1b - Schématisation simplifiée

Pour ce faire, on modélise simplement une face d'une lentille par un dioptre plan séparant le milieu ① d'indice  $n_1$  du milieu ③ d'indice  $n_3$ . Une onde lumineuse incidente, d'intensité  $I$ , arrivant sous incidence normale à l'interface entre les deux milieux est partiellement réfléchiée et partiellement transmise (**figure 2**).



**Figure 2** - Modélisation d'une face de lentille

On note respectivement  $r_{13}$  et  $t_{13}$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de l'onde lumineuse. Le coefficient de réflexion énergétique, s'appliquant à l'intensité lumineuse, est noté  $R$ . Sous incidence normale, on admet que ces coefficients valent :

$$r_{13} = \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} ; \quad t_{13} = \frac{2n_1}{n_1 + n_3} ; \quad R = \left( \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} \right)^2 .$$

**Q1.** Dans le cas d'une réflexion air/verre, donner, d'après vos connaissances, un ordre de grandeur de la valeur des indices  $n_1$  et  $n_3$ , puis calculer le coefficient  $r_{13}$ . En déduire quel pourcentage de l'intensité lumineuse incidente est réfléchi. Que devient ce pourcentage dans le cas de la réflexion verre/air ?

**Q2.** On suppose que les faces des lentilles de l'appareil photographique de la **figure 1b** sont assimilables à des dioptres plans dont le coefficient de réflexion énergétique vaut  $R = 0,05$ .

Sachant que le miroir bascule horizontalement lorsque l'on prend une photographie, déterminer le pourcentage du flux lumineux incident qui atteint effectivement le capteur. On pourra utiliser le coefficient de transmission énergétique  $T = 1 - R$  et on mettra le résultat sous la forme  $T^n$ , avec  $n$  un entier dont on précisera la valeur.

Conclure quant à l'intérêt général du traitement antireflet.

## Partie II - Paramètres d'une couche antireflet

Afin d'augmenter la transmission en réduisant la réflexion, on dépose sur le verre une couche d'un matériau transparent (le milieu ②), d'indice  $n_2$  et d'épaisseur  $e_2$  bien choisis. Le but est d'obtenir des interférences destructives entre les multiples ondes réfléchies, produites grâce à la couche supplémentaire.

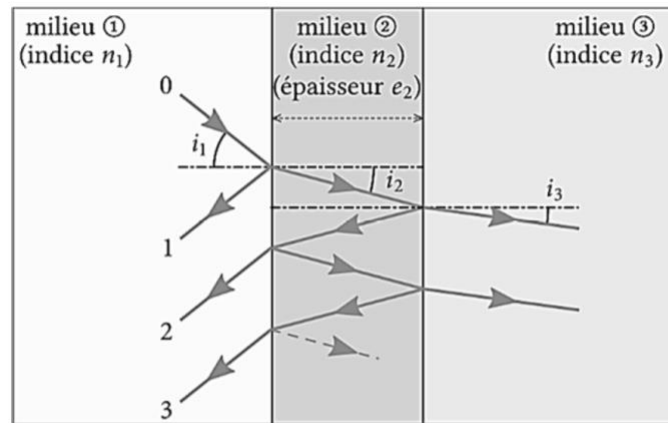


Figure 3 - Principe d'une couche antireflet

Le trajet du rayon lumineux numéro 0 est représenté sur la **figure 3** où l'on note  $i_1$ ,  $i_2$  ou  $i_3$  les angles avec la normale au dioptre en fonction du milieu traversé. Ce rayon engendre une infinité de rayons réfléchis dont seuls les 3 premiers ont été représentés, sous incidence non nulle pour être identifiables. Toutefois, l'étude est menée sous incidence normale, si bien que les angles  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  sont nuls.

On suppose que les indices satisfont la relation  $n_1 < n_2 < n_3$  et on note  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide de l'onde incidente d'intensité  $I_0$ . On note  $I_1, I_2, \dots$  les intensités des ondes lumineuses réfléchies successives.

### II.1 - Épaisseur de la couche antireflet

Q3. Exprimer la différence de marche  $d$  entre deux rayons réfléchis consécutifs, par exemple les rayons numérotés 1 et 2.

Q4. Exprimer la différence de phase associée à la différence de marche précédente. En déduire les valeurs de l'épaisseur  $e_2$  permettant d'obtenir des interférences destructives.

### II.2 - Indice de la couche antireflet

On note ensuite  $r_{12}$  et  $r_{23}$  les coefficients de réflexion en amplitude de l'onde lumineuse exprimés au niveau des interfaces entre les milieux ① et ② et entre les milieux ② et ③.

Q5. Exprimer  $r_{12}$  et  $r_{23}$  en fonction des différents indices. Donner la signification du coefficient  $r_{21}$  et son expression par rapport à  $r_{12}$ .

En tenant compte de l'ensemble des ondes lumineuses réfléchies on obtient, dans le cas d'interférences destructives, l'expression admise de l'intensité lumineuse réfléchie suivante :

$$I = I_0 \frac{(r_{12} - r_{23})^2}{1 - 2r_{12}r_{23} + r_{12}^2 r_{23}^2}$$

Q6. Lorsque  $n_2 = n_3$ , quel résultat de la partie I retrouve-t-on ?

Q7. Déduire de l'expression de l'intensité qu'il y a interférences destructives lorsque l'indice  $n_2$  de la couche antireflet satisfait l'équation :

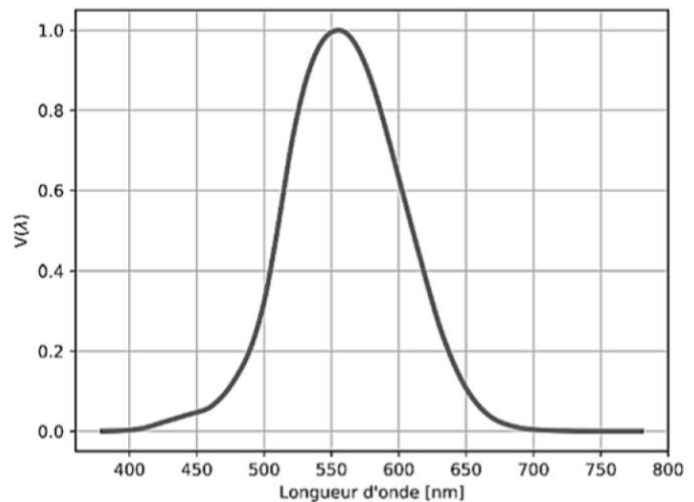
$$n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$$

### Partie III - Exploitation

On souhaite fabriquer une couche antireflet pour des lentilles pouvant être utilisées dans des verres de lunettes ou des objectifs photographiques.

#### Document 1 - Efficacité lumineuse spectrale relative de l'œil humain

La sensibilité de l'œil humain dépend de la longueur d'onde. Des études statistiques menées par la Commission Internationale de l'Éclairage (CIE) ont permis de déterminer l'efficacité lumineuse spectrale relative notée  $V(\lambda)$  de l'œil humain moyen, tracée sur la **figure 4**. L'œil est d'autant plus sensible que la valeur de  $V(\lambda)$  est élevée.



**Figure 4** - Efficacité lumineuse spectrale relative (source CIE)

**Q8.** À l'aide du **document 1**, expliquer pour quelle longueur d'onde les couches antireflets sont réalisées et donner sa valeur.

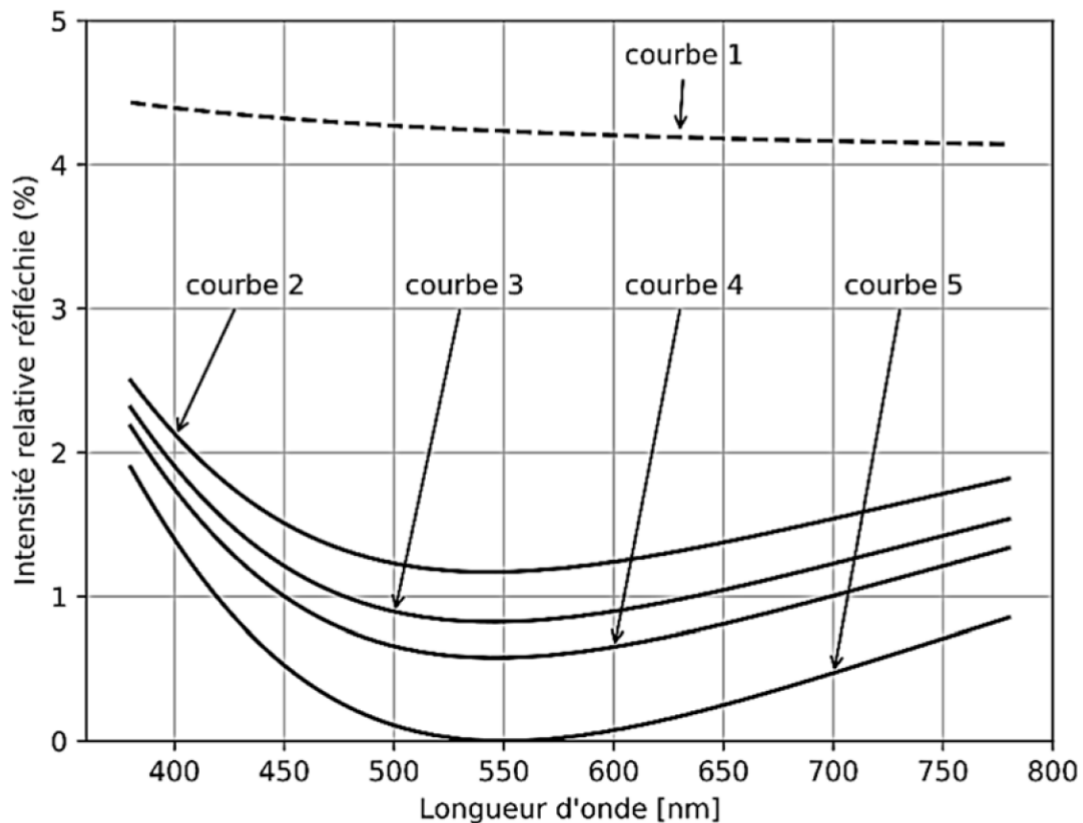
On suppose que le milieu ① est l'air et que le milieu ③ est du verre de type BK7 dont les caractéristiques techniques se trouvent dans le **document 2**.

#### Document 2 - Caractéristiques techniques du verre BK7

Indices de réfraction			Transmittance interne $\tau_i$		
	$\lambda$ [nm]		$\lambda$ [nm]	$\tau_i$ (10mm)	$\tau_i$ (25mm)
$n_r$	706.5	1.51289	700	0.998	0.996
$n_C$	656.3	1.51432	660	0.998	0.994
$n_{C'}$	643.8	1.51472	620	0.998	0.994
$n_{632.8}$	632.8	1.51509	580	0.998	0.995
$n_D$	589.3	1.51673	546	0.998	0.996
$n_d$	587.6	1.51680	500	0.998	0.994
$n_e$	546.1	1.51872	460	0.997	0.993
$n_F$	486.1	1.52238	436	0.997	0.992
$n_{F'}$	480.0	1.52283	420	0.997	0.993
$n_g$	435.8	1.52668	405	0.997	0.993
$n_h$	404.7	1.53024	400	0.997	0.992

**Q9.** Compte tenu du résultat de la question précédente, déterminer l'indice de référence  $n_3$  à partir du **document 2**. Calculer alors, avec 3 chiffres significatifs, l'indice  $n_2$  et l'épaisseur minimale  $e_{2,m}$  du dépôt à réaliser sur un verre de type BK7 pour obtenir un traitement antireflet. Que penser des valeurs obtenues ?

Afin de vérifier l'efficacité du dépôt réalisé, on enregistre l'intensité réfléchie en fonction de la longueur d'onde avant et après le traitement, ce qui donne les cinq courbes de la **figure 5**.



**Figure 5** - Intensité relative réfléchie

L'une de ces courbes a été obtenue sans traitement, trois autres correspondent à des dépôts d'un matériau réel (matériaux appelés  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ ) et la dernière provient d'une simulation informatique (matériau X). Les indices correspondants sont rassemblés dans le **tableau 1**.

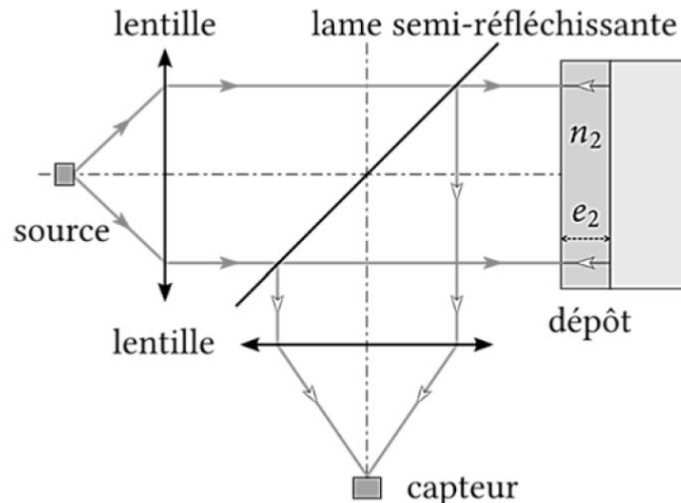
Matériau	X	$M_1$	$M_2$	$M_3$
Indice	1,23	1,33	1,35	1,38

**Tableau 1**

- Q10.** Expliquer simplement pourquoi l'intensité réfléchie dépend de la longueur d'onde.
- Q11.** En justifiant la démarche, associer chaque courbe à un matériau ou à l'absence de matériau.
- Q12.** Malgré le traitement, des reflets colorés persistent. Justifier leur existence et préciser la couleur de ces reflets.

## Partie IV - Contrôle de l'épaisseur du dépôt

Afin de contrôler l'épaisseur  $e_2$  du dépôt d'indice  $n_2$ , on place la lame traitée dans le dispositif de la **figure 6**. Dans ce montage, une source supposée ponctuelle et monochromatique (de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ ), placée au foyer objet d'une lentille convergente, produit un faisceau de lumière traversant une lame semi-réfléchissante idéale. Le faisceau, réfléchi par le dépôt, est redirigé par la lame semi-réfléchissante vers un capteur placé au foyer image d'une lentille convergente (seuls les trajets des rayons lumineux utiles sont représentés sur la **figure 6**).



**Figure 6** - Dispositif de contrôle du dépôt

Rayon	0	1	2	3
Intensité en %	100	2,00	1,70	$6,10 \cdot 10^{-4}$

**Tableau 2** - Intensité des différents rayons lumineux réfléchis par le dépôt

**Q13.** Justifier, à l'aide des données du **tableau 2** relatives à la **figure 3**, qu'un modèle d'interférences à deux ondes suffit, en première approche, pour étudier l'intensité réfléchie.

Donner l'expression de l'intensité  $I(e_2)$  mesurée par le capteur, en notant  $I_0$  l'intensité mesurée par le capteur en occultant l'un des deux miroirs.

**Q14.** Déterminer, en fonction de l'incertitude relative  $\frac{\Delta I}{I_0}$  et des données du problème, l'expression de l'incertitude  $\Delta e_2$  sur l'épaisseur  $e_2$  de la couche formée.

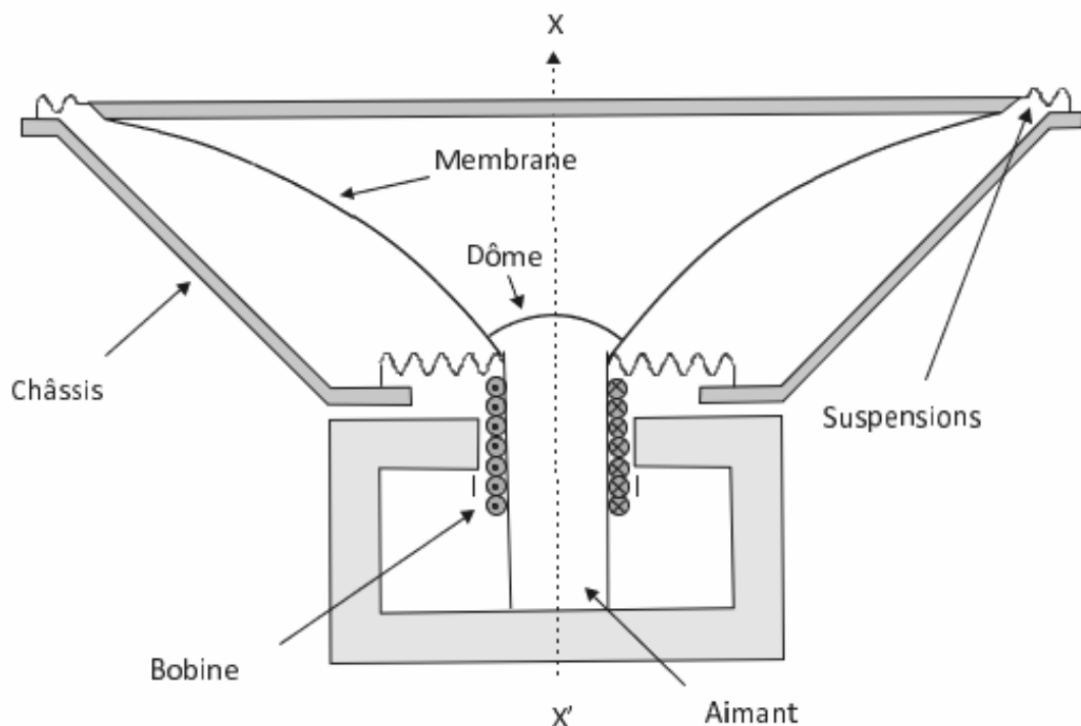
**Q15.** En déduire, pour le matériau  $M_1$ , l'incertitude  $\Delta e_2$  sur la mesure de l'épaisseur d'un dépôt de dimension voisine de 100 nm pour un capteur de sensibilité relative  $\frac{\Delta I}{I_0} = 2,00 \%$ .

Conclure quant à la pertinence de ce dispositif.

## II. Etude d'un haut-parleur (E3A PSI 2021) :

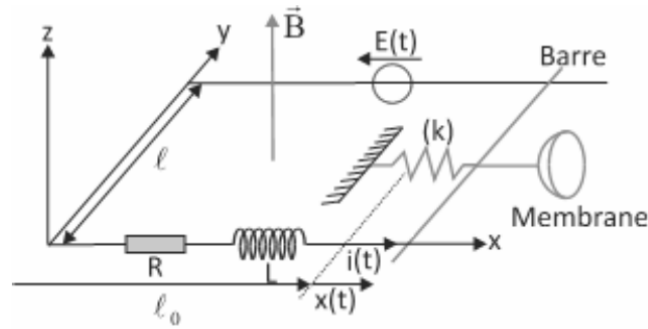
### A - Étude générale

On représente ci-dessous un haut-parleur électrodynamique (**figure 1**). Celui-ci est constitué d'une bobine d'axe ( $X'X$ ), de résistance  $R$ , d'inductance propre  $L$ , solidaire d'une membrane pouvant se déplacer parallèlement à elle-même suivant la direction ( $X'X$ ) normale à son plan. Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre d'un écart algébrique  $x(t)$ , elle est rappelée vers cette position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur  $k$ . De plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement fluide, proportionnelle à sa vitesse de déplacement, qui s'écrit  $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$ . On ne tiendra pas compte du poids de l'équipage mobile bobine-membrane.



**Figure 1** - Schéma du haut-parleur de l'étude

La bobine est placée dans un champ magnétique radial  $\vec{B}$ , uniforme en norme, normal à ( $X'X$ ), créé par un aimant permanent. On se place dans un modèle simplifié de haut-parleur basé sur la configuration des rails de Laplace, représentée sur la **figure 2**. Le générateur de force électromotrice (f.é.m.)  $E(t)$  délivre un signal électrique que l'on veut transformer en signal sonore. La membrane et l'air sont mis en mouvement par l'intermédiaire de la barre de largeur  $\ell$  qui se déplace de  $x(t)$ . Cette grandeur  $x(t)$  représente l'élongation du ressort par rapport à la position d'équilibre, elle-même caractérisée par la longueur  $\ell_0$ . La membrane du haut-parleur est solidaire de la barre. On note  $m_T$  la masse du système {barre, haut-parleur}. On suppose donc que la verticale est définie par l'axe  $z$ , l'axe  $x$  étant horizontal. On note  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  la base des vecteurs unitaires de la **figure 2**.



**Figure 2** - Configuration des rails de Laplace de l'étude

**Q1.** Montrer que la f.é.m. induite  $e$  dans le cadre vaut  $e = -B\ell v(t)$  où  $v(t)$  est la vitesse, dérivée de  $x(t)$ .

**Q2.** Dédurre de la question précédente l'équation électrique (E.E.) traduisant le comportement du circuit. Faire le schéma électrique équivalent en tenant compte de la f.é.m. induite. On notera  $i(t)$  le courant induit dans ce circuit.

**Q3.** Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'ensemble {barre + haut-parleur} de masse  $m_T$ . En déduire l'équation différentielle mécanique relative au mouvement de la barre (équation E.M.).

**Q4.** Faire un bilan de puissances en combinant les équations E.E. et E.M. Le commenter.

**Q5.** Comparer la puissance de la f.é.m.  $P_{fem} = ei$  à la puissance de la force de Laplace  $P_L$ .

**Q6.** Le générateur délivre une tension sinusoïdale  $E(t)$  de pulsation  $\omega$ . On utilisera les notations complexes, pour lesquelles  $\underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$ ,  $E(t)$  s'identifiant alors avec la partie réelle de  $\underline{E}(t)$ . Montrer que l'on a  $\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m)\underline{i} = \underline{Z}\underline{i}$  où  $\underline{i}$  est le courant complexe traversant le circuit et  $\underline{Z}_m$  est une grandeur, appelée impédance motionnelle, dont on donnera l'expression en fonction de  $B, \ell, \alpha, m_T, \omega$  et  $k$ .

**Q7.** Montrer que l'admittance motionnelle  $\underline{Y}_m = 1/\underline{Z}_m$  peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega} .$$

Donner l'expression des termes  $R_m, C_m$  et  $L_m$  en fonction de  $B, \ell, \alpha, m_T$  et  $k$ .

**Q8.** Dédurre de ce qui précède le schéma électrique équivalent du haut-parleur.

Le rendement  $\eta$  du haut-parleur est défini comme le rapport de la puissance moyenne émise par l'onde sonore sur la puissance moyenne fournie par la source de tension.

**Q9.** Montrer que la relation établie à la **question Q4.** devient, en raisonnant sur les moyennes temporelles, en régime périodique établi :

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle .$$

Commenter ce résultat.



**Q10.** En identifiant la puissance émise par l'onde sonore  $\langle P_{son} \rangle$  à  $\langle \alpha v^2 \rangle$ , où  $v$  est la vitesse de la membrane, montrer que  $\eta$  est de la forme :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} \left[ 1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]} .$$

On donnera les expressions de  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction de  $\alpha$ ,  $m_T$  et  $k$ .

**Q11.** Commenter la forme obtenue. On pourra par exemple effectuer l'étude asymptotique du comportement en basses et hautes pulsations, ainsi que pour une pulsation proche de  $\omega_0$ .

### C - Filtres répartiteurs

Comme il est très difficile, pour ne pas dire impossible, de réaliser des haut-parleurs couvrant entièrement le spectre acoustique audible, on réalise des haut-parleurs spécialisés dans une zone déterminée de fréquences. On aboutit ainsi à réaliser des enceintes à deux voies (basses – aiguës) ou à trois voies (basse – médium – aiguës). Les filtres électriques chargés d'aiguiller les fréquences correspondant à ces haut-parleurs doivent répondre à trois critères essentiels :

- **1<sup>er</sup> critère** : atténuer suffisamment les fréquences hors bande ;
- **2<sup>e</sup> critère** : présenter une impédance de charge aussi constante que possible à l'amplificateur, de façon à ce que la puissance absorbée par l'ensemble soit constante et indépendante de la fréquence ;
- **3<sup>e</sup> critère** : le rayonnement global doit être à intensité acoustique constante.

Pour satisfaire aux conditions ci-dessus, il est nécessaire de faire appel aux filtres de Butterworth, qui sont des filtres d'ordre  $n$  dont le module de la fonction de transfert vérifie une condition particulière :

- pour un passe-bas :  $H_b(x) = |H_b(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}$

$$\text{avec } \underline{H}_b(jx) = \frac{1}{1+a_1(jx)+a_2(jx)^2+\dots+a_n(jx)^n} ;$$

- pour un passe-haut :  $H_h(x) = |H_h(jx)| = \sqrt{\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}}$

$$\text{avec } \underline{H}_h(jx) = \frac{(jx)^n}{1+a_1(jx)+a_2(jx)^2+\dots+a_n(jx)^n} .$$

Dans les deux cas, on a pris  $x = \omega/\omega_0$ . On a alors  $H_b^2 + H_h^2 = 1$  : la puissance délivrée par l'amplificateur est constante. En conséquence, seuls les filtres passe-bas et passe-haut répondant à ces formules satisfont à la condition de puissance constante.

**Q18.** On se place dans le cas où  $n = 3$  pour un passe-bas. Calculer les valeurs qu'il faut donner aux différents coefficients **strictement positifs**  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ . On trouvera trois entiers.

Les filtres du troisième ordre ont la structure suivante pour un ensemble à deux haut-parleurs :

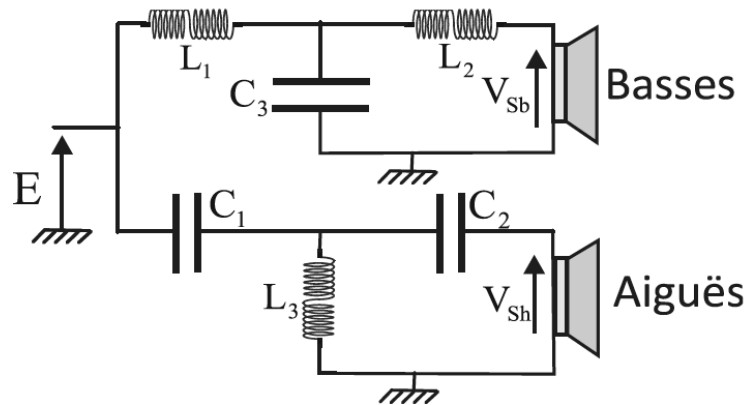


Figure 5 - Structure à deux haut-parleurs

La fonction de transfert du filtre représenté à la figure 6 est :

$$H_b(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_1 + L_2}{R} + (j\omega)^2 L_1 C_3 + (j\omega)^3 \frac{L_1 L_2 C_3}{R}} = \frac{V_{Sb}}{E} .$$

Q19. Vérifier que cette fonction de transfert est compatible avec le schéma aux basses et hautes fréquences. De quel type de filtre s'agit-il ?

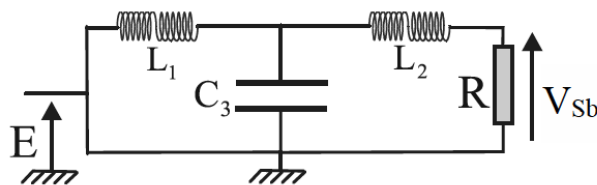


Figure 6 - Partie voie des basses

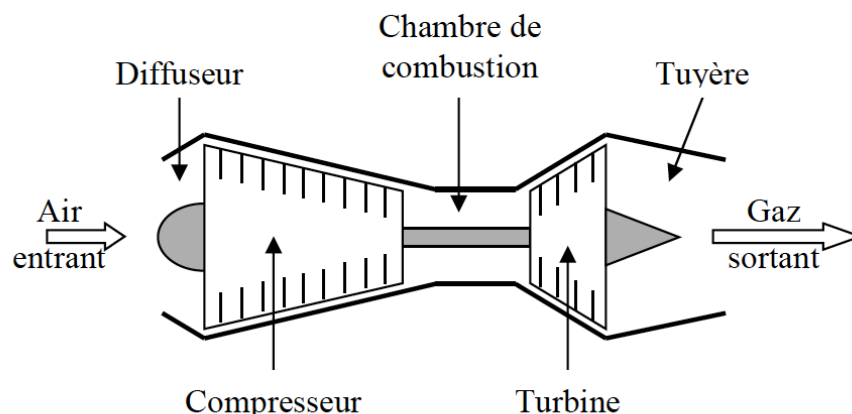
Q20. Déduire de la question précédente les coefficients  $L_1$ ,  $L_2$  et  $C_3$  en fonction de  $R$  et de  $\omega_0$  sachant qu'il s'agit d'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre trois.

### III. Propulsion d'un avion ( CCP PC 2020 ) :

Pour leur propulsion, les avions sont équipés majoritairement de réacteurs. Cette dénomination usuelle désigne en fait des turboréacteurs qui appartiennent à la catégorie des turbomachines encore appelées générateurs ou turbines à gaz. Les turbomachines présentent plusieurs avantages par rapport aux moteurs à pistons, avec notamment un rapport puissance-poids environ trois fois supérieur. En effet, le nombre de pièces mobiles est réduit et leur mouvement est très simple, ce qui permet de les alléger. Ces machines sont inégalables lorsque de grandes puissances sont requises avec des contraintes d'espace ou de poids. Leur inconvénient majeur est que leur efficacité et leur réactivité chutent très rapidement à faible puissance : ils ne sont donc pas adaptés au domaine automobile par exemple.

Les constituants principaux d'un turboréacteur sont un compresseur, une chambre de combustion et une turbine. Dans cette **partie** on étudie un turboréacteur dit simple flux (**figure 12**) pour lequel le gaz entrant dans le réacteur passe dans un diffuseur pour en diminuer la vitesse avant d'être comprimé par le compresseur. Le gaz comprimé arrive dans une chambre de combustion où il est chauffé avant d'être détendu partiellement dans la turbine qui fournit la puissance nécessaire au compresseur. En sortie de turbine, le gaz reste à une pression relativement élevée par rapport à la pression extérieure et il est détendu dans une tuyère, ce qui permet de l'accélérer : c'est cette accélération qui permet la propulsion de l'avion.

Le turboréacteur simple flux est principalement utilisé dans l'aviation militaire.



**Figure 12** - Schéma de principe d'un turboréacteur simple flux

#### III.1 - Force de propulsion

Le turboréacteur constitue un système ouvert ( $\Sigma$ ). En régime stationnaire, ce volume de contrôle contient à l'instant  $t$  une masse d'air  $M(t)$  à laquelle on associe une quantité de mouvement  $\overline{p}(t)$ . Pour établir le bilan de quantité de mouvement, on doit définir un système fermé ( $\Sigma^*$ ) qui, à l'instant  $t$ , est constitué de  $M(t)$  et d'une masse entrante dans la tuyère  $\delta m_e$  à la vitesse  $\overline{v}_e$  et, à l'instant  $t + dt$  est constitué de  $M(t + dt)$  et d'une masse sortante de la tuyère  $\delta m_s$  à la vitesse  $\overline{v}_s$ . La pression  $P_0$  autour du turboréacteur est uniforme. La surface d'entrée du turboréacteur est notée  $S_e$  et celle de sortie  $S_s$ .

- Q25.** Donner l'expression du vecteur quantité de mouvement du système fermé  $\overline{p^*(t)}$  à l'instant  $t$ .
- Q26.** Donner l'expression du vecteur quantité de mouvement du système fermé  $\overline{p^*(t+dt)}$  à l'instant  $t+dt$ .
- Q27.** Des deux questions précédentes déduire, en régime stationnaire, l'expression de la dérivée du vecteur quantité de mouvement du système fermé  $\frac{d\overline{p^*(t)}}{dt}$  à l'instant  $t$ . On introduira  $D_m$  le débit massique d'air dans le réacteur.
- Q28.** Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le système.
- Q29.** Indiquer quelle(s) approximation(s) est/sont nécessaire(s) pour conclure que la force appliquée par le réacteur à l'air a pour expression :  $\overline{F_{\text{avion} \rightarrow \text{air}}} = D_m \cdot (\overline{v_s} - \overline{v_e})$ .
- Q30.** En considérant un réacteur positionné horizontalement avec son entrée à gauche comme indiqué sur la **figure 12**, représenter qualitativement le vecteur de la force exercée par l'air sur l'avion  $\overline{F_{\text{air} \rightarrow \text{avion}}}$  ainsi que les vecteurs  $\overline{v_e}$  et  $\overline{v_s}$  dans le référentiel du réacteur. Comparer les normes  $v_e$  et  $v_s$  des vecteurs vitesses pour que la force exercée par l'air sur l'avion soit propulsive.

### III.2 - Cycle thermodynamique de Brayton

Le turboréacteur fonctionne selon le cycle théorique ouvert de Brayton. Les conditions d'étude de ce cycle sont les suivantes :

- l'air est considéré comme un gaz parfait. Sa capacité thermique massique à pression constante  $c_p$  est supposée constante, comme le rapport  $\gamma$  entre les capacités thermiques isobare et isochore. On prendra  $\gamma = 1,35$  et  $c_p = 1,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- les variations d'énergie potentielle sont négligeables,
- l'énergie cinétique est supposée négligeable entre l'entrée du compresseur et la sortie de la turbine.

En entrée du diffuseur, l'air est à l'état (1) :  $(P_1, T_1)$ . On considère que le diffuseur est idéal, ce qui revient à dire que l'énergie cinétique du gaz après traversée du diffuseur est négligeable devant les autres termes énergétiques et que la traversée du diffuseur est adiabatique et réversible. En entrée du compresseur, l'air se trouve à l'état (2) :  $(P_2, T_2)$  et est amené à l'état (3) :  $(P_3 = 10P_2, T_3)$  par une compression adiabatique réversible.

Dans la chambre de combustion, l'air, mélangé au carburant, subit un échauffement isobare réversible jusqu'à l'état (4) :  $(P_4, T_4 = 1400 \text{ K})$ . Bien que les compositions du gaz à l'entrée et à la sortie de la chambre de combustion soient différentes, pour simplifier la modélisation, on suppose que celle-ci sert uniquement à réchauffer l'air et que les propriétés de l'air ne sont pas modifiées par ce changement de composition.

L'air parvient alors dans la turbine où il subit une détente adiabatique réversible jusqu'à l'état (5) :  $(P_5, T_5)$ . Enfin, il se détend de façon adiabatique et réversible dans la tuyère et arrive dans l'état (6) :  $(P_6, T_6)$ .

On considère un avion qui vole avec une vitesse de croisière  $V_a = 260 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  par rapport à l'air considéré au repos. À cette altitude, l'air est à la pression de 34,5 kPa et à la température de  $-40 \text{ }^\circ\text{C}$ .

L'air entre dans le compresseur avec un débit massique  $D_m = 45 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ .

On rappelle que l'expression du premier principe pour une masse  $m = 1 \text{ kg}$  de fluide en écoulement au travers d'une machine est :

$$\Delta h + \frac{\Delta v^2}{2} + g \cdot \Delta z = w_u + q_e$$

où  $\Delta h$  représente la différence  $h_s - h_e$  entre les enthalpies massiques (en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ ) du fluide à la sortie  $h_s$  et à l'entrée  $h_e$  de la machine,

$$\Delta v^2 = v_s^2 - v_e^2$$

avec  $v_s$  et  $v_e$  les vitesses du fluide à la sortie et à l'entrée de la machine,

$$\Delta z = z_s - z_e$$

avec  $z_s$  et  $z_e$  les altitudes du fluide à la sortie et à l'entrée de la machine,  $w_u$  le travail massique utile, c'est-à-dire le travail massique (en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ ) échangé entre une masse  $m = 1 \text{ kg}$  de fluide et les parois mobiles de la machine,  $q_e$  le transfert thermique massique entre le kilogramme de fluide et la machine (en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ ).

- Q31.** Donner l'expression de la température  $T_2$  en fonction de  $T_1$ ,  $V_a$  et  $c_p$ . Effectuer l'application numérique.
- Q32.** Donner l'expression de la pression  $P_2$  en fonction de  $P_1$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  et  $\gamma$ . Effectuer l'application numérique.
- Q33.** Établir l'expression du travail massique utile  $w_{comp}$  fourni à l'air par le compresseur. En prenant  $T_3 = 480 \text{ K}$ , calculer la puissance  $P_{comp}$  de ce dernier.
- Q34.** Sachant que le travail fourni par la détente du gaz dans la turbine est intégralement reçu par le compresseur, déterminer l'expression de la température  $T_5$  en fonction de  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ . Calculer la valeur de  $T_5$ . En déduire la valeur de la pression  $P_5$ .
- Q35.** Donner l'expression de la vitesse de sortie du gaz  $v_s$  en sortie de tuyère en fonction de  $T_5$ ,  $T_6$  et  $c_p$ . Calculer la valeur de  $v_s$  sachant que  $T_6 = 680 \text{ K}$ .
- Q36.** Déterminer la puissance liée à la force propulsive.
- Q37.** Calculer le rendement  $\eta$  du turboréacteur qui correspond au rapport entre la puissance liée à la force propulsive et la puissance qui sert à chauffer le gaz dans la chambre de combustion  $P_{chamb} = 45,5 \text{ MW}$ . Comparer avec le rendement d'autres machines thermiques.

### III.3 - Étude théorique de la tuyère

La tuyère, dernière partie du turboréacteur, a pour but d'accélérer les gaz et d'assurer ainsi la propulsion de l'avion. Dans cette **sous-partie**, on va détailler le fonctionnement d'une tuyère afin de montrer quelle géométrie est compatible avec l'accélération souhaitée. Cette sous-partie est toutefois indépendante de la précédente.

On considère une tuyère de révolution d'axe horizontal ( $x'x$ ), de section lentement variable, dans laquelle se produit une détente d'air. L'air est assimilé à un gaz parfait, évoluant de façon adiabatique réversible, en écoulement permanent unidirectionnel, de telle sorte que les paramètres physiques : pression  $P$ , température  $T$ , vitesse  $v$  et masse volumique  $\rho$  ne dépendent que de l'abscisse  $x$ .

En  $x = 0$ , à l'entrée de la tuyère de section  $S_e$ , la pression du gaz est notée  $P_e$ , sa température  $T_e$ , sa masse volumique  $\rho_e$  et la vitesse  $v_e$ . La capacité thermique massique à pression constante  $c_p$  et le rapport  $\gamma$  entre les capacités thermiques isobare et isochore sont supposés constants.

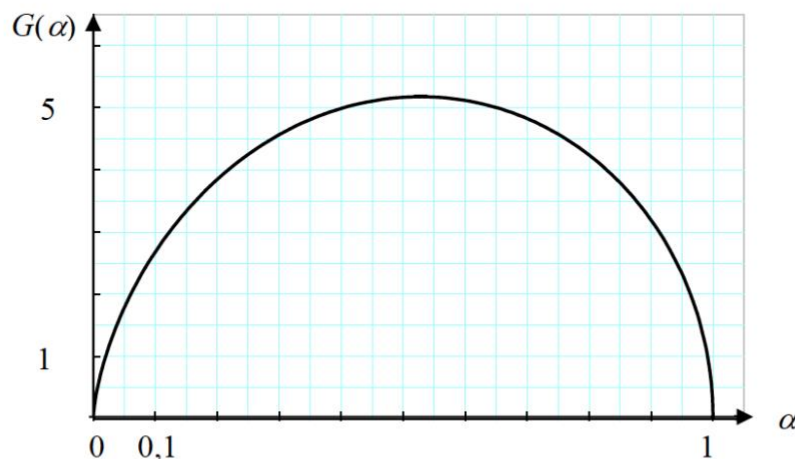
À l'abscisse  $x$ , au niveau de la section  $S(x)$ , la vitesse du gaz  $v(x)$  de pression  $P(x)$ , a pour

$$\text{expression : } v(x) = \sqrt{v_e^2 + 2 \cdot c_p \cdot T_e \cdot \left[ 1 - \left[ \frac{P(x)}{P_e} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}.$$

**Q38.** On pose  $v_m = \sqrt{2 \cdot c_p \cdot T_e}$ . Vérifier que cette quantité est homogène à une vitesse. On évalue  $v_m$  à environ  $1\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**Q39.** Montrer que le débit massique  $D_m$  à l'abscisse  $x$  a pour expression :  $D_m = \rho_e \cdot v_m \cdot S(x) \cdot G(x)$ .  
Donner l'expression de la fonction  $G(x)$  en fonction de  $P_e$ ,  $P(x)$ ,  $v_e$ ,  $v_m$  et  $\gamma$ .

On pose  $\alpha(x) = \frac{P(x)}{P_e}$  et on se propose dans les trois questions suivantes d'étudier et d'exploiter la courbe  $C_G$  associée à la fonction  $G(\alpha)$  pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  représentée en **figure 13**.



**Figure 13** - Courbe  $C_G$  associée à la fonction  $G(\alpha)$  pour  $0 \leq \alpha \leq 1$

**Q40.** Que vaut  $\alpha$  en entrée de la tuyère ? Montrer, à l'aide de la **figure 13** et des relations des questions précédentes que pour que la vitesse augmente la tuyère doit d'abord être convergente.

**Q41.** En considérant que  $v_e = 100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , on peut négliger  $v_e^2$  devant  $v_m^2$ . Dans ces conditions, on admet que de la fonction  $G(\alpha)$  est maximale pour  $\alpha_c = \left[ \frac{2}{1+\gamma} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ . Montrer qu'avec une tuyère uniquement convergente, la vitesse ne peut augmenter que jusqu'à une valeur limite  $v_{lim}$  qu'on exprimera en fonction de  $v_m$  et  $\gamma$ .

**Q42.** On note  $S_{col}$  la section minimale de la tuyère à l'abscisse  $x_{col}$  lorsque la vitesse est  $v_{lim}$ . Donner l'expression du rapport  $\frac{S_{col}}{S_e}$  en fonction de  $v_e$ ,  $v_m$  et  $G(\alpha_c)$ . Donner une valeur numérique approchée de ce rapport à l'aide de la **figure 13**.