OSCILLATEURS COUPLES

On obtient des oscillateurs couplés en créant une liaison entre deux oscillateurs simples. Les deux oscillateurs peuvent alors échanger de l'énergie par couplage. Le système des deux oscillateurs. Ce phénomène est très fréquent dans tous les sytèmes complexes possédant plus d'un degré de liberté.

1. Rappel sur l'oscillateur harmonique :

1.1. Régime libre :

On considère un mobile de masse m oscillant sans frottement sous l'effet de la tension du ressort de raideur K.
Le mouvement est décrit par x, écart à la position d'équilibre.
L'équation du mouvement s'écrit :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \ , \ \text{où } \omega_0^2 = \frac{K}{m}}$$

La solution est $x(t) = x_0.\cos (\omega_0 t + \varphi)$.
Les constantes x_0 et φ sont déterminées par les conditions initiales.

Conclusion : Un oscillateur à un degré de liberté possède une pulsation propre.

1.2. Régime forcé :

On suppose le régime libre nul.
L'extrémité du ressort est animée d'un mouvement $x_A = d.\cos(\omega t)$.
L'équation du mouvement s'écrit à présent:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 d.\cos(\omega t) \ , \ \text{où } \omega_0^2 = \frac{K}{m}}$$

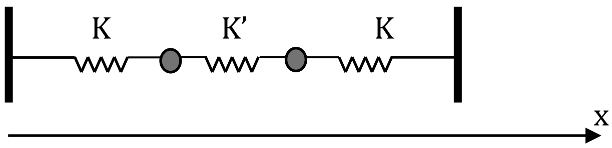
En **régime permanent**, la solution est une fonction sinusoidale de même pulsation que l'excitation ; on résoud donc en **valeurs complexes.**

On obtient : $x(t) = \dfrac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} d.\cos(\omega t)$

Conclusion :On observe une résonance d'élongation lorsque la fréquence de l'excitation est égale à la fréquence propre du système (appelé résonnateur).

2. Oscillations libres de deux mobiles couplés :

On considère le système formé de deux mobiles de même masse m , reliées entre eux par un ressort de raideur K', et reliés aux murs par deux ressorts de raideur K.
On suppose que les deux mobiles oscillent sans frottement.
Le système possède **deux degrés de liberté** : $x_1(t)$ et $x_2(t)$, élongations (écarts par rapport à la position d'équilibre des mobiles).



2.1. Equations des mouvements :

Les équations du système s'écrivent (démontrer) :

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -Kx_1 - K'(x_1 - x_2)$$
$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -Kx_2 + K'(x_1 - x_2)$$

2.2. Modes propres :

On considère les combinaisons linéaires $X = x_1 + x_2$ et $Y = x_1 - x_2$
On en déduit (calculer) :

$$X = A.\cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad \text{avec } \omega_1{}^2 = K/m.$$
$$Y = B.\cos(\omega_2 t + \phi) \text{ avec } \omega_2{}^2 = (K+2K')/m$$

Si $Y = 0$ on a $x_1 = x_2 = (A/2).\cos(\omega_1 t + \varphi)$: **mode propre symétrique.**
Si $X = 0$ on a $x_1 = - x_2 = (B/2).\cos(\omega_2 t + \phi)$: **mode propre antisymétrique.**

Dans le cas général, on a :

$$x_1(t) = (A/2).\cos(\omega_1 t + \varphi) + (B/2).\cos(\omega_2 t + \phi)$$
$$x_2(t) = (A/2).\cos(\omega_1 t + \varphi) - (B/2).\cos(\omega_2 t + \phi)$$

Les pulsations ω_1 et ω_2 sont appelés **pulsations propres** du système ; chacune d'elles correspond à un **mode propre.**

Définition : on appelle mode propre d'un système d'oscillateurs une solution des équations du mouvement où les oscillateurs vibrent à la même pulsation.

Généralisation : un système de N oscillateurs couplés possède N modes propres, donc N pulsations propres, la solution générale est une superposition de ces modes propres.

2.3. Cas d'un couplage faible : battements :

Le couplage est dit faible si $K' << K$.
On a alors $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 << \omega_2, \omega_1$
Ecrire les solutions dans le cas où $x(0) = 0$; $y(0) = a$; $x'(0) = y'(0) = 0$.

3. Oscillations forcées.

On considère le même système, l'extrémité D du ressort (3) étant animée d'un mouvement sinusoidal :

$$x_D = d.\cos(\omega t)$$

3.1. Equations du mouvement :

Elles s'écrivent à présent :

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -Kx_1 - K'(x_1 - x_2)$$
$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = +K(x_D - x_2) + K'(x_1 - x_2)$$

En **régime permanent**, les solutions du système sont des fonctions sinusoidales de même pulsation que l'excitateur ; on résoud donc en valeurs complexes.

3.2. Solutions :

$$x_1 = \frac{KK'}{\left(K + K' - m\omega^2\right)^2 - K'^2}.d\cos(\omega t).$$

$$x_2 = \frac{K\left(K' + K - m\omega^2\right)}{\left(K + K' - m\omega^2\right)^2 - K'^2}.d\cos(\omega t)$$

3.3. Résonances en élongation :

Les amplitudes de x_1 et x_2 sont maximales pour :

$\omega = \omega_1 = \sqrt{}\ K/m$ et $\omega = \omega_2 = \sqrt{}\ (K+2K')/m$

Conclusion : un système d'oscillateurs couplés entre en résonance lorsque la pulsation de l'excitateur est égale à l'une de ses pulsations propres.

Il existe une antirésonance pour la pulsation : $\omega = \sqrt{}\ (K+K')/m$; l'amplitude de x_2 est nulle, celle de x_1 minimale mais non nulle.

3.4. Effet des frottements :

Les frottements rendent les maximas finis et l'amplitude de x_2 non nulle à l'antirésonance.

OSCILLATEURS COUPLES – EXERCICES

1. Oscillateurs couplés avec frottements fluide :

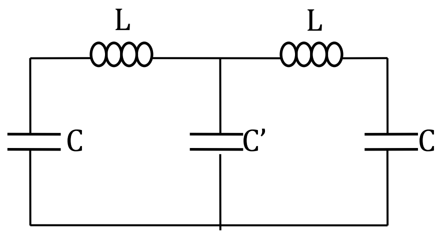
Deux masses ponctuelles identiques m se déplacent sans frottement sur un axe horizontal Ox. Elles sont reliées par deux ressorts identiques de raideur k placés en série.
Le point O commun aux deux ressorts frotte sur l'axe, la force de frottement étant proportionnelle à la vitesse V_0 du point O, -f V_0.

1) On suppose que le système tend vers un régime permanent quelles que soient les conditions initiales. Caractériser cet état.
2) Retrouver le résultat précédent en étudiant les évolutions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$, grandeurs repérant les déplacements des points M_1 et M_2.

On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $\lambda = k/f$.

2. Couplage par capacité :

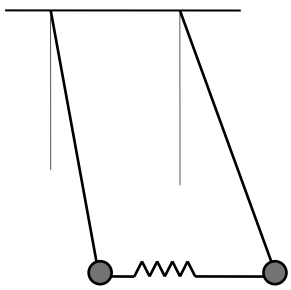
On considère le circuit ci-contre, comprenant deux circuits LC couplés par une capacité C' .



1) Ecrire le système d' équations différentielles vérifiées par i_1 et i_2.
2) En déduire les modes propres du système.

Réponse :b) $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{C'+2C}{LCC'}}$.

3. Pendules couplés élastiquement :



1) On considère un pendule simple, de longueur L et de masse M, dans le champ de pesanteur g.

Son mouvement est décrit par l'angle θ que fait le fil avec la verticale.
Montrer que l'équation des petites oscillations s'écrit :

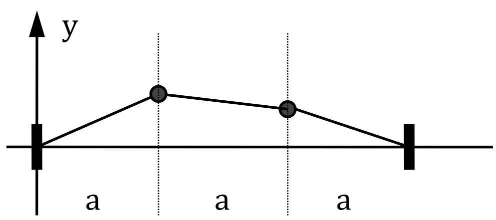
$$d^2\theta /dt^2 + \omega_0{}^2.\theta = 0.$$

Donner l'expression de ω_0 en fonction des paramètres du problème.

2) On associe deux pendules identiques au précédent grâce à un ressort de raideur K, horizontal. Leur mouvement est décrit par deux angles θ_1 et θ_2.

Ecrire les équations différentielles du système aux petites oscillations et en déduire les pulsations propres. On suppose que le ressort reste horizontal.
Réponse :b) $\omega^2{}_1 = g/L$; $\omega_2{}^2 = g/L+2K/m$.

4. Oscillations transversales de mobiles couplés :



On considère le système ci-contre, dans lequel deux mobiles de même masse m se déplacent dans le plan de figure suivant Oy, leurs déplacements restant petits.
A l'équilibre, les trois ressorts - identiques - sont horizontaux. On note y_i le déplacement du mobile i par rapport à sa position d'équilibre $y_i = 0$ et T_0 la tension des ressorts à l'équilibre.

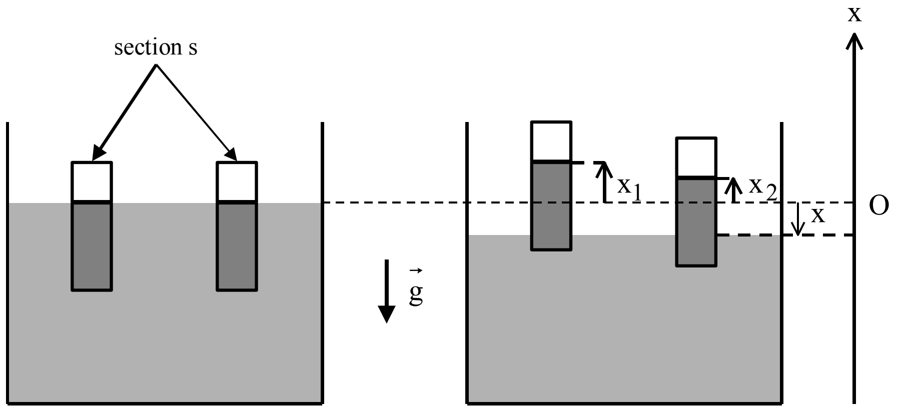
1) Montrer que la force de rappel T_y exercée par le ressort (1) sur le mobile (1) est $T_y = -T_0.y/a$.

2) Ecrire le système d'équations différentielles couplées vérifiées par y_1 et y_2.
3) Quels sont les modes propres du système ? Représenter l'état de vibration des deux mobiles pour chacun de ces modes.
4) On considère à présent 3 mobiles couplés par des ressorts, en oscillations transversales. Combien de modes propres ce système possède-t-il ?
5) Dessiner sans calcul l'état de vibration des trois mobiles pour chacun de ces modes.
6) On considère à présent N mobiles. Représenter sans calcul l'état de vibration de la chaine de mobiles pour les premiers modes propres.

Réponse :b) $\omega^2_1 = T_0/am$; $\omega_2^2 = 3T_0/am$.

5. Oscillations de deux flotteurs

Deux flotteurs cylindriques, identiques (de section s et de masse m) peuvent osciller dans l'eau d'un récipient de section S. Soit ρ la masse volumique de l'eau. Les positions des flotteurs sont repérés par leurs déplacements verticaux x_1 et x_2 par rapport à leurs positions d'équilibre respectives.



1) Déterminer le système d'équations différentielles qui définit le mouvement des deux flotteurs (on admettra que la surface libre reste horizontale et que le théorème d'Archimède reste applicable).
2) Résoudre ce système en supposant qu'à l'instant initial, les deux flotteurs sont dans leurs positions d'équilibre respectives, avec des vitesse initiales $2.v_0$ pour le premier et v_0 pour le second.