ONDES ACOUSTIQUES DANS LES FLUIDES

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Ondes acoustiques dans les fluides	
Mise en équations eulérienne des ondes acoustiques dans le cadre de l'approximation acoustique. Équation de d'Alembert pour la surpression.	Classifier les ondes acoustiques par domaines fréquentiels. Valider l'approximation acoustique en manipulant des ordres de grandeur. Écrire le système des trois équations locales utiles. Linéariser les équations et établir l'équation de propagation de la surpression dans une situation unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes. Utiliser sa généralisation admise en faisant appel à l'opérateur laplacien.
Structure des ondes planes progressives harmoniques homogènes : caractère longitudinal, impédance acoustique.	Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques homogènes. Utiliser la notion d'impédance acoustique
Densité volumique d'énergie acoustique, vecteur densité de courant énergétique. Intensité acoustique.	Utiliser les expressions admises du vecteur-densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde. Utiliser la notion d'intensité acoustique en décibel et citer quelques ordres de grandeur.
Ondes acoustiques sphériques.	Utiliser une expression fournie de la surpression pour interpréter par un argument énergétique la décroissance en 1/r de l'amplitude.
Effet Doppler longitudinal	**Décrire et mettre en œuvre un protocole de détection synchrone pour mesurer une vitesse par décalage Doppler**

1. Equation de propagation .

1.1. Modélisation :

On considère un fluide dont l'état d'équilibre correspond à :

$$P(\vec{r},t) = P_0,\ T(\vec{r},t) = T_0,\ \rho(\vec{r},t) = \rho_0 \text{ et } \vec{v}(\vec{r},t) = \vec{0}.$$

Le passage d'une onde acoustique provoque des variations de ces grandeurs :

$$P(\vec{r},t) = P_0 + p(\vec{r},t)\ ;\ T(\vec{r},t) = T_0 + \theta(\vec{r},t)\ ;\ \rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \mu(\vec{r},t) \text{ et } \vec{v}(\vec{r},t).$$

On fait les hypothèses suivantes :

- On néglige le poids devant les forces de pression ;
- L'écoulement est supposé parfait et adiabatique ; il sera donc isentropique.
- le déplacement ξ d'une tranche de fluide par rapport à l'équilibre est petit, ainsi que la vitesse $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$;
- les variations sont petites : $P = P_0 + p$ avec $p << P_0$; p est la **surpression acoustique** ; $\rho = \rho_0 + \mu$ avec $\mu << \rho_0$; $v << c$ (célérité des ondes acoustiques).
- On se place dans **l'approximation acoustique** :
  * v, p et μ sont des perturbations par rapport à l'état d'équilibre ; on les assimilera, ainsi que leurs dérivées, à des infiniment petits dont on ne conservera dans les équations que le premier ordre ;
  * leurs valeurs moyennes temporelles sont nulles .

Ordres de grandeur : on a couramment $p/P_0 = \mu/\rho_0 = 10^{-3}$.

1.2. Equations générales de l'acoustique ; linéarisations et projections :

On utilise une onde plane, dépendant d'une coordonnée x et du temps t :

$$p = p(x,t)$$
$$\vec{v} = \vec{v}(x,t)$$

<u>Equation d'Euler :</u>

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}P$$

En projection sur Ox :

$$\boldsymbol{\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}}$$

Remarque : $\|\vec{v}.\overrightarrow{grad}\| \approx \frac{v}{\lambda}$; $\frac{\partial}{\partial t} \approx \frac{1}{T}$, donc :

$$\|\vec{v}.\overrightarrow{grad}\| \approx \frac{v}{\lambda}\ ;\ \frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow v \ll c$$

<u>Equation de conservation de la masse :</u>

$$div(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho_0 div(\vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0}$$

<u>Définition de χ_S (coefficient de compressibilité isentropique) :</u>

$$\boldsymbol{\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s \Rightarrow \partial\rho = \rho_0.\chi_S.\partial P}$$

1.3. Equation de propagation pour la surpression :

L'équation s'écrit à une dimension :

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$$

Elle se généralise à trois dimensions sous la forme :

$$\frac{\partial^2 p(\vec{r},t)}{\partial t^2} = c^2 \, \Delta p(\vec{r},t)$$

Equation de d'Alembert tridimensionnelle

Il est facile de montrer que ρ vérifie la même équation, moins facile de montrer que $\vec{v}$ la vérifie, mais c'est aussi le cas ; nous l'admettrons.

1.4. Solutions particulières : OPPHH

Pour une onde plane progressive harmonique homogène (OPPHH) se propageant selon une direction $\vec{u}$:

$$p(x,t) = p_0.\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \text{ avec } \vec{k} = k.\vec{u}$$

On adopte alors la notation complexe :

$$\underline{p}(x,t) = p_0.\exp j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

1.5. Caractère longitudinal de l'onde acoustique :

Pour une OPPHH se propageant selon Ox , l'équation d'Euler linéarisée donne en notation complexe :

$$\rho_0 j\omega\vec{v} = -\overrightarrow{grad}p = -\frac{\partial P}{\partial x}.\overrightarrow{u_x}$$

Le vecteur $\vec{v}$ est donc parallèle à la direction de propagation : l'onde est **longitudinale.**

2. Célérité des ondes acoustiques :

2.1. Gaz :

Pour un gaz parfait de masse molaire M, de coefficient γ à la température T, on montre que :

$$\rho_0 = \frac{P_0 M}{RT_0} \; ; \; \chi_S = 1/\gamma P_0$$

On en déduit :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

Remarque : attention dans les An à mettre M en unités SI : $kg.mol^{-1}$

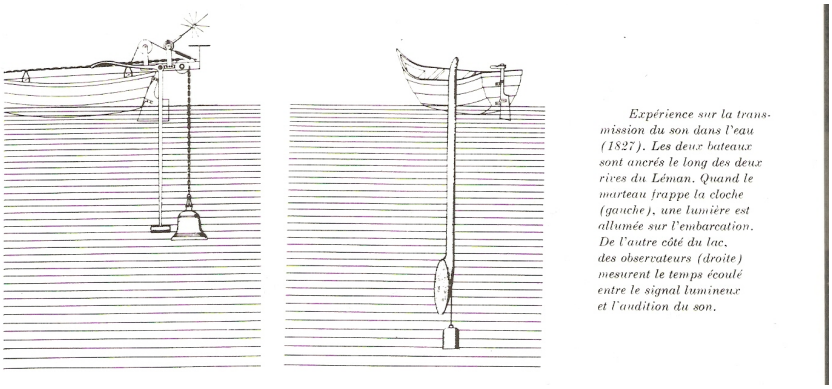
AN : Air à T = 300 K : c = 347 $m.s^{-1}$.

2.2. Liquides :

Exemple : eau $\chi_S = 5.10^{-10}$ Pa^{-1} ; $\rho_0 = 10^3$ $kg.m^{-3}$ d'où c = 1400 $m.s^{-1}$.

2.3. Mesure de la célérité du son :

La mesure peut se faire grâce à une impulsion par mesure de temps de vol (figure).



Expérience sur la transmission du son dans l'eau (1827). Les deux bateaux sont ancrés le long des deux rives du Léman. Quand le marteau frappe la cloche (gauche), une lumière est allumée sur l'embarcation. De l'autre côté du lac, des observateurs (droite) mesurent le temps écoulé entre le signal lumineux et l'audition du son.

Au labo, on la mesure dans l'air grâce à un couple émetteur récepteur d'ultrasons.

On considère un émetteur E placé en x=0 et relié à un générateur basse fréquence émettant un signal de fréquence f connue ; le signal émis s'écrit :

$$e(t) = E.\cos(\omega t).$$

Le signal reçu par un récepteur placé à l'abcisse x s'écrit :

$$s(t) = S.\cos(\omega t - kx).$$

On observe les signaux e(t) et s(t) à l'oscilloscope ; ils sont en phase si :

$$k.x = 2n.\pi \text{ avec } n \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = n.\lambda$$

On mesure donc la distance entre deux (ou plus) coincidences de phase successives pour en déduire λ, puis c = λ.f .

3. Relation entre p et v : impédance acoustique.

Définition : l'impédance acoustique d'une onde plane est :

$$\mathbf{Z = p / v}$$

Considérons une onde <u>progressive</u> plane monochromatique dont la surpression s'écrit :

$$p(x,t) = p_0.\sin(\omega t - k.x + \varphi).$$

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit ici $\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} = -k.p_0.\cos(\omega t - k.x + \varphi)$.

On en déduit $v(x,t) = \dfrac{k.p_0}{\rho_0 \omega}.\sin(\omega t - k.x + \varphi) = \dfrac{p_0}{\rho_0 c}.\sin(\omega t - k.x + \varphi)$.

On a donc <u>pour une onde progressive</u> suivant les x croissants :

$$\mathbf{Z_+ = \rho_0 c}$$

Pour <u>une onde progressive</u> suivant les x décroissants, on a de même :

$$\mathbf{Z_- = -\rho_0 c}$$

L'**impédance acoustique d'un milieu** est l'impédance d'une onde progressive se déplaçant selon les x croissants (c'est une grandeur positive) :

$$\mathbf{Z = \rho_0 c}$$

4. Ondes stationnaires :

4.1. Gammes d'ondes acoustiques :

Les fréquences audibles vont de 16 à 15000 Hz ; en-deça ce sont les infrasons, au-dela les ultrasons.

4.2 Formes de la vitesse vibratoire et de la surpression :

Soit :

$$v(x,t) = v_0.\cos(\omega t + \varphi).\cos(kx+\varphi')$$

On calcule

$$p(x,t) = \rho_0 c.v_0.\sin(\omega t + \varphi).\sin(kx+\varphi')$$

p(x,t) et v(x,t) sont en quadrature (déphasage de $\pi/2$) spatiale et temporelle.

4.3.Conditions aux limites dans un tuyau :

A une extrémité ouverte : p(t) = 0 car $P=P_0$ à l'air libre.
A une extrémité fermée : v (t) = 0.

4.4. Résonateur symétrique :

Un résonateur de longueur L dont les conditions aux extrémités sont les mêmes est appelé résonateur symétrique. Les pulsations propres y sont données par :

$$\omega_n = n\frac{\pi c}{L} \quad \text{et} \quad L = n\frac{\lambda}{2}$$

4.5. Résonateur disymétrique :

Un résonateur de longueur L dont les conditions aux extrémités sont différentes est appelé résonateur disymétrique. Les pulsations propres y sont données par :

$$\omega_n = (n-\frac{1}{2})\frac{\pi c}{L} \quad et \quad L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

5. Energie d'une onde acoustique :

5.1. Densité volumique d'énergie sonore :

Définition : énergie cinétique volumique ($J.m^{-3}$) :

$$e_c = \frac{1}{2}.\rho_0 v^2$$

Définition énergie potentielle volumique ($J.m^{-3}$):

$$e_p = \frac{1}{2}.\chi_S p^2$$

L'énergie volumique totale est donc : $\mathbf{e = e_C + e_P}$

Propriétés : pour une onde progressive $e_C = e_P$; e vérifie l'équation de propagation.

5.2.Vecteur densité surfacique de puissance :

Définition : le vecteur densité surfacique de puissance est :

$$\vec{\pi} = p.\vec{v} \text{ en W.m}^{-2}$$

La puissance acoustique fluant à travers une surface S s'exprime par :

$$P = \iint \vec{\pi}.d\vec{S}$$

La conservation de l'énergie s'écrit sous forme locale :

$$div(\vec{\pi}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

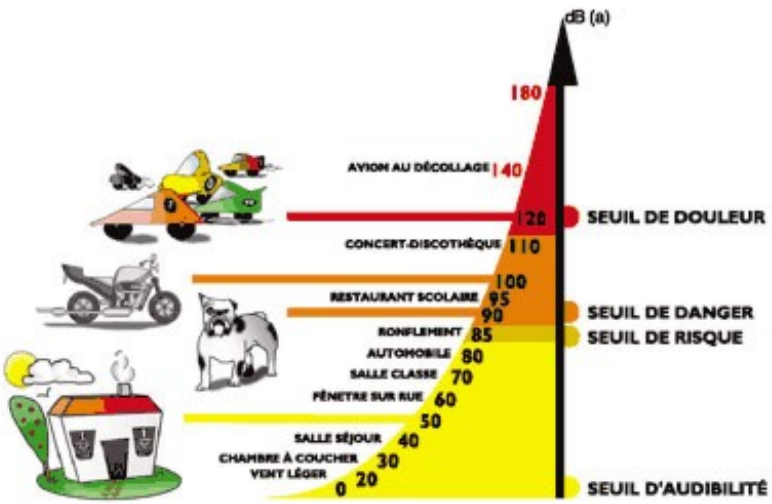
5.3. Intensité acoustique :

Définition : l'intensité acoustique est :

$$I = \langle \|\vec{\pi}\| \rangle_T$$

Définition : le niveau sonore est :

$$N = 10\log(I/I_0) \text{ avec } I_0 = 10^{-12}\ W.m^{-2}.$$



6. Onde acoustique sphérique :

Considérons une source S quasi-ponctuelle émettant une onde acoustique de manière isotrope avec une puissance P : l'onde acoustique émise est dite **sphérique.**

On a par symétrie en coordonnées sphériques :

$$p = p(r,t)$$
$$\vec{v} = v(r,t).\overrightarrow{u_r}$$

6.1. Forme de la surpression :

En coordonnées sphériques, pour p=p(r,t), le laplacien scalaire s'écrit :

$$\Delta p(r,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rp)}{\partial r^2}$$

On déduit de l'équation de d'Alembert qu'une solution harmonique s'écrit :

$$p(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - k.r + \varphi)$$

6.2. Forme de la vitesse :

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p(r,t)}{\partial r}.\overrightarrow{u_r}$$

On calcule :

$$\vec{v} = \left(\frac{A}{\rho_0 r^2 \omega}\sin(\omega t - k.r + \varphi) + \frac{A}{\rho_0 r c}\cos(\omega t - k.r + \varphi)\right)\overrightarrow{u_r}$$

Le second terme est prépondérant dès que :

$$r >> \lambda$$

On est alors dans l'approximation de **champ lointain**.

6.3. Puissance moyenne rayonnée :

Le milieu étant supposé non-absorbant, la puissance moyenne fluant à travers une sphère de rayon r centrée sur S est :

$$P = \langle \iint_{Sphère} p(r,t).\vec{v}(r,t).d\vec{S}\rangle_T = \langle p(r,t).v(r,t)\rangle.4.\pi.r^2 = cte$$

L'intensité acoustique décroit alors en $1/r^2$.

7. Effet Doppler :

Réf : BUP 983

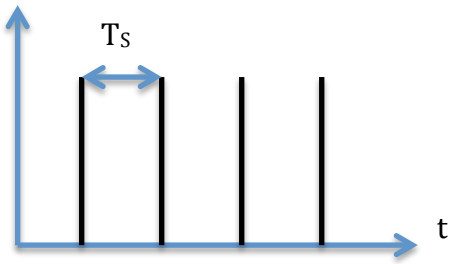
Considérons un référentiel R quelconque.

Lorsqu'une source immobile par rapport à R émet une onde de fréquence f, un récepteur également immobile par rapport à R perçoit une onde de fréquence f.

Si la source et le récepteur sont en mouvement relatif, la fréquence perçue par le récepteur sera différente de la fréquence d'émission de la source : c'est **l'effet Doppler**.

On montre que pour l'effet Doppler longitudinal :

$$f_R = \frac{c - v_R}{c - v_S}.f_S$$



Démonstration :

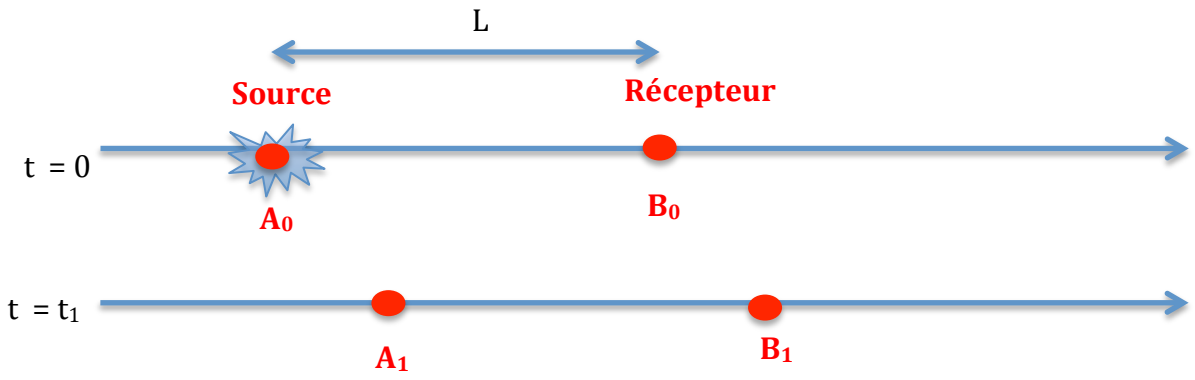
Soit une source S émettant des impulsions de durée brève , à intervalles réguliers égaux à Ts = 1/fs.

On suppose que S et R se déplacent le long de l'axe Ox avec des vitesses constantes :

$$\overrightarrow{v_S} = v_S.\overrightarrow{u_x}\ ;\ \overrightarrow{v_R} = v_R.\overrightarrow{u_x}$$

v_R et v_S étant algébriques.
Le signal se propage à la célérité c constante.

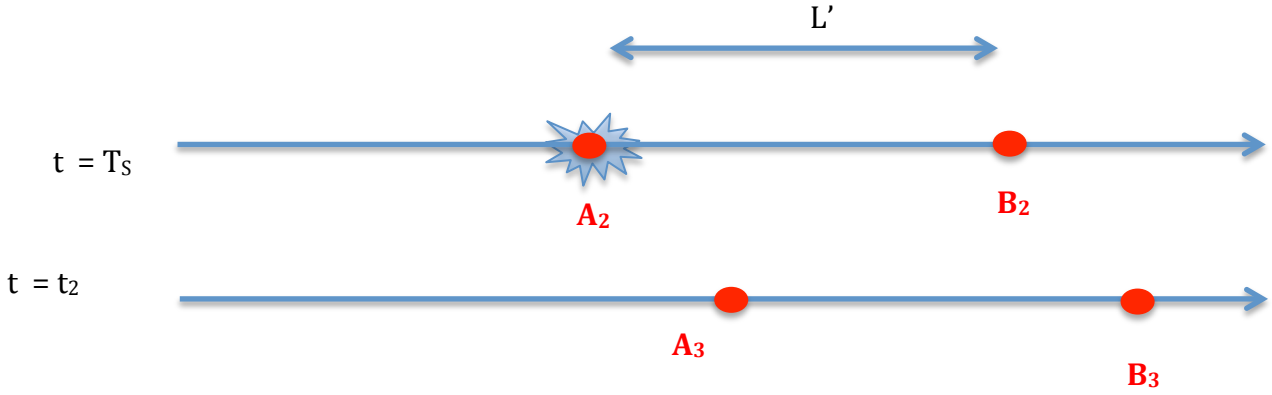
A un instant pris comme origine des temps, la source S se trouve en A_0 et le récepteur R en B_0 distant de L de A_0 : A_0B_0 = L. S émet alors une impulsion.



Cette impulsion atteint R à l'instant t_1 tel que :

$$c.t_1 = L+v_R.t_1$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{L}{c - v_R}$$



A l'instant t = T_S, la source émet une nouvelle impulsion.

Avec le même raisonnement que précédemment , on calcule que cette nouvelle impulsion atteint R à l'instant :

$$t_2 = \frac{L}{c - v_R} + \frac{c - v_s}{c - v_R}.T_S$$

La durée T_R entre la réception de ces deux impulsions est donc :

$$T_R = \frac{c - v_s}{c - v_R}.T_S$$

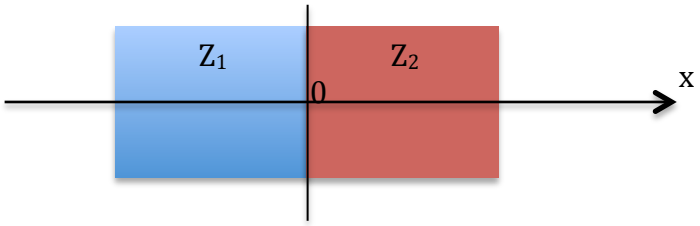
La formule en fréquences s'en déduit.

L'effet Doppler concerne tous les types d'ondes ; il est en particulier responsable de l'élargissement des raies spectrales.

8. Réflexion et transmission d'une OPPHH acoustique :

8.1. Modélisation :

On considère une onde se propageant dans un tube de section S constante.
L'interface x = 0 sépare deux milieux d'impédances acoustiques Z_1 et Z_2
La vitesse de l'onde incidente est :



$$v_i(x, t) = v_0.\cos(\omega t - k_1 x)$$

soit en complexe :

$$\underline{v}_i(x,t) = v_0.\exp j(\omega t - k_1 x)$$

La surpression de l'onde incidente s'écrit :

$$p_i(x, t) = Z_1.v_0.\cos(\omega t - k_1 x)$$
$$\underline{p}_i(x,t) = Z_1.v_0.\exp j(\omega t - k_1 x)$$

8.2. Formes générales des ondes réfléchies et transmises :

On constate expérimentalement l'existence d'une onde réfléchie et d'une onde transmise.

On utilise pour caractériser ces ondes réfléchie et transmise des coefficients de réflexion et transmission, à priori complexes :

Définition : le coefficient de réflexion en vitesse à l'abscisse x est :

$$\underline{r_v} = \frac{\underline{v_r}(x,t)}{\underline{v_i}(x,t)}$$

Définition : le coefficient de transmission en vitesse à l'abscisse x est :

$$\underline{t_v} = \frac{\underline{v_t}(x,t)}{\underline{v_i}(x,t)}$$

Définition : le coefficient de réflexion en pression à l'abscisse x est :

$$\underline{r_p} = \frac{\underline{p_r}(x,t)}{\underline{p_i}(x,t)}$$

Définition : le coefficient de transmission en pression à l'abscisse x est :

$$\underline{t_p} = \frac{\underline{p_t}(x,t)}{\underline{p_i}(x,t)}$$

On admet que ces ondes ont même pulsation que l'onde incidente (cela se démontre).

La vitesse de l'onde réfléchie s'écrit alors :

$$\underline{v}_r(x, t) = \underline{r}_v.v_0.\exp j(\omega t + k_1 x)$$

La surpression de l'onde réfléchie s'écrit :

$$\underline{p}_r(x, t) = -Z_1.\underline{r}_v.v_0.\exp j(\omega t + k_1 x)$$

La vitesse de l'onde transmise s'écrit :

$$\underline{v}_t(x, t) = \underline{t}_v.v_0\exp j(\omega t - k_2 x)$$

La surpression de l'onde transmise s'écrit :

$$\underline{p}_t(x, t) = Z_2.\underline{t}_v.v_0.\exp j(\omega t - k_2 x)$$

8.3. Conditions de continuité à l'interface : coefficients de réflexion et de transmission :

Il y a continuité :

- de la pression P, et donc de la surpression p ;
- de la vitesse v.

Attention : faites bien la différence entre conservation d'une grandeur (énergie) et continuité !

La continuité de la vitesse en x = 0 s'écrit :

$$\underline{v}(0^-,t) = \underline{v}(0^+,t)$$
$$\Leftrightarrow \underline{v}_i(0^-, t) + \underline{v}_r(0^-, t) = \underline{v}_t(0^+,t)$$

soit :

$$\mathbf{1 + \underline{r}_v = \underline{t}_v}$$

La continuité de la surpression s'écrit :

$$\underline{p}(0^-,t) = \underline{p}(0^+,t)$$
$$\Leftrightarrow \underline{p}_i(0^-,t) + \underline{p}_r(0^-,t) = \underline{p}_t(0^+,t)$$

soit :

$$\mathbf{Z_1(1 + \underline{r}_v)= Z_2\, \underline{t}_v}$$

On en déduit :

$$\boldsymbol{r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1+Z_2}\ ;\ t_v = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}}$$

On peut aussi calculer :

$$r_p = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1+Z_2}\ ;\ t_p = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}$$

Remarque : ces coefficients de réflexion et de transmission sont réels.

8.4. Coefficients de réflexion et de transmission en intensité :

ATTENTION : POUR CE CALCUL, IL FAUT IMPERATIVEMENT REVENIR AUX VALEURS REELLES !

L'intensité de l'onde incidente est :

$$I_i = \langle \|p_i \vec{v}_i\| \rangle = \langle Z_1 v_0^2 . cos^2(\omega t - k_1 x) \rangle = \frac{1}{2} Z_1 v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{Z_1}$$

L'intensité de l'onde réfléchie est :

$$I_r = \langle \|p_r \vec{v}_r\| \rangle = \langle Z_1 . (r_v v_0)^2 . cos^2(\omega t + k_1 x) \rangle = \frac{1}{2} Z_1 . r_v^2 . v_0^2$$

L'intensité de l'onde transmise est :

$$I_t = \langle \|p_t \vec{v}_t\| \rangle = \langle Z_2 . (t_v v_0)^2 . cos^2(\omega t - k_2 x) \rangle = \frac{1}{2} Z_2 . t_v^2 . v_0^2$$

Le coefficient de réflexion en intensité est donc :

$$R \overset{\text{def}}{=} \frac{I_r}{I_i} = r_v^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1+Z_2}\right)^2$$

Le coefficient de transmission en intensité est :

$$T \overset{\text{def}}{=} \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_2}{Z_1} t_v^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}$$

La conservation de l'énergie impose :

$$\mathbf{R + T = 1.}$$

Lorsque $Z_1 = Z_2$, le coefficient de réflexion est nul ; on a alors réalisé une **adaptation d'impédances.**

Exemple : interface air/eau.

ONDES - RESUME

La solution générale de l'équation de d'Alembert est :
$s(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$
f représente une onde progressive se propageant selon les x croissants ;
g représente une onde dégressive se propageant selon les x décroissants .

Pour une onde progressive (f ou g), le rapport – en valeur absolue - de la grandeur dynamique sur la grandeur cinétique est une constante appelée impédance caractéristique Z_C.

Déf : Onde plane : une onde plane est une onde qui ne dépend que d'une coordonnée cartésienne et du temps.

Déf : Onde progressive plane sinusoidale (OPPS) : une OPPS est de la forme :
$s(x, t) = A.\cos(kx \pm \omega t + \varphi)$
$\omega = kc$ est la pulsation ; $f = \omega / 2\pi$ est la fréquence ;
$\lambda = cT$ est la longueur d'onde ;
L'amplitude A et la phase φ sont déterminées par les conditions initiales.

Déf : Onde stationnaire : une onde stationnaire se propageant selon Ox est une onde qui s'écrit :
$s(x, t) = f(x).g(t)$.

Un onde stationnaire vérifiant l'équation de d'Alembert à toujours la forme :
$s(x, t) = A.\cos(\omega t + \varphi).\cos(kx + \varphi')$
où A, φ et φ' sont déterminées par les conditions initiales et les conditions aux limites.

Pour un **résonateur symétrique** de longueur L(mêmes conditions aux limites à chaque extrémité) , on a $L = n\lambda / 2$; $\omega_n = n.(\pi c) / L$ où n est un entier non nul.
Ce cas est fréquent pour les cordes vibrantes ; $\omega_0 = \pi c / L$ est appelé mode fondamental, ω_n harmonique de rang n.

Pour un **résonateur disymétrique** de longueur L (conditions aux limites "opposées" à chaque extrémité , exemple tuyau ouvert à une extrémité) , on a :

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{\pi c}{2L}(2n+1)$$ ou n est un entier.

Les grandeurs dynamique et cinétique sont en quadrature ; exemple : dans un tuyau sonore les noeuds de débit sont des ventres de pression.
Une onde progressive ne peut se propager que dans un milieu illimité ; si le milieu est limité une certaine partie de l'énergie incidente est réfléchie, l'autre partie est transmise.
Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en énergie peuvent être calculés en exprimant la continuité de la grandeur cinétique et de la grandeur dynamique à l'extrémité du milieu.

Dans le cas général, à l'interface entre un milieu 1 et un milieu 2 :

$$R = \frac{P_r}{P_i} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2 \; ; \; T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

La conservation de l'énergie impose :
$R + T = 1$.