BILANS DYNAMIQUES – EXERCICES

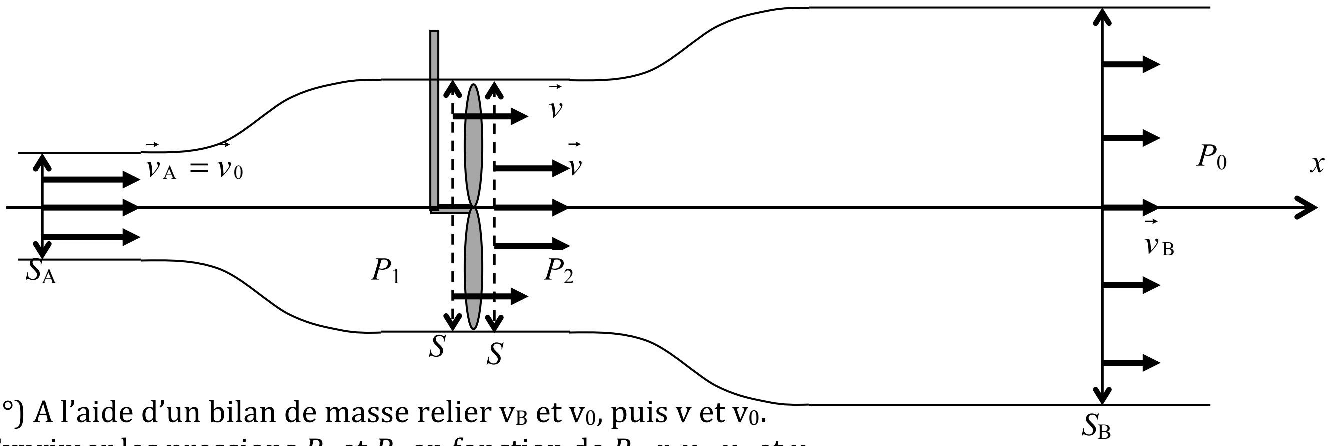
1. Force exercée sur une lance à incendie :

Une lance à incendie est un tuyau conique convergent permettant d'augmenter la vitesse de l'eau.
Dans une lance grande puissance (débit D_v = 1000 $L.min^{-1}$) , le diamètre passe de d_1 = 100 mm à d_2 = 20 mm.
On cherche quelle force est nécessaire au pompier pour tenir la lance.

a) Comment modéliser simplement l'écoulement ?
b) Calculer la vitesse du fluide dans les sections d'entrée et de sortie.
c) Déterminer la pression P_1 à l'entrée de la lance.
d) Déterminer en faisant un bilan de quantité de mouvement sur un système bien choisi la force exercée par l'eau sur la lance en fonction de d_1, d_2 , D_v et P_1.

2. Etude d'une hélice :

Une hélice tourne autour d'un axe Ox. Elle est immergée dans l'air, fluide parfait en écoulement incompressible, de masse volumique r. Loin de l'hélice, le fluide est animé d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, constante et uniforme. Le schéma ci-dessus représente un tube de courant qui englobe l'hélice. A l'extérieur de ce tube de courant, la pression est uniforme, égale à P_0. La vitesse et la pression du fluide sont uniforme sur une section droite du tube. Loin en amont de l'hélice, la section du tube est S_A, la pression de l'air P_0 et sa vitesse $\vec{v}_0$. Loin en aval de l'hélice, la section du tube est S_B, la pression de l'air est P_0 et sa vitesse $\vec{v}_B$. Au voisinage immédiat de l'hélice, la section du tube de courant est S, la vitesse de l'air est $\vec{v}$, la pression de l'air est P_1 à gauche de l'hélice et P_2 à droite. Les tourbillons sont localisés au voisinage immédiat de l'hélice.



1°) A l'aide d'un bilan de masse relier v_B et v_0, puis v et v_0.
Exprimer les pressions P_1 et P_2 en fonction de P_0, r, v_0, v_B et v.

2°) Déterminer la force $\vec{F}$ exercée par l'air sur l'hélice :
a) en effectuant un bilan de quantité de mouvement pour le fluide situé au voisinage immédiat de l'hélice ;
b) en effectuant un bilan de quantité de mouvement pour un volume de fluide de grande dimension, entourant l'hélice.

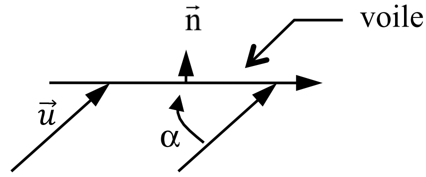
3°) En déduire une relation entre $\vec{v}_0$, $\vec{v}_B$ et $\vec{v}$.

4°) Effectuer un bilan d'énergie cinétique pour le volume de fluide situé au voisinage immédiat de l'hélice. En déduire la puissance P fournie par le fluide à l'hélice. Vérifier que P= $\vec{F}.\vec{v}$.

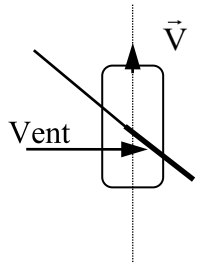
On pose $u = v / v_0$. Tracer les courbes $F(u)$ et $P(u)$. Commenter. Donner l'expression de la puissance maximale de la puissance de l'hélice en fonction de r, S et v_0.

3. Vent sur une voile :

Une voile plane d'aire S et de vecteur unitaire normal $\vec{n}$ reçoit une veine de vent, de masse volumique ρ et de vitesse relative $\vec{u}$, sous l'angle α et la réfléchit selon la loi de Descartes.



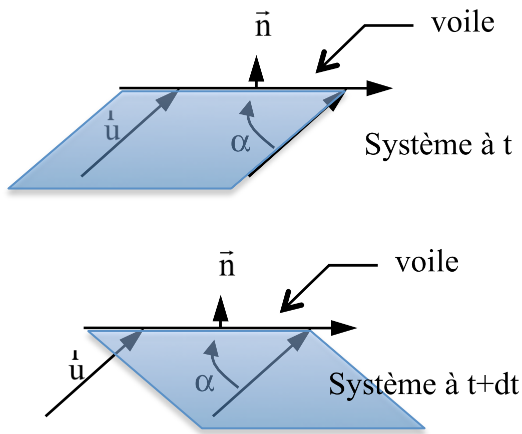
a) Par analyse dimensionnelle, évaluer la force qui s'exerce sur la voile.
b) On considère la veine de vent qui se réfléchit sur la voile pendant dt.
a) Quelle est sa masse dm ?
b) En faisant un bilan adéquat, calculer la force exercée par le vent sur la voile et l'exprimer en fonction du débit massique $D_m = \rho.S.u.\sin\alpha$.
c) Le bateau reçoit le vent par le travers, l'axe du bateau est perpendiculaire au vent relatif.



Quelle est dans ces conditions, en fonction de ρ, S, u et α la composante propulsive de la force précédente ?
c) Pour quelle valeur de α cette composante est-elle maximale ? De quel type de vent s'agit-il ? Calculer numériquement la force propulsive maximale pour $u = 10$ m.s^{-1} et $\rho = 1{,}3$ kg.m^{-3} et $S = 25$ m^2.
Réponses : $\overrightarrow{F_{totale/voile}} = 2\rho S u^2.\sin^2\alpha.\vec{n}$; $\alpha_{max} = 54{,}7°$; $F_{prop} = 2500$ N.

Vent sur une voile : corrigé :

On considère la veine de vent qui se réfléchit sur la voile pendant dt.
On se place dans le référentiel lié à la voile, que l'on suppose galiléen (le bateau avance constante).



Sa masse est : $dm = D_m.dt = \iint_S \rho.\vec{u}.d\vec{S}.dt = \rho.u.\sin\alpha.S.dt$.
Soit $\overrightarrow{u'}$ la vitesse du vent réfléchi par la voile.
La variation de quantité de mouvement est :

$$D\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = dm.\overrightarrow{u'} - dm.\vec{u} = dm(\overrightarrow{u'} - \vec{u})$$
$$= -dm.2u.\sin\alpha.\vec{n} = -2\rho S u^2.\sin^2\alpha.dt.\vec{n}$$

Les forces exercées sur la veine de vent sont :

- les forces de pression dues à l'air autour de cette veine, supposé à pression P_0 uniforme ;
- la force de pression exercée par la voile $\overrightarrow{F_{voile/vent}} = -\overrightarrow{F_{vent/voile}}$.

Si la voile n'était pas présente, la résultante des forces de pression dues à P_0 serait nulle ; on en déduit que cette force est $P_0.S.\vec{n}$.

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = -2\rho S u^2.\sin^2\alpha.\vec{n} = P_0.S.\vec{n} + \overrightarrow{F_{voile/vent}}$$

La voile est soumise :

- A la force exercée par la vien de vent précédente $\overrightarrow{F_{vent/voile}} = -\overrightarrow{F_{voile/vent}}$;
- A la force exerceé par l'air situé de l'autre coté de la voile, supposé à P_0 : $-P_0.S.\vec{n}$

La résultante de ces forces est :

$$\overrightarrow{F_{totale/voile}} = 2\rho S u^2.\sin^2\alpha.\vec{n}$$

La composante propulsive de cette force est la projection sur la direction de $\vec{V}$, vitesse du bateau.
On a donc :

$$F_{prop} = 2\rho S u^2.\sin^2\alpha.\cos\alpha$$

La dérivée de cette force propulsive par rapport à α (ou un tracé) montre que le maximum correspond à :

$$\tan^2\alpha = 2, \text{ soit } \alpha = 54{,}7°$$