RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Le vert peut être utilisé pour dessiner de l'herbe.
- Ne pas utiliser de correcteur.

1) Effet Hall quantique :

L'effet Hall repose sur le fait qu'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique subit la force dite de Lorentz.

Document 4 - Effet Hall classique

En 1879, Edwin Hall découvre que lorsqu'un courant électrique I traverse un barreau conducteur plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, il apparaît une différence de potentiel, appelée tension Hall et notée U_H, dans la direction perpendiculaire au courant et au champ (**figure 8**). Son origine est la force que le champ magnétique exerce sur les porteurs de charge qui participent au courant (force de Lorentz).

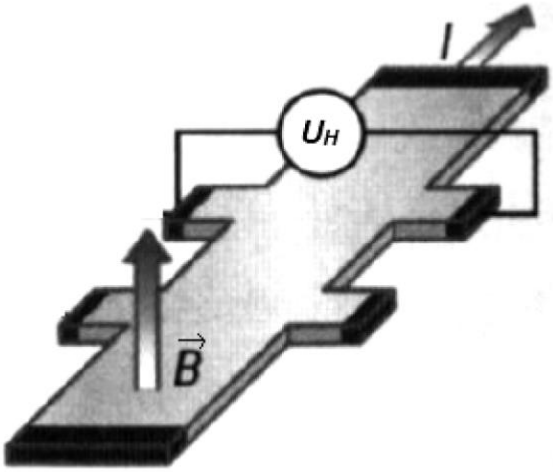


Figure 8 - Mesure de la tension de Hall

Dans les conducteurs usuels, U_H vérifie alors la relation : $U_H = R_H I$ avec R_H la résistance Hall.

De plus, la résistance Hall R_H est proportionnelle à la norme du champ $\vec{B}$ et à l'inverse du nombre n_v de porteurs de charge par unité de volume. L'effet Hall fournit donc un moyen de mesure du nombre de porteurs de charges, utilisé en particulier pour caractériser les matériaux semiconducteurs. Il est aussi à la base du fonctionnement des dispositifs les plus couramment utilisés pour la mesure des champs magnétiques.

Source : Gilbert Pietryk, *Panorama de la Physique*, 2007

En 1980, Klaus Von Klitzing[1] découvrit, dans le cas de semi-conducteurs à très basse température plongés dans un champ magnétique intense, que la résistance Hall R_H était quantifiée (**document 5**) : ce résultat est alors qualifié d'effet Hall quantique.

Document 5 - Résistance de Hall en fonction du champ magnétique

Klaus Von Klitzing et ses collaborateurs ont montré qu'à la température de l'hélium liquide (4 K), la résistance Hall d'un tel système présente une dépendance en champ magnétique très particulière. Au lieu de la variation linéaire classique, elle suit un comportement en marches d'escalier (**figure 11**).

La valeur de la résistance Hall sur les plateaux observés vaut $\frac{1}{p}\frac{h}{e^2}$ où p prend des valeurs entières ($R_H = 25{,}812\ \text{k}\Omega$ pour $p = 1$), e est la charge électrique élémentaire et h la constante de Planck.

Ce résultat est très remarquable puisqu'il relie la résistance de Hall sur les plateaux à deux constantes fondamentales sans aucun facteur dépendant des caractéristiques de l'échantillon. Il est maintenant vérifié de manière tellement reproductible, avec une précision relative de l'ordre de 10^{-10}, que l'effet Hall quantique fournit depuis 1990 l'étalon standard de résistance électrique.

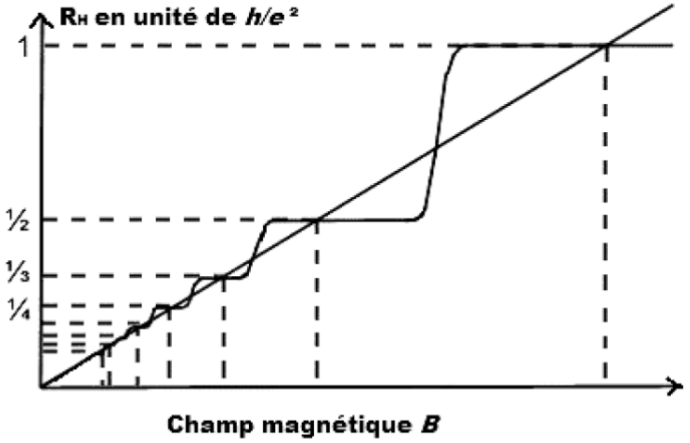


Figure 11 - Résistance de Hall d'un gaz bidimensionnel d'électrons

Source : Gilbert Pietryk, *Panorama de la Physique*, 2007

L'explication de ces comportements fait appel à la mécanique quantique : les niveaux d'énergie d'un gaz bidimensionnel d'électrons dans un champ magnétique perpendiculaire, appelés niveaux de Landau, sont discrets et régulièrement espacés.

Modélisation sans champ magnétique

On considère pour cela les électrons mobiles précédents comme un gaz de particules quantiques libres n'interagissant pas entre-elles et confinées dans une structure cristalline particulière qui ne leur permet de se déplacer que sur une distance ℓ_x selon $\vec{u}_x$ et ℓ_y selon $\vec{u}_y$ (**figure 12**).

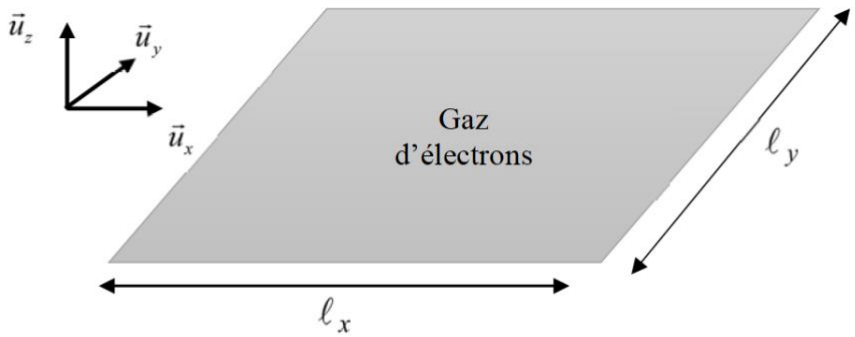


Figure 12 - Gaz d'électrons dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

On assimile cette situation à celle d'un puits de potentiel infini rectangulaire (**figure13**) de longueur ℓ_x et de largeur ℓ_y pour lequel l'énergie potentielle $\mathcal{V}(x,y)$ s'écrit :

- $\mathcal{V}(x,y)=0$ à l'intérieur du puits,
- $\mathcal{V}(x,y)\to\infty$ en dehors du puits.

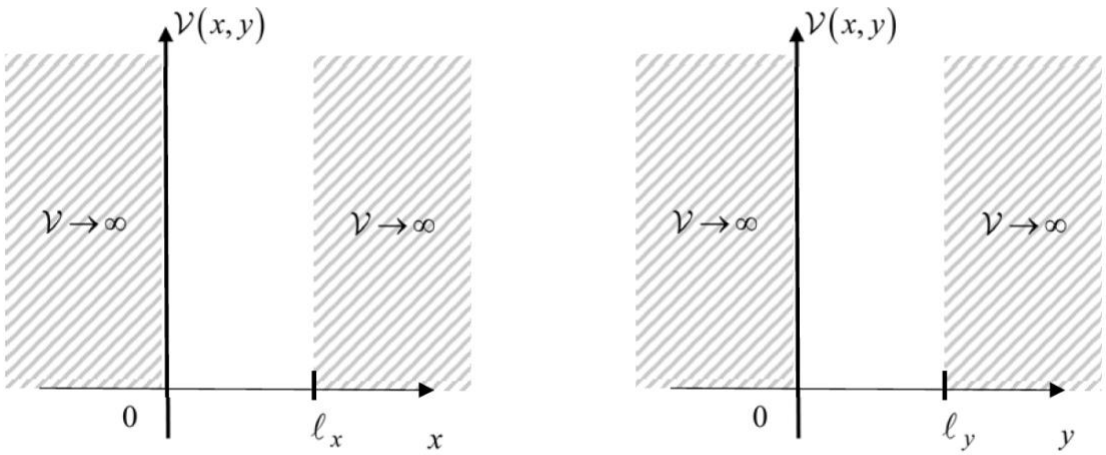


Figure 13 - Puits de potentiel infini suivant x (à gauche) et y (à droite)

On suppose les directions x et y indépendantes de sorte à pouvoir traiter le problème à une seule dimension suivant x dans un premier temps.

Q38. Rappeler l'inégalité de Heisenberg reliant l'indétermination quantique sur la position x et sur la quantité de mouvement p_x.

Q39. Montrer que l'énergie minimale $\mathcal{E}_{x\min}$ au fond du puits pour le confinement selon x est donnée par :

$$\mathcal{E}_{x\min}=\frac{\hbar^2}{2m\ell_x^2}.$$

Comparer au cas classique d'une particule qui serait confinée au fond d'un puits.

On note $\Psi_{1D}(x,t)=\varphi(x)\exp\left(-i\frac{\mathcal{E}_x}{\hbar}t\right)$ la fonction d'onde associée à l'énergie $\mathcal{E}_x$ de l'électron confiné dans un puits infini à une dimension de largeur ℓ_x, avec $\varphi(x)$ une fonction *a priori* complexe ne dépendant que de x et i le nombre complexe tel que $i^2=-1$.

Q40. Que représente $\left|\Psi_{1D}(x,t)\right|^2$? Justifier le caractère stationnaire des états de l'électron.

Q41. Écrire la condition de normalisation portant sur l'axe Ox. Quelles sont les conditions aux limites à imposer à la fonction $\varphi(x)$?

Q42. Donner un exemple ayant des conditions aux limites similaires dans un autre domaine de la physique.

On rappelle qu'une fonction d'onde ψ associée à une énergie $\mathcal{E}$ des états stationnaires d'une particule quantique est solution de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+\mathcal{V}\,\Psi=\mathcal{E}\,\Psi$$

où $\Delta\Psi$ désigne le laplacien de Ψ.

On donne en coordonnées cartésiennes : $\Delta f(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Q43. Montrer que l'équation de Schrödinger pour la fonction $\varphi(x)$ à l'intérieur du puits peut s'écrire :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+k_x^2\varphi(x)=0$$

où l'on donnera l'expression du module d'onde k_x en fonction de $\mathcal{E}_x$, m et $\hbar$.

Q44. Justifier alors que l'énergie $\mathcal{E}_x$ est quantifiée et s'écrit :

$$\mathcal{E}_x=m_x^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_x^2} \text{ avec } m_x \text{ un entier positif non nul.}$$

Commenter par rapport au résultat de l'inégalité de Heisenberg.

On souhaite dans un second temps prendre en compte le confinement dans la direction y pour lequel on suppose par analogie que l'énergie est aussi quantifiée et s'écrit :

$$\mathcal{E}_y=m_y^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_y^2} \text{ avec } m_y \text{ un entier positif non nul.}$$

Q45. Exprimer alors par analogie le module d'onde k_y en fonction de m_y et ℓ_y.

Modélisation en présence d'un champ magnétique

En présence d'un champ magnétique $\vec{B}=B\vec{u}_z$, il convient de modifier l'équation de Schrödinger.

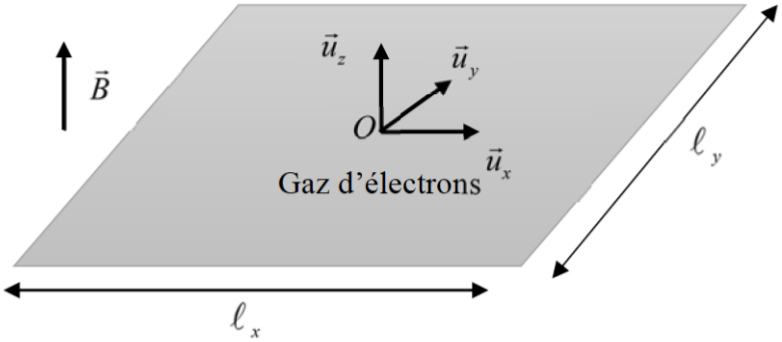


Figure 14 - Gaz d'électrons plongé dans un champ magnétique

On choisit l'origine du repère $(Oxyz)$ au centre du gaz d'électrons.

Soit $\Psi_{2D}(x,y,t)=\psi(x,y)\exp\left(-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t\right)$ la fonction d'onde associée à l'énergie $\mathcal{E}$ des états stationnaires d'un électron confiné et plongé dans un champ magnétique. La partie spatiale de la fonction d'onde $\psi(x,y)$ est solution de l'équation de Schrödinger stationnaire adaptée en présence d'un champ $\vec{B}=B\vec{u}_z$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+i\frac{\hbar eBx}{m}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{e^2B^2x^2}{2m}\psi=\mathcal{E}\psi\ .$$

On pose pour la suite $\omega_0=\omega_c=\frac{eB}{m}$ et $x_0=\frac{\hbar k_y}{eB}$.

Q46. Une modélisation consiste à écrire $\psi(x,y)$ sous la forme $\psi(x,y)=\Omega(x)\exp(ik_y y)$.
Montrer que l'équation de Schrödinger précédente se réduit à :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Omega}{dx^2}+\mathcal{V}_{eff}(x)\Omega=\mathcal{E}\,\Omega$$

où $\mathcal{V}_{eff}(x)=\frac{1}{2}m\omega_0^2(x-x_0)^2$ est l'énergie potentielle effective.

Q47. Quel système présente une énergie potentielle similaire dans un autre domaine de la physique ? Représenter $\mathcal{V}_{eff}(x)$.

Q48. La modélisation impose au centre x_0 de l'énergie potentielle effective d'être situé à l'intérieur du gaz d'électrons (**figure 14**). Quelle est alors la valeur maximale possible pour k_y ?

Q49. En supposant que la quantification du module d'onde k_y reste identique à celle du puits infini unidimensionnel de la **Q45**, montrer que l'entier m_y doit satisfaire à l'inégalité :

$$m_y \le \frac{eB}{h}\ell_x\ell_y.$$

Q50. En tenant compte du spin de l'électron, c'est-à-dire qu'il existe deux états possibles sur un même niveau d'énergie, en déduire que le nombre maximum d'état d'un électron d'énergie $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$g=2\frac{eB}{h}\ell_x\ell_y.$$

L'équation de Schrödinger précédente n'a de solution physiquement acceptable que pour des niveaux d'énergie quantifiée. On admettra que cette énergie s'écrit : $\mathcal{E}_p=\left(p-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$, avec $p\in\mathbb{N}^*$.

Chaque niveau d'énergie contient ainsi g états quantiques possibles pour un électron (**figure 15**).

Le système considéré est toujours le gaz d'électrons contenant N_e électrons dans une forme parallélépipédique de hauteur b de longueur ℓ_x et de largeur ℓ_y. Ce système est en équilibre avec un thermostat à la température T.

On se souviendra aussi que deux électrons ne peuvent avoir le même état quantique et que le remplissage des niveaux se fait toujours par énergie croissante.

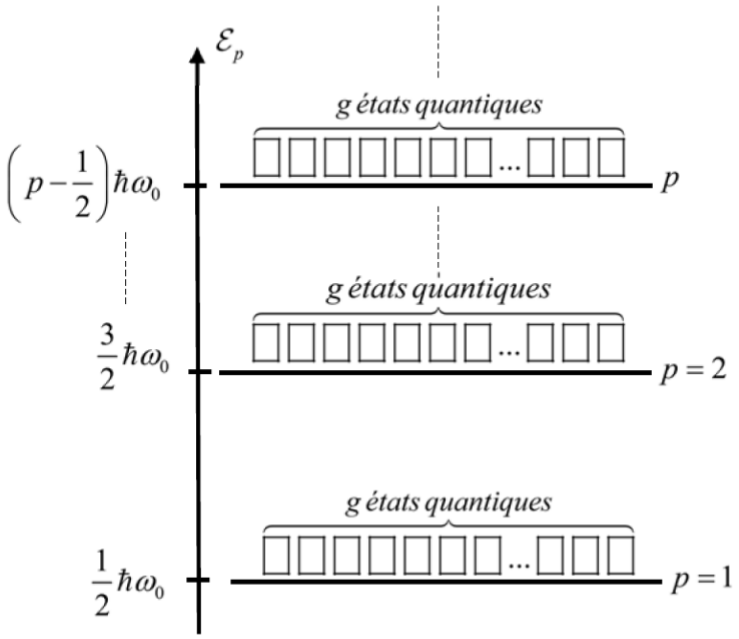


Figure 15 - Niveaux d'énergie possible des électrons

Q51. Exprimer N_e à l'aide de la densité volumique n_v d'électrons supposée uniforme et des caractéristiques géométriques du système considéré.

Q52. Lorsque la température du thermostat est faible, on admettra que seul le niveau fondamental d'énergie est occupé. Proposer une inégalité entre N_e et g pour satisfaire à une telle condition et montrer qu'elle n'est réalisable que pour un champ magnétique tel que :

$$B \geq B_{\min}$$

où l'on donnera l'expression de $B_{\min}$ en fonction de n_v, h, b et e.

Q53. Proposer de même une condition sur N_e pour que les électrons puissent occuper au plus p niveaux d'énergies. En déduire que le champ appliqué doit satisfaire à la condition :

$$B \geq B_p = \frac{1}{p}\frac{n_v h b}{2e}.$$

Q54. Exprimer alors la résistance Hall correspondante $R_H = \dfrac{B_p}{n_v e b}$ en fonction du rapport h/e^2. Le modèle théorique utilisé concorde-t-il correctement avec les observations expérimentales (**document 5**) ?

Q55. Proposer une justification de la température choisie par Klaus Von Klitzing (autour de 4 K) pour observer l'effet Hall quantique.

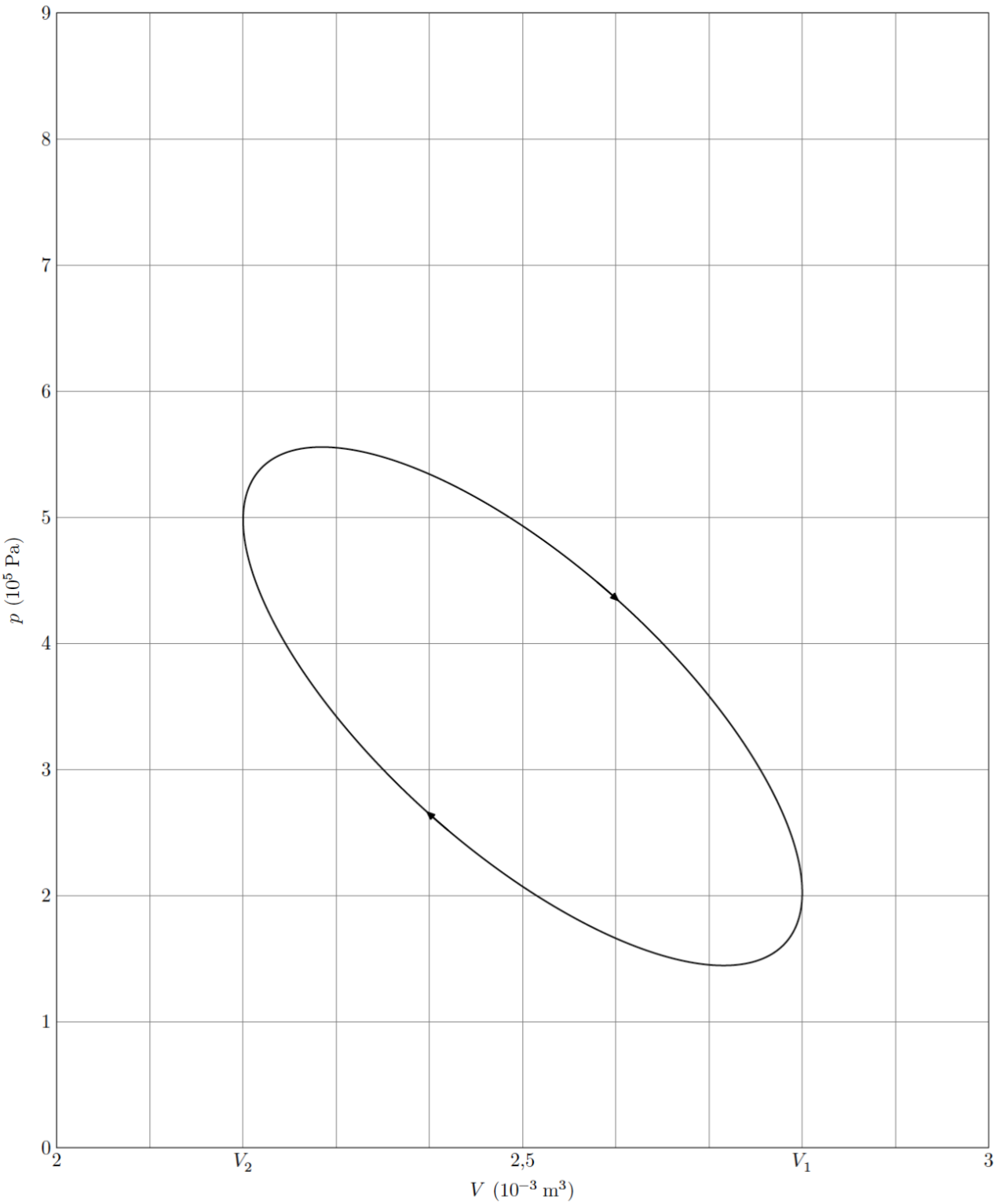
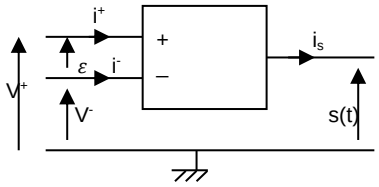


Figure B Allure du cycle réel d'un moteur Stirling dans le diagramme (p, V)

2) Réalisation d'un oscillateur quasi-sinusoidal :

Donnée : dans cet exercice l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.
Le nom ALI est un hommage au célèbre ALI BABA, un personnage des « Mille et une Nuits ».
On rappelle que pour un ALI idéal en régime linéaire :

- Les courants de polarisation i^+ et i^- sont nuls ;
- La tension d'entrée différentielle $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$.



Il est parfois intéressant d'avoir des systèmes électroniques instables, notamment en électronique, pour pouvoir réaliser des oscillateurs. On rappelle que ce type de structure peut être réalisé en associant un amplificateur et un filtre comme présenté en **figure 4**.

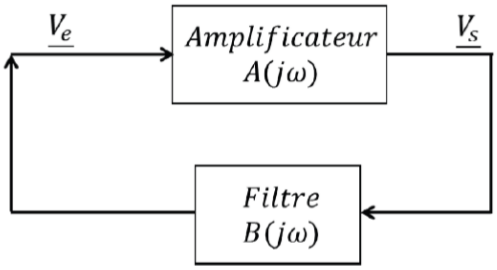


Figure 4 – Structure d'un oscillateur

Nous étudions dans cette partie l'oscillateur à filtre de Wien (**figure 5**).

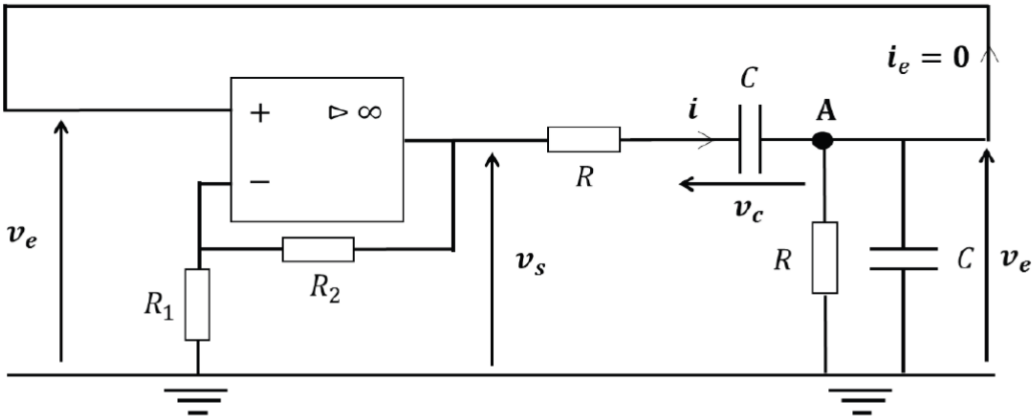


Figure 5 – Schéma électrique de l'oscillateur à filtre de Wien

I.1 – Généralités

Q50. Reproduire le schéma sur votre copie et identifier la partie amplificatrice ainsi que la partie filtre de cet oscillateur.

Q51. Justifier pourquoi le courant noté i_e sur le schéma peut être considéré comme nul dans la suite de l'étude.

I.2 – Étude du filtre de Wien

Q52. Quelle est la relation entre la dérivée de la tension v_c aux bornes du condensateur par rapport au temps et le courant i le traversant ? Cette équation sera nommée **« E1 » sur votre copie**.

Q53. Par une loi des nœuds au point A, exprimer le courant i en fonction de la tension v_e et de sa dérivée par rapport au temps. Cette équation sera nommée **« E2 » sur votre copie**.

Q54. Par une loi des mailles, exprimer la tension v_s en fonction de v_e, R, i et v_c. Cette équation sera numérotée **« E3 » sur votre copie**.

Q55. En utilisant les équations **E1** et **E2**, montrer que l'on obtient l'expression suivante en précisant l'expression de la constante de temps τ :

$$\frac{dv_s}{dt} = \tau\frac{d^2v_e}{dt^2} + 3\frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{\tau}. \qquad (7)$$

I.3 – Amplificateur

Q56. En étudiant le fonctionnement de l'amplificateur linéaire intégré présent dans le schéma de la **figure 5 page 9**, en déduire la valeur de l'amplification $A = \frac{v_s}{v_e}$ en fonction des résistances R_1 et R_2.

I.4 – Conditions d'oscillation

Q57. Montrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante vérifiée par la tension v_s en fonction de τ et de l'amplification A :

$$\tau^2\frac{d^2v_s}{dt^2} + \tau(3-A)\frac{dv_s}{dt} + v_s = 0. \qquad (8)$$

Q58. Par analyse de cette équation, quelle condition doit-on satisfaire pour obtenir une oscillation harmonique ?

Q59. Quelle est alors la fréquence d'oscillation que l'on notera f_0 ?

Q60. D'où provient l'énergie nécessaire pour garantir l'oscillation ?

I.5 – Qualité du signal fourni

Nous nous intéressons à présent à la qualité du signal fourni par cet oscillateur. En **figures 6 et 7** sont présentées l'allure temporelle de la tension v_e ainsi que sa décomposition spectrale.

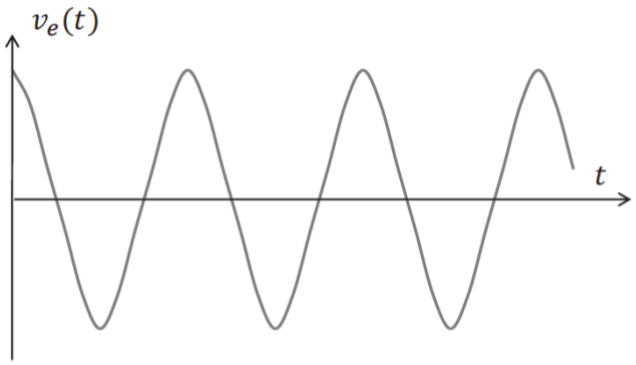


Figure 6 – Allure temporelle de la tension $\boldsymbol{v_e}$

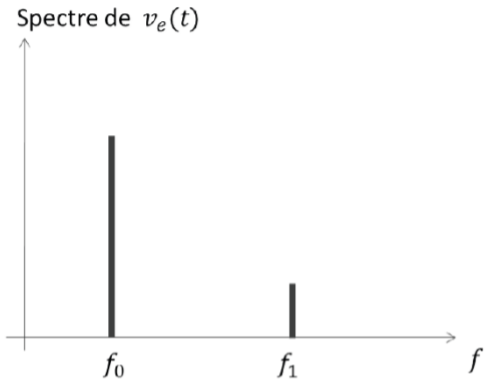


Figure 7 – Décomposition spectrale de la tension $\boldsymbol{v_e}$

Q61. Peut-on considérer le signal fourni comme sinusoïdal ? Justifier.

Q62. On donne les fréquences $f_0 = 1$ kHz et $f_1 = 10$ kHz . Comment pourrait-on améliorer la qualité de la tension v_e? Une approche pratique est attendue en précisant les valeurs caractéristiques du dispositif mis en œuvre.

Q63. L'acquisition du signal de la figure 6 a été réalisé de manière numérique. Proposez des valeurs de la fréquence d'échantillonnage f_e et du nombre de points N permettant cette acquisition.

3) Moteur Stirling :

Le projet KRUSTY, dont le nom est un hommage à KRUSTY le clown, un personnage de la série « Les Simpson », est un projet de la NASA qui vise à développer des réacteurs nucléaires pour l'exploration spatiale. Le projet a débuté en 2012 et est actuellement en phase de test. Il utilise en particulier des moteurs de Stirling. La conception d'un tel moteur et délicate en raison des gros écarts de température qu'il doit supporter et de la nécessité d'une excellente étanchéité ; son prix reste donc élevé. Par ailleurs il est difficile de faire varier son régime. Son emploi reste ainsi cantonné à des utilisations de niches : générateur d'électricité en milieu extrême, propulseur pour sous-marins. Sa réversibilité conduit à l'utiliser comme pompe à chaleur capable de refroidir à moins 200° c ou de chauffer à plus de 700° c majuscule.

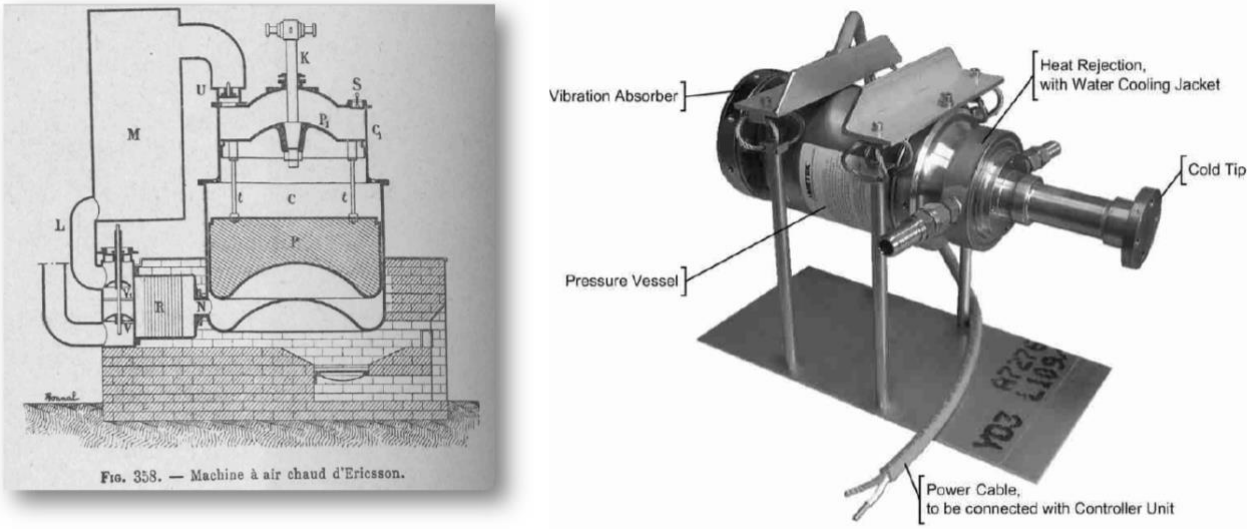


Figure 7 Gravure de 1899 d'un Moteur Ericsson M1851 avec régénérateur type Stirling (Wikipedia) et moteur Stirling de l'entreprise Sunpower fournissant le projet KRUSTY (ResearchGate)

III.A – Description du moteur

Une enceinte étanche est séparée en deux chambres, une chambre chaude (chauffée par l'extérieur), de volume maximal V_1, et une chambre froide équipée d'un dissipateur thermique (ailettes), de volume maximal V_2. Chaque chambre est dotée d'un piston permettant de faire varier son volume et le fluide peut circuler librement d'une chambre à l'autre. Le piston de la chambre froide est le piston de travail, il entraine le piston de la chambre chaude appelé « déplaceur » car son rôle est de faire circuler le fluide entre les deux chambres. Lors du transvasement, le fluide passe de la chambre chaude à la température T_3 à la chambre froide à la température $T_1 < T_3$ et réciproquement.

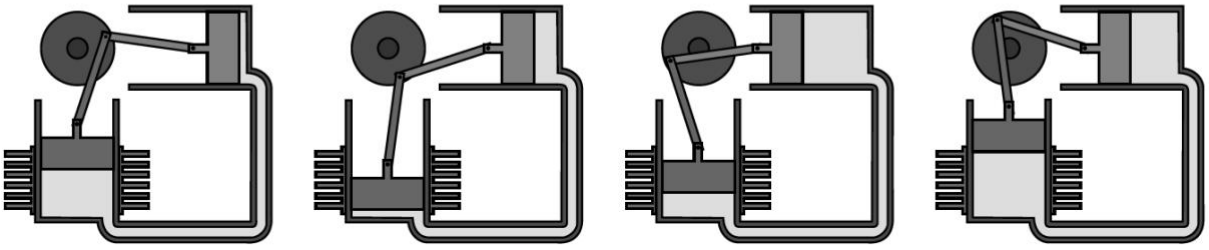


Figure 8 Phases de fonctionnement d'un moteur Stirling de type alpha (d'après Wikipedia)

Le mouvement du gaz peut être décrit par 4 phases plus ou moins distinctes (figure 8) :

— une phase de compression, pendant laquelle le volume de la chambre chaude est minimal, le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le bas ;

— une fois le piston de travail au point mort bas, le déplaceur est ramené à gauche, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe de la zone froide vers la zone chaude et reçoit un transfert thermique de la source externe ;

— une phase de détente, pendant laquelle le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail ;

— une fois que le piston de travail a atteint le point mort haut, le déplaceur est ramené à droite, ce qui a pour effet de transvaser le fluide de la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert, le fluide cède de la chaleur au refroidisseur.

Un cycle réel d'un moteur de Stirling est représenté dans le diagramme (p, V) en figure B du document réponse.

Q 30. Justifier que ce cycle est celui d'un moteur.

Q 31. Estimer la valeur du travail fourni par le moteur pendant un cycle.

III.B – Modélisation du cycle

On étudie le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci, n moles de gaz parfait de coefficient adiabatique γ subissent les transformations suivantes :

— une compression $(1 \to 2)$ isotherme réversible à la température T_1,

— un échauffement $(2 \to 3)$ isochore jusqu'à l'état 3 de température T_3,

— une détente $(3 \to 4)$ isotherme réversible à la température T_3,

— un refroidissement $(4 \to 1)$ isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression.

Q 32. Représenter sur la figure B du document réponse, à rendre avec la copie, l'allure du diagramme correspondant au cycle idéal.

On note $r = \dfrac{V_1}{V_2}$ le rapport de compression entre les volumes fixés par construction. On rappelle que la capacité thermique à volume constant d'un gaz de n moles de gaz parfait vaut $C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$ où R est la constante des gaz parfaits.

Q 33. Exprimer W_{12}, le travail reçu par le fluide au cours de la compression, en fonction de n, R, T_1 et r. En déduire le transfert thermique Q_{12} reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de n, R, T_1 et r. Préciser les signes de W_{12} et de Q_{12}.

Q 34. Exprimer Q_{23}, le transfert thermique reçu par le fluide au cours de l'échauffement isochore, en fonction de n, R, T_1, T_3 et γ. Préciser son signe.

Q 35. Exprimer W_{34}, le travail reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de n, R, T_3 et r. En déduire le transfert thermique Q_{34} reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de n, R, T_3 et r. Préciser les signes de W_{34} et Q_{34}.

Q 36. Exprimer le transfert thermique Q_{41} reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de n, R, T_1, T_3 et γ. Préciser son signe.

III.C – Rendement du moteur

Q 37. Définir puis exprimer le rendement idéal du moteur en fonction de T_1, T_3, r et γ.

Q 38. Définir et exprimer le rendement de Carnot en fonction de T_1 et T_3.

En réalité, le moteur de Stirling utilisé dans le projet KRUSTY contient un régénérateur. Dans ce cas, la chaleur perdue par le gaz lors du refroidissement isochore $(4 \to 1)$ est récupérée par le gaz lors du chauffage isochore $(2 \to 3)$. Si le régénérateur est idéal, cette récupération est totale.

Q 39. Que devient le rendement du cycle idéal dans ce cas ?

Dans les conclusions du test de la NASA du dispositif KRUSTY réalisé en 2018, les ingénieurs indiquent que l'efficacité des moteurs a évolué pendant l'expérience entre 30 % et 50 % de l'efficacité de Carnot. De plus, pour les deux moteurs combinés, la puissance électrique obtenue est d'environ 180 W.

Q 40. En prenant une température chaude de 640 °C et une température froide de 60 °C et en supposant la conversion du travail mécanique en travail électrique parfaite, estimer numériquement la puissance thermique fournie par la source chaude aux deux moteurs de Stirling combinés.

Effet Hall quantique (CCP TPC 21) : corrigé

II.1 – Modélisation sans champ magnétique

Q16. Inégalité d'Heisenberg $\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$

Q17. On part de l'inégalité d'Heisenberg : $\Delta x = l_x$ et $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$ or $\langle p_x \rangle = 0$ car il y a autant de particule allant selon $+\overrightarrow{e_x}$ et selon $-\overrightarrow{e_x}$.

Comme $E_x = \frac{p_x^2}{2m} \Rightarrow \Delta p_x = \sqrt{2m\langle E_x \rangle}$

$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow l_x\sqrt{2m\langle E_x \rangle} \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \langle E_x \rangle = E_x \geq \frac{\hbar^2}{8ml_x^2}$ Donc $\boxed{E_{xmin=} \frac{\hbar^2}{8ml_x^2}}$

Dans le cas classique, $E_{min} = E_{cmin} + V = 0$

Q18. C'est la densité de probabilité de présence. Cette densité est indépendante du temps en régime stationnaire.

Q19. Condition de normalisation $\boxed{\int_0^{l_x} |\psi_{1D}|^2 \, dx = 1}$. Conditions aux limites $\boxed{\varphi(0) = \varphi(l_x) = 0}$

Q20. La corde vibrante ($y(0) = y(L) = 0$)

Q21. Dans le puits, V(x)=0 et $\psi = \psi_{1D}(x,t) = \varphi(x) \exp\left(-i\frac{E_x}{\hbar}t\right)$

En remplaçant dans l'équation de Schrödinger : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\exp\left(-i\frac{E_x}{\hbar}t\right) = E_x\varphi(x)\exp\left(-i\frac{E_x}{\hbar}t\right)$

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{2mE_x}{\hbar^2}\varphi(x) = 0}$$

On pose $\boxed{k_x = \sqrt{\frac{2mE_x}{\hbar^2}}}$

Q22. Par analogie avec la corde vibrante, il y a quantification de λ : $l_x = \frac{m_x\lambda}{2} \Rightarrow k_x = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{m_x\pi}{l_x}$

$E_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$. On obtient $\boxed{E_x = m_x^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml_x^2}}$

Ce résultat est cohérent avec l'inégalité d'Heisenberg car pour $m_x = 1$, $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml_x^2} \geq \frac{\hbar^2}{8ml_x^2} = E_{xmin}$

Q23. Par analogie $\boxed{k_y = \frac{m_y\pi}{l_y}}$

II.2 – Modélisation en présence d'un champ magnétique

Q24. Pour $\psi(x,y) = \Omega(x)\exp(ik_y y)$,

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\exp(ik_y y) - k_y^2\Omega(x)\exp(ik_y y) \text{ et } \frac{\partial\psi}{\partial y} = ik_y\Omega(x)\exp(ik_y y)$$

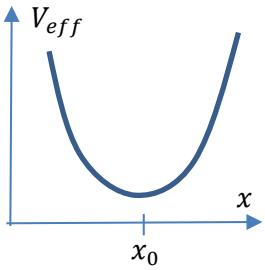
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\exp(ik_y y) - k_y^2\Omega(x)\exp(ik_y y)\right) + i\frac{\hbar eBx}{m}\left(ik_y\Omega(x)\exp(ik_y y)\right)$$

$$+\frac{e^2B^2x^2}{2m}\Omega(x)\exp(ik_y y) = E\Omega(x)\exp(ik_y y)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \left[\frac{e^2B^2x^2}{2m} + \frac{\hbar^2k_y^2}{2m} - \frac{\hbar eBxk_y}{m}\right]\Omega(x) = E\Omega(x)$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \left[\frac{m\omega_0^2x^2}{2} + \frac{m\omega_0^2x_0^2}{2} - m\omega_0^2x_0x\right]\Omega(x) = E\Omega(x)}$$

Q25. On retrouve une énergie potentielle similaire pour l'énergie potentiel élastique du système masse-ressort.



Q26. $-\frac{l_x}{2} \leq x_0 \leq \frac{l_x}{2} \Rightarrow -\frac{l_x eB}{2\hbar} \leq k_y \leq \frac{l_x eB}{2\hbar}$ donc $\boxed{k_{ymax} = \frac{l_x eB}{2\hbar}}$

Q27. $k_y = \frac{m_y \pi}{l_y} \Rightarrow \frac{m_y \pi}{l_y} \leq \frac{l_x eB}{2\hbar} \Rightarrow \boxed{m_y \leq \frac{l_x l_y eB}{h}}$

Q28. D'après Q49, il y a au max $\frac{l_x l_y eB}{h}$ niveaux d'énergie et comme sur chaque niveau d'énergie, on peut mettre 2 électrons d'état différent sur un même niveau d'énergie, on obtient donc $2\frac{l_x l_y eB}{h}$ d'état max pour un électron.

Q29. $\boxed{N_e = n_v \times volume = n_v l_x l_y b}$

Q30. $N_e \leq g \Rightarrow n_v l_x l_y b \leq 2\frac{l_x l_y eB}{h} \Leftrightarrow \boxed{B_{min} = \frac{n_v hb}{2e} \leq B}$

Q31. $N_e \leq g \times p \Rightarrow n_v l_x l_y b \leq 2\frac{l_x l_y eB}{h} p \Leftrightarrow \boxed{B_p = \frac{1}{p}\frac{n_v hb}{2e} \leq B}$

Q32. $R_H = \frac{B_P}{n_v eb} = \frac{1}{p}\frac{n_v hb}{2 e n_v eb} = \boxed{\frac{h}{e^2}\frac{1}{2p}}$

Ce modèle ne concorde pas avec le document 5 car p est pair alors que le document 5 montre que p peut prendre la valeur 3 également. Dans la littérature, il est expliqué que pour les faibles champs magnétiques, on n'observe des plateaux que pour des indices pairs car l'écart énergétique entre deux niveaux d'énergie n'est pas résolu. C'est que nous avons dans ce modèle.

Q33. A 4K, l'agitation thermique est négligeable, il y a bien remplissage des couches de plus basses énergies en premier.

Réalisation d'un oscillateur quasi-sinusoidal (CCP TSI 18) : corrigé

50. La partie amplificateur est composée de l'ALI et des résistances R_1 et R_2.
La partie filtre est l'ensemble constitué des deux résistances R et des deux condensateurs C.

51. On utilise le modèle idéal pour l'ALI, ses courants d'entrée sont donc nuls : $i_e = 0$.

52. On a $\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}.}$ (E1)

53. Loi des nœuds au point A : $\boxed{i = \frac{v_e}{R} + C\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}.}$ (E2)

54. On a $\boxed{v_s = Ri + v_c + v_e.}$ (E3)

55. On dérive E3 par rapport au temps : $\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}$.

Puis on utilise E1 : $\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} + \frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}$.

Et enfin on utilise E2 : $\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_e}{R} + C\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{C}\left(\frac{v_e}{R} + C\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}$.

On obtient donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = RC\frac{\mathrm{d}^2 v_e}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v_e,}$ ce qui s'identifie à la forme de l'énoncé en posant $\boxed{\tau = RC.}$

56. Il y a une unique rétroaction négative, donc l'ALI fonctionne en régime linéaire. On utilise le modèle idéal. On a donc $v_+ = v_-$.

Exprimons v_+ : on a $v_+ = v_e$.

Exprimons v_- : comme $i_- = 0$ (modèle idéal), on a via un diviseur de tension : $v_- = v_s \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$.

On a donc $v_e = v_s \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$, soit $\boxed{A = \dfrac{v_s}{v_e} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}.}$

57. On reprend l'équation $\dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = \tau \dfrac{\mathrm{d}^2 v_e}{\mathrm{d}t^2} + 3\dfrac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} v_e$, mais en utilisant $v_e = \dfrac{v_s}{A}$.

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\tau}{A}\dfrac{\mathrm{d}^2 v_s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{3}{A}\dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{A\tau} v_s$.

D'où finalement : $\boxed{\tau^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 v_s}{\mathrm{d}t^2} + \tau(3 - A)\dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + v_s = 0.}$

58. Pour obtenir une solution purement harmonique, il faut que $\boxed{A = 3,}$ puisqu'on retrouve alors l'équation de l'oscillateur harmonique.

La fréquence des oscillations est alors $\boxed{f_0 = \dfrac{1}{2\pi\tau}.}$

59. L'énergie nécessaire à la compensation des différentes pertes (Joule surtout) provient de l'alimentation de l'ALI.

60. Ce signal n'est pas sinusoïdal car son spectre ne comprend pas une unique harmonique, mais le fondamental et une harmonique d'amplitude significative.

61. On peut utiliser un filtre passe-bas afin de couper l'harmonique à f_1. Il faut pour cela un filtre dont la fréquence de coupure est par exemple à 2 kHz. On peut intercaler un montage suiveur entre l'oscillateur de Wien et ce filtre passe-bas afin de ne pas perturber le fonctionnement de l'oscillateur.

62. On doit observer l'harmonique de fréquence f_1 = 10 kHz. Le critère de Shannon impose donc f_{emin}=20 kHz.
On prend une marge pour avoir une bonne acquisition, soit f_e = 100 kHz.
L'acquisition montre environ 3,2 périodes du fondamental, donc la durée d'acquisition est Δt = 3,2 ms.
On doit donc utiliser N = f_e. Δt = 320 points.

1) Moteur Stirling (Centrale TSI 22) : corrigé

III.A – Description du moteur

Q30. Ce cycle est moteur car il est décrit dans le sens horaire dans le diagramme de Clapeyron (p, V).

Q31. Le travail fourni par le moteur pendant un cycle correspond à l'aire du cycle. On peut estimer cette aire graphiquement en comptant le nombre de rectangles compris dans le cycle. On trouve $W \approx 13 \times 10^5 \times 0,1.10^{-3}$ soit $\underline{W_{cycle} \approx -130 \text{ J}}$.

III.B – Modélisation du cycle

Q32. cf. D.R.

Q33. On a $\delta W = -p_{ext}\mathrm{d}V \overset{rev}{=} -p.\mathrm{d}V$ D'où :

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\mathrm{d}V \Longleftrightarrow W_{12} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \Longleftrightarrow \boxed{W_{12} = nRT_1 \ln r}$$

Comme la transformation est isotherme, $\Delta U = 0$ donc $Q = -W$ et $\boxed{Q_{12} = -nRT_1 \ln r}$. Il s'agit d'une compression donc $\underline{W_{12} > 0}$ et par conséquent $\underline{Q_{12} < 0}$.

Q34. La transformation 2→3 est isochore donc le travail est nul et $Q_{23} = \Delta U$ soit : $\boxed{Q_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_1)}$. Comme il s'agit d'un réchauffement, $T_3 > T_1$ et donc $\underline{Q_{23} > 0}$.

Q35. Par le même raisonnement qu'en Q33, on trouve : $\boxed{W_{34} = -nRT_3 \ln r}$ et $\underline{W_{34} < 0}$; $\boxed{Q_{34} = nRT_3 \ln r}$ et $\underline{Q_{34} > 0}$.

Q36. De même qu'en Q34, on trouve : $\boxed{Q_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_3)}$ avec $\underline{Q_{41} < 0}$.

Q37. On définit le rendement comme le rapport du travail du cycle sur la quantité de chaleur fournie par la source chaude. Ici, on écrit donc :

$$\eta = -\frac{W_{12} + W_{34}}{Q_{23} + Q_{34}} \Longleftrightarrow \boxed{\eta = \frac{nR \ln r(T_3 - T_1)}{\frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_1) + nRT_3 \ln r}}$$

Q38. Le rendement de Carnot est le rendement maximal qu'il est possible de fournir avec un moteur ditherme fonctionnant entre une source chaude à la température T_3 et une source froide à la température T_1. Son expression est donnée par : $\boxed{\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_3}}$.

Q39. Puisque la chaleur Q_{23} provient d'une récupération en interne, ce n'est pas une chaleur dépensée par la source chaude, par conséquent on ne doit pas la prendre en compte dans le calcul du rendement. Ce dernier s'exprime alors ainsi :

$$\eta' = -\frac{W_{12} + W_{34}}{Q_{34}} = \frac{nR \ln r(T_3 - T_1)}{nRT_3 \ln r} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = \eta_C$$

Le rendement du cycle idéal est donc égal au rendement de Carnot.

Q40. Le rendement de Carnot, dans ces conditions, vaut donc $\eta_C = 63,5\%$. Le rendement du moteur de Stirling réel vaut actuellement, d'après l'énoncé, la moitié du rendement de Carnot soit $\eta_r = 31,7\%$. On en déduit que la source chaude fournit environ $\underline{\mathcal{P}_{th} \approx 570 \text{ W}}$ aux moteurs de Stirling combinés.