DS DE PHYSIQUE N°5
SAMEDI 16 JANVIER 2021 – 4 HEURES

1) Les ondes sonores (E3A PC 2018) :

Après la vue, l'ouïe est le deuxième sens le plus développé chez l'homme, même si de nombreux animaux ont une ouïe beaucoup plus fine que la nôtre. C'est le sens qui nous permet de profiter de la beauté de la musique, de transmettre de nombreuses informations, mais aussi celui qui est agressé par de nombreuses nuisances sonores, au point que cette pollution est reconnue au même titre que celles de l'eau, de l'air, ou la pollution lumineuse.

Nous commencerons cette partie par une mise en équation, puis nous conduirons l'étude d'une onde harmonique, ensuite nous étudierons différents aspects de l'acoustique musicale : spectre d'un instrument, problèmes pouvant survenir pendant des concerts, gestion d'une école de musique, isolation acoustique.

Les sous-parties sont globalement indépendantes, mais il est conseillé de lire les sous-parties précédentes avant d'en entamer une nouvelle.

On négligera la pesanteur dans toute cette partie.

Le référentiel terrestre sera considéré comme galiléen.

L'air sera considéré comme un gaz parfait diatomique non visqueux de rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ *= 1,40 et de masse molaire M = 29,0 g.mol^{-1}.*

On donne la constante des gaz parfaits : R = 8,31 J.mol^{-1}.K^{-1}.

La célérité des ondes sonores sera notée c.

La température en Kelvin T et celle en degrés Celcius θ *sont reliées numériquement par T =* θ *+ 273.*

On donne les courbes d'audibilité et de douleur de l'oreille humaine sur la figure 1. Y sont tracées également des courbes isophoniques, qui relient les points de même sensation d'intensité sonore pour l'oreille humaine.

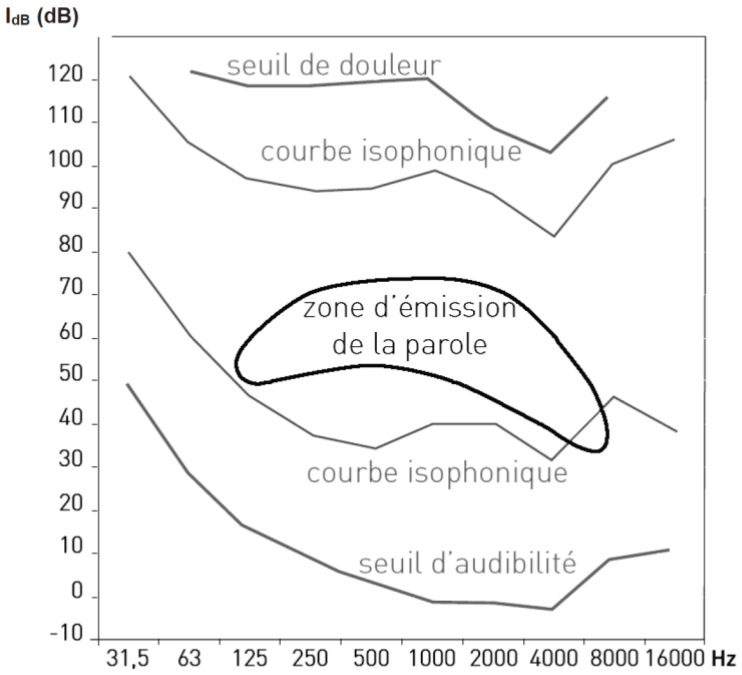


Figure 1 – Courbes de sensibilité de l'oreille humaine
(Intensité sonore en dB en fonction de la fréquence en Hz)

A / Mise en équation

Nous allons travailler dans cette sous-partie avec des ondes unidimensionnelles, c'est-à-dire des champs ne dépendant que de la coordonnée d'espace x et du temps t.

Au repos, l'air peut être décrit par les champs de pression P_0 = 1,00 bar, de masse volumique μ_0 et de vitesse $\vec{v}_0 = \vec{0}$, tous uniformes. L'onde sonore est une perturbation de cet état d'équilibre, où les champs deviennent :
- champ de pression : $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ où p est la surpression ;
- champ de masse volumique : $\mu(x,t) = \mu_0 + \rho(x,t)$;
- champ de vitesse : $\vec{v}(x,t) = \vec{0} + v(x,t)\,\vec{u}_x$.

L'approximation acoustique consiste à considérer que les termes de perturbation p/P_0, ρ/μ_0 et v/c sont des infiniment petits d'ordre 1.

A1. Écrire l'équation d'Euler dans l'air. La linéariser en expliquant convenablement les simplifications faites. L'équation linéarisée sera notée (E).

A2. Écrire l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité). La linéariser. L'équation linéarisée sera notée (M).

A3. Lors du passage d'une onde sonore, les transformations de l'air sont supposées adiabatiques réversibles. On introduit χ_S le coefficient de compressibilité isentropique de l'air. Rappeler l'expression de χ_S en fonction de la pression P et du volume V d'une particule de fluide, puis en fonction de la pression P et de la masse volumique du fluide μ.
Linéariser cette expression dans le cadre de l'approximation acoustique. L'équation linéarisée sera notée (T).

A4. En utilisant les équations (E), (M) et (T), retrouver l'équation de propagation de l'onde sonore à une dimension vérifiée par p $\boxed{\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}}$ Donner l'expression de c.

Expliquer comment on peut passer à l'équation d'une onde sonore tridimensionnelle.

A5. Déterminer l'expression de c pour un gaz parfait et sa valeur numérique pour l'air à θ = 20,0 °C.

B / Étude d'une onde sonore harmonique

B1. On étudie une onde unidimensionnelle dont le champ de surpression complexe s'écrit $\underline{p}(x,t) = p_0\, exp\,[j(\omega t - kx)]$.
Justifier clairement que cette onde est plane, progressive, harmonique, et préciser dans quel sens elle se propage. On donnera la définition de chaque terme et on précisera pour chacun pourquoi on peut l'attribuer à cette onde.

B2. Établir la relation de dispersion pour cette onde. Qu'en déduire ?

B3. On cherche le champ de vitesse complexe sous la forme $\underline{v}(x,t) = \underline{v}_0\, exp\,[j(\omega t - kx)]$, avec $\vec{v} = \underline{v}\,\vec{u}_x$.
Montrer qu'on peut écrire $\underline{p}(x,t) = Z\,\underline{v}(x,t)$. Préciser l'expression de Z et donner son nom.

B4. Déterminer l'expression de Z pour un gaz parfait.
En déduire sa valeur numérique pour l'air à T = 20,0 °C et P_0 = 1,00 bar.

B5. On définit l'intensité sonore par la valeur moyenne $I = \langle p\, v \rangle$.
Vérifier que I a bien la dimension d'une puissance surfacique.

B6. On définit l'intensité sonore en décibels comme $I_{dB} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où I_0 est l'intensité de référence et vaut $I_0 = 1{,}00.10^{-12}$ W.m^{-2}.
Justifier la différence avec le gain en décibels en électricité, défini par $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{u_s}{u_e}\right)$ où u_s et u_e sont respectivement les tensions de sortie et d'entrée du montage.

On admet que pour des grandeurs complexes, on peut calculer I grâce à :
$I = \frac{1}{2} Re\,\langle \underline{p}.\underline{v}^* \rangle$, où $\underline{v}^*$ représente le conjugué de $\underline{v}$.

B7. On veut ici vérifier si l'approximation acoustique est justifiée, même pour un son très intense d'intensité I_M.
Déterminer les expressions de p_0 et de v_0, amplitudes de la pression et de la vitesse, en fonction de I_M notamment.
Donner un ordre de grandeur de l'intensité en décibels d'un son très intense, en déduire l'intensité I_M correspondante puis p_0 et v_0 et conclure.

C / Spectre d'un instrument de musique

Les instruments de musique n'émettent pas des sons harmoniques comme ceux des sous-parties A et B. Nous allons dans cette sous-partie étudier le son d'un instrument à vent.

C1. Quelle est la différence entre le spectre d'un son créé par un instrument de musique (une flûte par exemple) et le spectre d'un bruit ? On rappelle qu'un bruit est un signal où toutes les fréquences sont présentes.
Expliquer pourquoi on peut utiliser les résultats des ondes harmoniques (sous-partie B) pour l'étude des sons des instruments.

C2. La figure 2 ci-dessous donne l'acquisition d'un son émis par un violon (figure 2.a) et son spectre (figure 2.b).

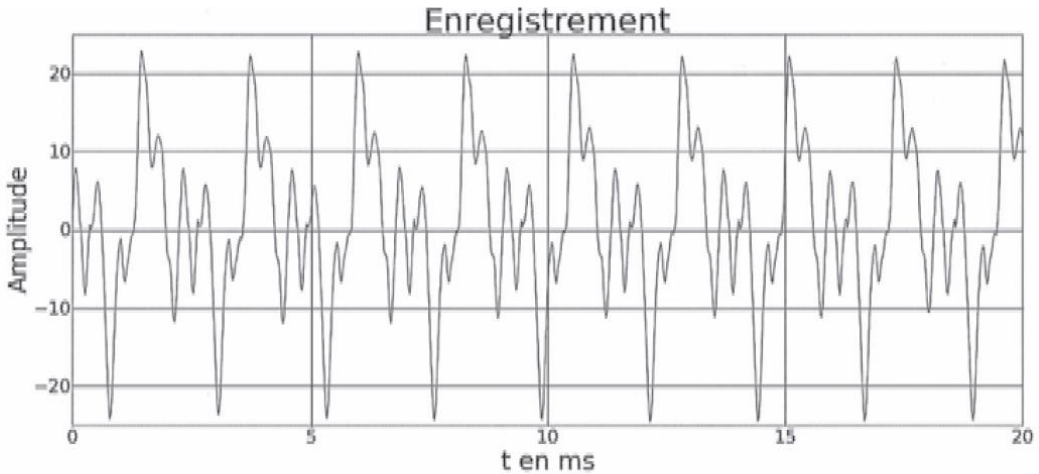


Figure 2.a - Enregistrement d'un son émis par un violon
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

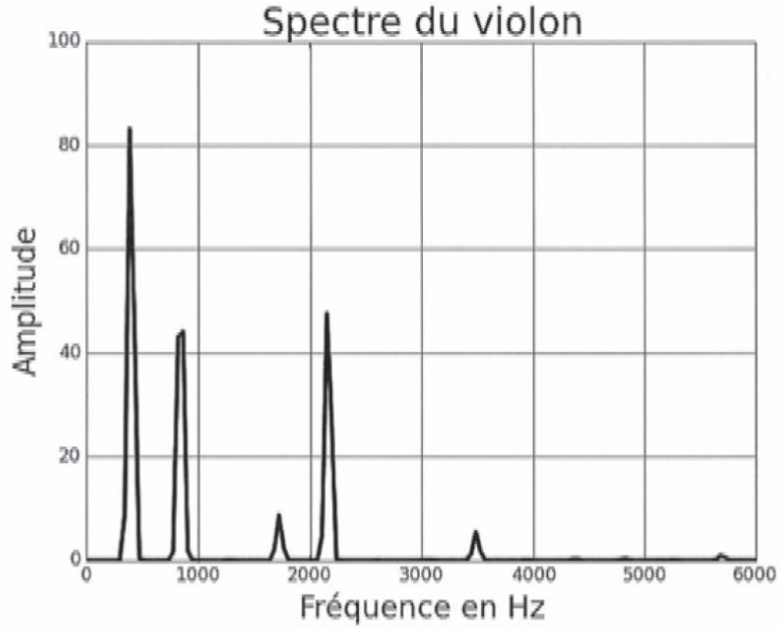


Figure 2.b – Spectre du même son émis par le violon
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

C2a. Mesurer la fréquence de la note et sa période en expliquant votre démarche, notamment en complétant les figures ci-dessus. Les résultats sont-ils compatibles entre les deux figures ?

La figure 3.a ci-dessous donne les acquisitions de deux sons (émis par une flûte (a) et par un harmonium (b)) qui correspondent à la même note. La figure 3.b. donne le spectre de ces deux instruments mais ils ont été mélangés.

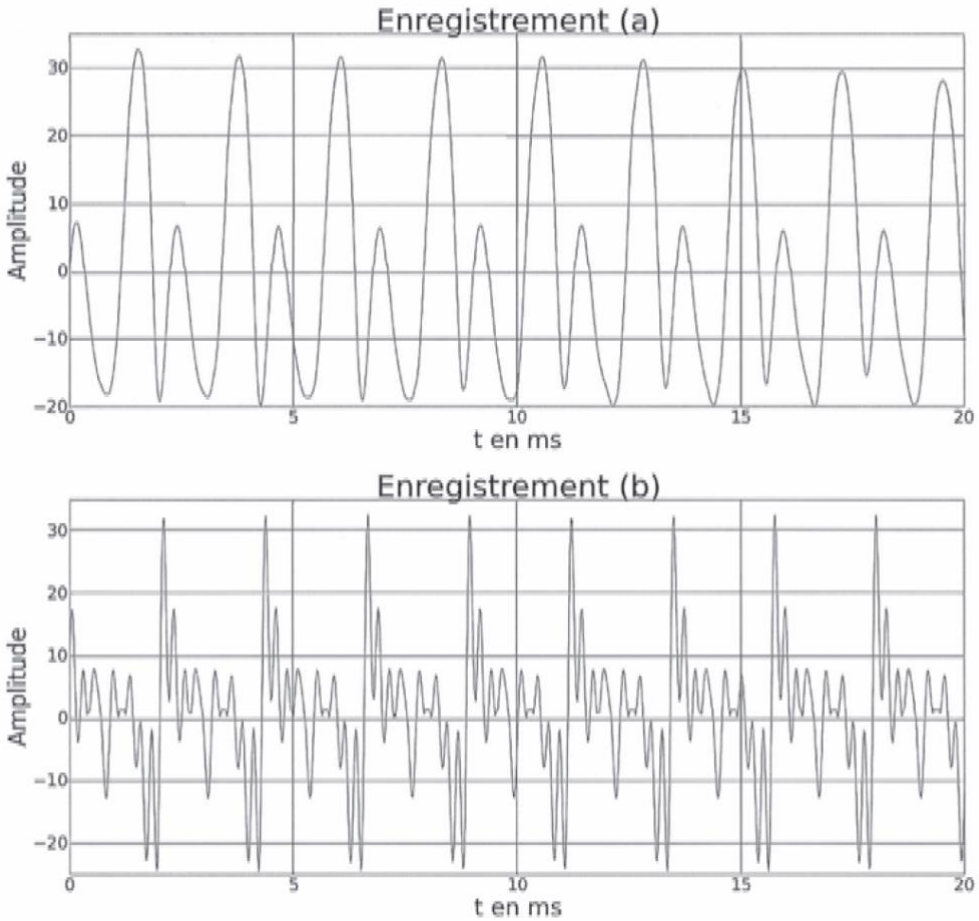


Figure 3.a - Enregistrements de sons émis par une flûte (a) et par un harmonium (b)
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

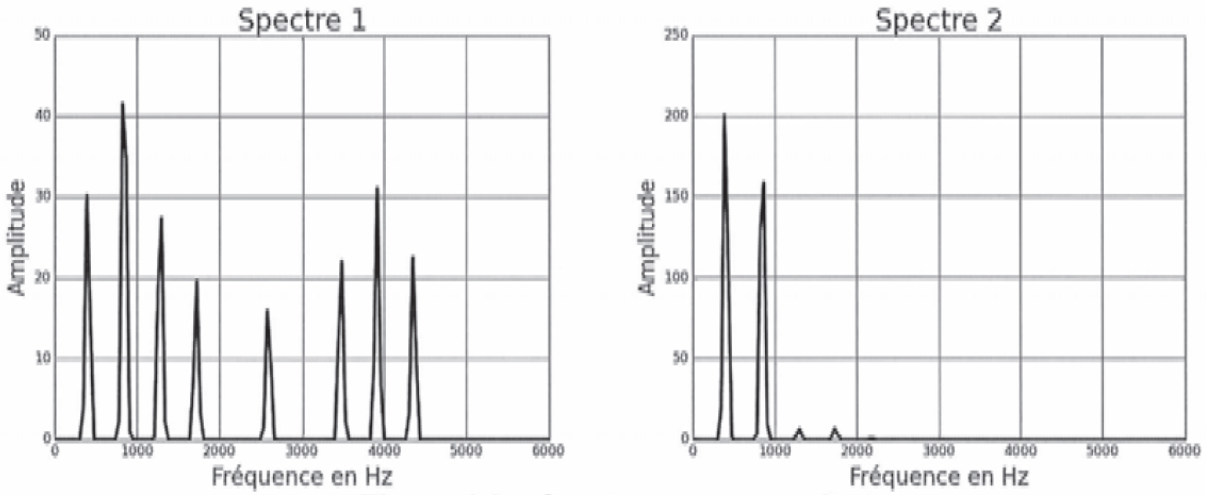


Figure 3.b - Spectres correspondants
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

C2b. Attribuer à chaque spectre (1 et 2) son instrument (flûte (a) ou harmonium (b)) en justifiant ce choix.

C3. Pour calculer le spectre d'un signal sonore, on fait une acquisition numérique du son, puis on réalise la FFT (« Fast Fourier Transform » ou « transformée de Fourier rapide » en français) du signal numérique. Pour que le spectre soit correct, il faut prendre quelques précautions, notamment dans le choix de la fréquence d'échantillonnage.

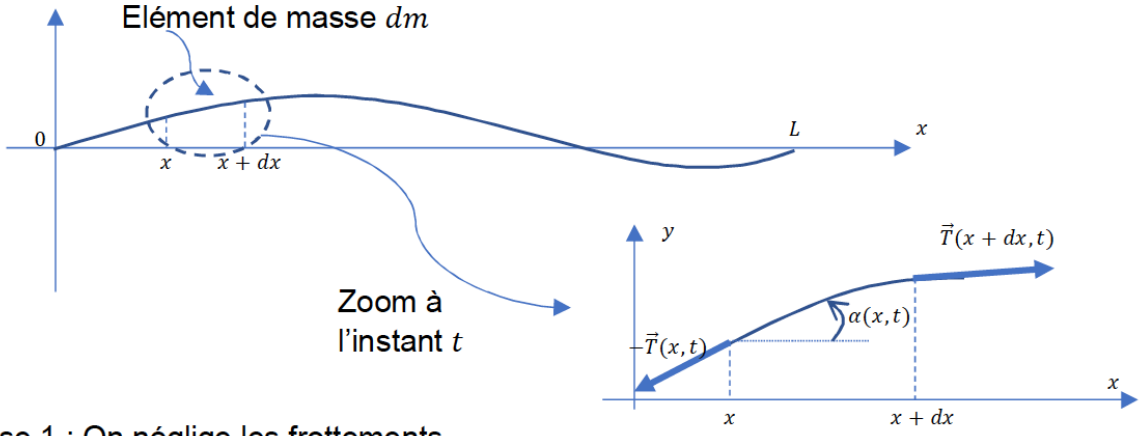
On pourra utiliser avantageusement des schémas pour répondre aux questions suivantes.

C3a. Quel critère doit respecter la fréquence d'échantillonnage f_e ?
Quel est le nom du phénomène qui apparaitrait dans le cas d'un mauvais choix de f_e ?
Proposer une fréquence d'échantillonnage f_e sachant que les fréquences audibles vont de 20 Hz à 20 kHz. Justifier.

C3b. Citer une situation dans laquelle le critère de la question C3a n'est pas vérifié.
Comment procéder expérimentalement pour éviter le phénomène gênant décrit ci-dessus ?

De la corde vibrante au four à micro-ondes (ATS 2018) :

Dans un premier temps, on souhaite étudier le mouvement vertical d'une corde de masse linéique μ uniforme. Pour cette étude, on étudie un élément de masse dm de la corde, de longueur $d\ell$ et on impose les hypothèses suivantes :



- Hypothèse 1 : On néglige les frottements.
- Hypothèse 2 : La corde, supposée infiniment souple, est constamment tendue. Chaque élément de la corde est alors soumis à des forces de tension tangentes en tout point à la corde. On note $\vec{T}(x,t)$ la tension qu'exerce à un instant t la partie de la corde d'abscisse supérieure à x sur la partie de la corde d'abscisse inférieure à x.
- Hypothèse 3 : Le poids de chaque élément de la corde est négligeable par rapport aux tensions s'exerçant de part et d'autre de ce brin de corde.
- Hypothèse 4 : On néglige le déplacement horizontal (dans le référentiel d'étude supposé galiléen). Un point de la corde est repéré à l'équilibre par $(x,0)$ et est repéré hors équilibre par $(x,y(x,t))$.
- Hypothèse 5 : Le déplacement vertical $y(x,t)$ est faible. L'angle $\alpha(x,t)$ est supposé petit de sorte qu'il est légitime d'effectuer un développement limité à l'ordre 1 par rapport à cet angle.

Il est demandé, pour les questions 19 et 20 une rédaction rigoureuse au cours de laquelle le candidat précise l'hypothèse (1, 2, 3, 4 ou 5) qu'il utilise à chaque étape importante de son raisonnement.

19) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie de corde située entre x et $x+dx$, et en le projetant sur l'axe horizontal, montrer que la tension est uniforme le long de la corde.

Pour la suite, on notera T_0 la norme, uniforme et constante, de la tension $\vec{T}$ du fil.

20) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie de corde située entre x et $x+dx$, et en le projetant sur l'axe vertical, montrer que $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$. On donnera l'expression de v en fonction de T_0 et μ.

21) Que représente la grandeur v ?

Pour les questions 22 et 23, les deux extrémités de la corde (situées en $x = 0$ et $x = L$) sont fixes. Afin de résoudre l'équation aux dérivées partielles précédente, on propose une solution particulière $y(x,t)$ à variables séparées de la forme $y(x,t) = Acos(kx - \psi)\cos(\omega t - \varphi)$ où A est une constante avec $v = \frac{\omega}{k}$ et où ω et k sont deux grandeurs réelles et positives appelées respectivement pulsation temporelle et pulsation spatiale de l'onde.

22) Comment qualifier l'onde décrite par l'expression de $y(x,t)$?

23) Montrer que les conditions aux limites imposent une quantification des pulsations ω_n des ondes recherchées avec $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$ où n désigne un entier naturel non nul fixant le rang du mode propre.

Pour les questions 24 et 25, l'extrémité d'abscisse $x = L$ de la corde est fixe et un système excitateur impose à son extrémité d'abscisse $x = 0$ un petit déplacement transversal $y(0,t) = a\,cos(\Omega t)$ (avec a constante fixant l'amplitude verticale et Ω fixant la pulsation d'excitation).

Pour décrire le régime forcé, nous cherchons une vibration $y(x,t)$ de pulsation temporelle Ω et satisfaisant les conditions limites.

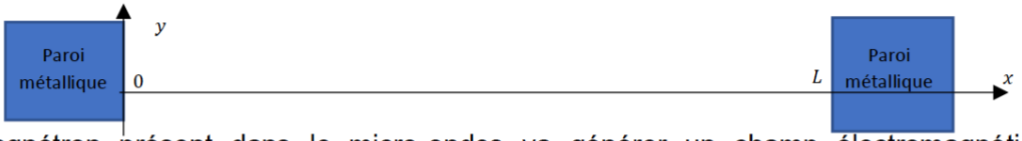
Pour ce régime forcé établi, on montre que la solution s'écrit :

$$y(x,t) = \mathrm{a}\frac{\sin\left(\frac{\Omega}{v}(L-x)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{v}L\right)}\cos(\Omega t)$$

24) Pour quelles pulsations d'excitation Ω obtient-on des ventres d'amplitude maximale (ici d'amplitude infinie par absence de modélisation des frottements) ?

25) On remarquera une similitude entre les pulsations pour lesquelles il y a résonance en régime sinusoïdal forcé et les pulsations des modes propres. Citer un autre système physique pour lequel on rencontre le même phénomène.

On va maintenant aborder un modèle très simplifié qui assimile le micro-ondes à deux plans métalliques parfaitement conducteurs, parallèles et distants de L. Entre ces deux plans, nous supposerons le milieu assimilable au vide de permittivité diélectrique ε_0 et de perméabilité magnétique μ_0.



Le magnétron présent dans le micro-ondes va générer un champ électromagnétique de fréquence $f \approx 2{,}5\ GHz$ (cette fréquence a été choisie pour avoir un bon compromis entre la pénétration du champ dans les aliments et sa dissipation sous forme thermique par interaction avec les molécules d'eau). Pour ce modèle simple, le champ électrique qui s'établit dans la cavité est tel que $\vec{E} = E(x,t)\overrightarrow{u_y}$. On montre que ce champ électrique vérifie :

- l'équation de propagation suivante : $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ où $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.
- les conditions aux limites suivantes : $E(0^-,t) = E(0^+,t) = E(L^-,t) = E(L^+,t) = 0$.

27) En s'inspirant des résultats concernant la corde vibrante, exprimer puis calculer la valeur de L qui permet l'établissement du mode de vibration de rang 5 correspondant à la fréquence 2,5 GHz.

28) Expliquer la présence nécessaire d'un plateau tournant dans un micro-onde si l'on suppose l'établissement du seul mode de vibration de rang 5.

Modele de la poutre élancée (Mines Ponts 2016) :

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.
L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Dans un modèle couramment utilisé, on peut assimiler une passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur b selon $(O,\widehat{u}_z)$ et de hauteur h selon $(O,\widehat{u}_y)$. Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire $y(x)$ très petit devant h ou b, on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde.

On considère une passerelle de section S, de masse volumique ρ, de module d'Young E et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe $(O,\widehat{u}_z)$ est $I = \frac{1}{12}bh^3$. L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\rho S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

❏ **14** — On cherche des solutions sous la forme $y(x,t) = f(x)\,g(t)$. De quel type d'onde s'agit-il ? Sous quelles hypothèses de telles ondes apparaissent-elles dans ce genre de structure ?

❏ **15** — Déterminer les équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$. En déduire que $g(t)$ est une fonction périodique de pulsation ω constante. Combien de constantes d'intégrations sont nécessaires à la détermination complète de la solution $y(x,t)$ correspondant à la situation étudiée ?

❏ **16** — Justifier précisément que l'on puisse écrire

$$f(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\,\mathrm{ch}(\beta x) + D\,\mathrm{sh}(\beta x)$$

où A,B,C et D sont des constantes d'intégration, on précisera l'expression de β en fonction des données du problème.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur L en appui simple à ses extrémités, les conditions aux limites s'écrivent $y|_{x=0,t} = y|_{x=L,t} = 0$ et $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0,t} = \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=L,t} = 0$.

❏ **17** — Déterminer les pulsations propres ω_n de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de L, E, I, ρ, S et d'un entier n caractérisant le mode.

❏ **18** — Différents modes de vibrations d'une passerelle ont été représentés sur la figure 6, quels sont ceux correspondants à l'étude proposée dans cette section ? Identifier de façon argumentée pour chacun de ces modes, l'entier n le caractérisant.

La passerelle du Millennium Bridge est globalement une poutre en aluminium de 322 m de longueur, d'épaisseur $h = 1{,}07\,\text{m}$ (42 pouces) et de largeur $b = 4\,\text{m}$ (158 pouces). Elle repose sur 4 appuis en créant 3 travées solidaires de $L_1 = 70\,\text{m}$, $L_2 = 144\,\text{m}$ et $L_3 = 108\,\text{m}$. On donne la masse volumique de l'aluminium $\rho = 2700\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et son module d'Young $E = 69 \times 10^9\,\text{SI}$.

❏ **19** — Dans le cadre du modèle de la poutre sur appui simple, existe-t-il des modes de vibration transversale du Millennium Bridge susceptibles d'entrer en résonance avec un forçage par des piétons ? Discuter également de la possibilité d'une excitation résonante de certains modes de vibration latérale, c'est-à-dire dans le sens de la largeur b. On motivera ses réponses par une argumentation précise. On estimera la fréquence de la marche des piétons.

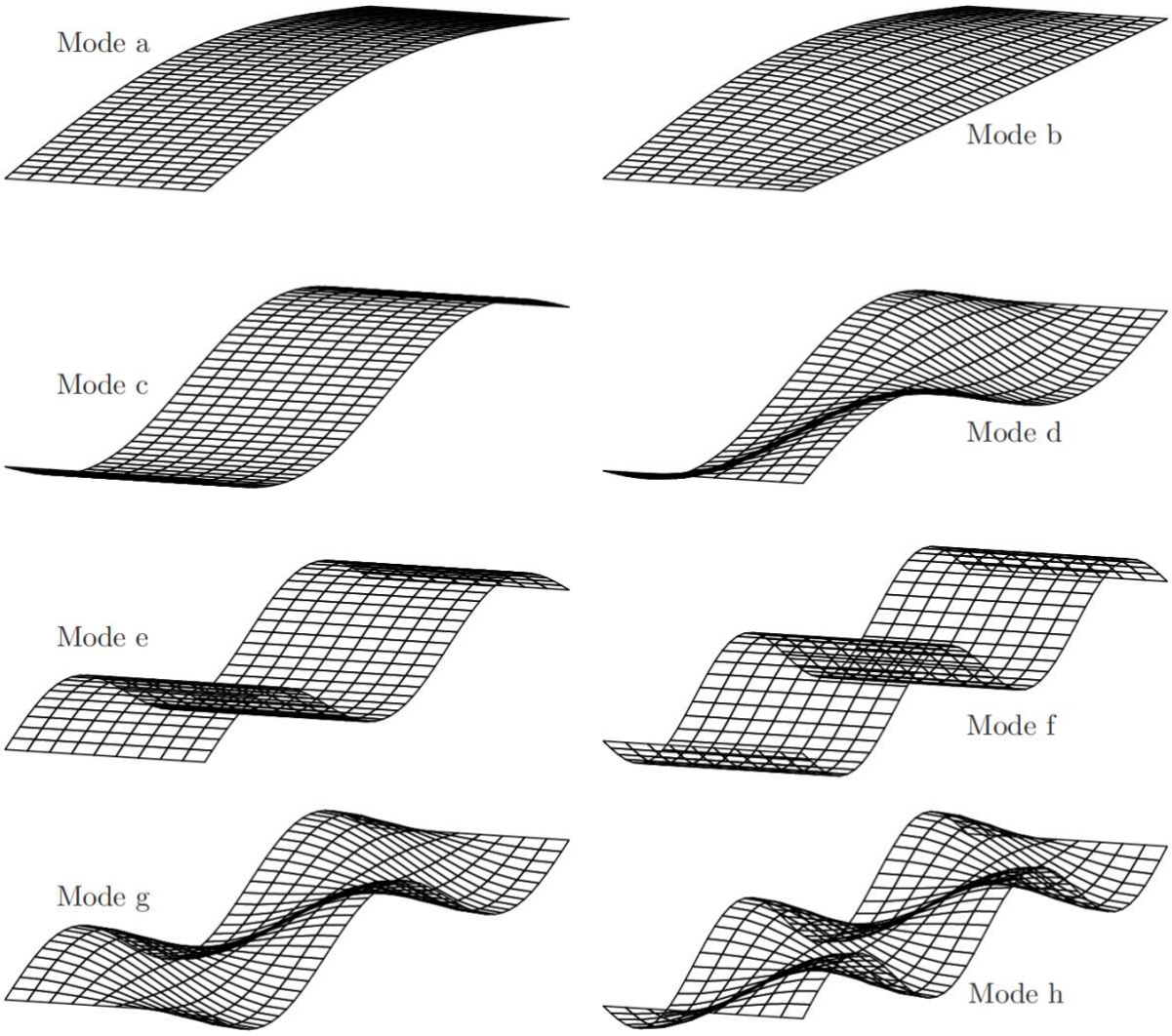


FIGURE 6 – Différents modes de vibration d'une passerelle en appui libre aux deux extrémités

Etude des ondes sismiques terrestres (E3A PC 09) :

Les ondes sismiques sont des ondes de déformation élastique qui se propagent à l'intérieur du globe terrestre (ondes de volume) ou en surface (ondes de Love et de Rayleigh). Ces ondes peuvent être longitudinales (la déformation se fait dans le sens de la propagation de l'onde) ou transversales (déformation perpendiculaire à la direction de propagation). Dans ce dernier cas, il s'agit d'ondes de cisaillement.

Nous allons étudier dans cette partie un type particulier d'ondes de volume longitudinales : les ondes P (primaires). La propagation de ces ondes dans la Terre, peut être décrite au moyen d'une analogie avec l'optique géométrique : l'onde se propage le long de « rayons sismiques » avec une célérité C. Dans un milieu homogène, les rayons sismiques sont des segments de droite. A l'interface entre deux milieux, il y a réflexion et réfraction du rayon incident, selon les lois de Snell-Descartes (figure 4), notamment :

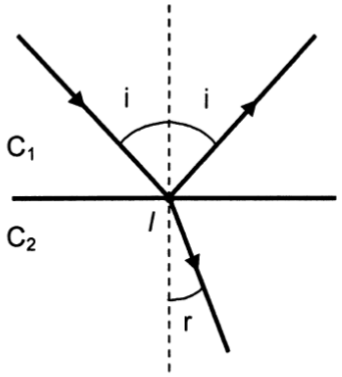


Figure 4 : Lois de Snell – Descartes

- *l'angle entre le rayon réfléchi et la normale au dioptre est égal à l'angle d'incidence,*
- *les angles d'incidence i et de réfraction r vérifient :*

$$\frac{\sin i}{C_1} = \frac{\sin r}{C_2}$$

La courbure de la Terre est négligée. Le sol est divisé en deux couches homogènes : la croûte terrestre d'épaisseur h dans laquelle la célérité des ondes est C_1 et le manteau à l'intérieur duquel leur célérité vaut $C_2 > C_1$. Une explosion a lieu en un point S proche de la surface et les ondes produites sont détectées par un capteur lui aussi en surface, placé en M, à une distance x de S. Le capteur reçoit trois ondes qui sont représentées sur la figure 5.

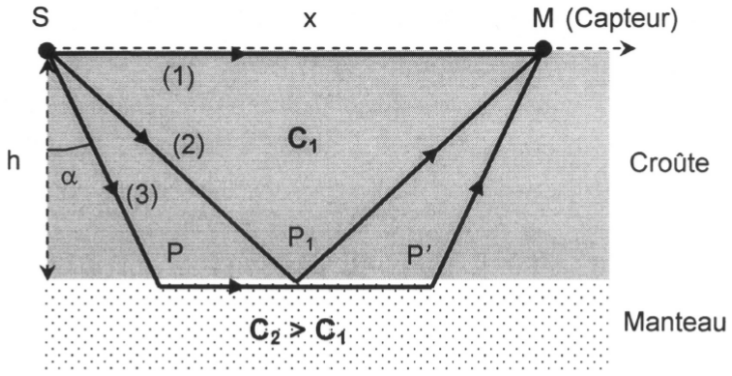


Figure 5 : Les trois types d'onde arrivant sur le capteur

A1. L'onde qui se propage parallèlement à la surface est l'onde directe. Déterminer son temps de propagation τ_1 en fonction de C_1 et x.

A2. Le capteur reçoit une deuxième onde qui s'est réfléchie en P_1 sur la surface de séparation entre la croûte terrestre et le manteau. Exprimer son temps de propagation τ_2 en fonction de C_1, x et h.

A3*a. Une troisième onde peut se propager jusqu'au capteur après s'être réfractée en P dans le manteau, puis être ressortie en P'. Quel doit être l'angle d'émission α pour que l'onde réfractée se propage le long de l'interface plane (trajet PP') ?
Montrer que cette onde ne peut être détectée que si *x* est supérieur à une distance minimale x_m que l'on exprimera en fonction de h, C_1 et C_2.

A3*b. Etablir le temps de propagation τ_3 de cette troisième onde en fonction de C_1, C_2, x et h pour $x > x_m$.

A4. Tracer sur un même graphe les allures des temps de propagation τ_1, τ_2 et τ_3 en fonction de la distance x.

Les courbes ainsi obtenues sont appelées hodochrones. Les géophysiciens les utilisent pour obtenir des informations sur l'épaisseur de la croûte terrestre et les célérités des ondes sismiques dans la croûte et le manteau. En disposant plusieurs capteurs à différentes distances x du lieu de l'explosion et en mesurant le temps de propagation de l'onde qui arrive la première, on obtient la courbe représentée sur la figure 6.

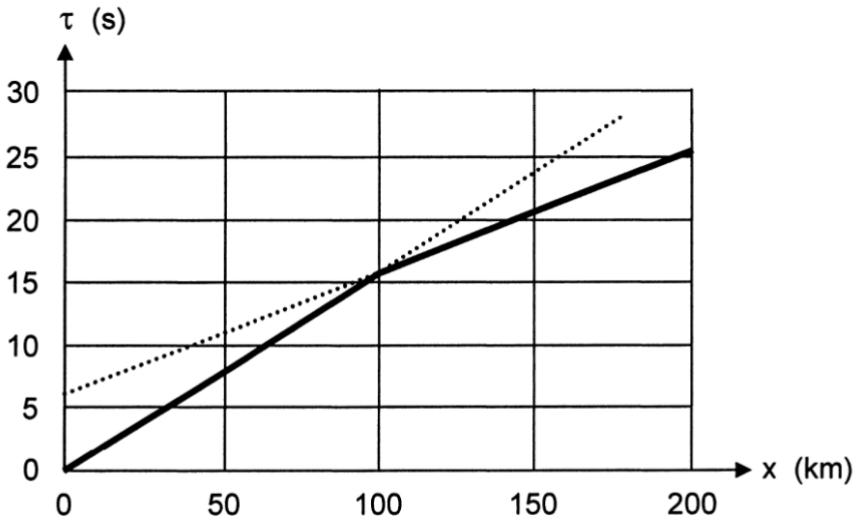


Figure 6 : Résultats expérimentaux

A5*a. Déduire de la figure les vitesses de propagation C_1 et C_2 puis, en considérant l'intersection des deux courbes, évaluer l'épaisseur h de la croûte terrestre.

A5*b. Déterminer une nouvelle valeur numérique de h en exploitant la prolongation de la deuxième courbe jusqu'en $x = 0$.
Que pensez-vous de la précision des mesures ?