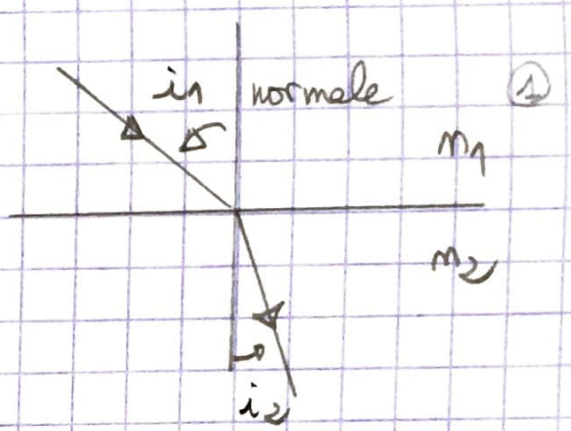
Théorie géométrique de l'arc en ciel : (40)

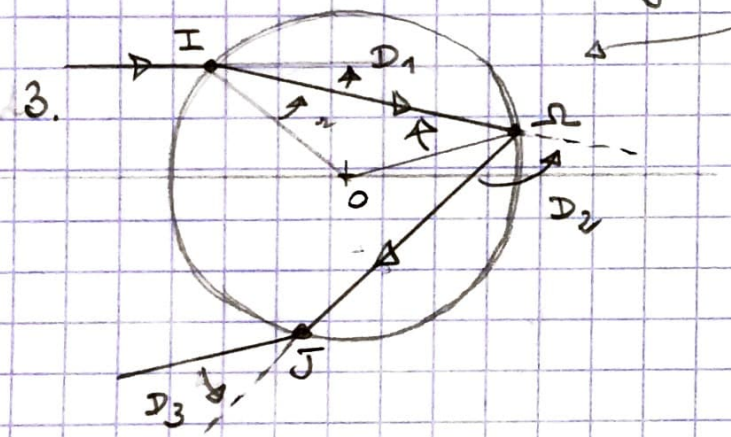
1. Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.
Les angles vérifient $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (1)



Ici $\sin i = n \cdot \sin r$.

2. On a $r = -r'$. (triangle IOR isocèle) (1).

3.

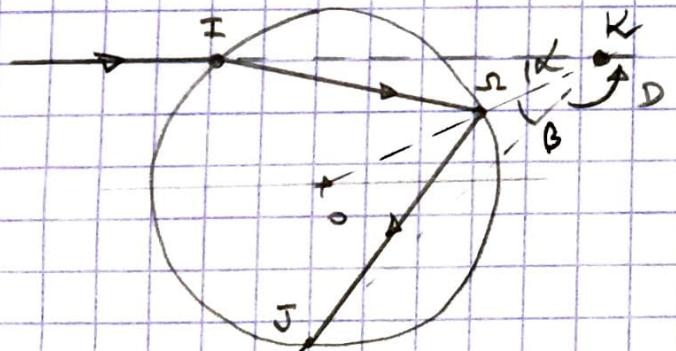


$D = D_1 + D_2 + D_3$

$= i - r + \pi - 2r + i - r$

$\underline{D = \pi + 2i - 4r}$ (2).

Autre démonstration.



$D = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - 2\alpha$ car $\alpha = \beta$

Dans le triangle IRK :

$(i - r) + (\pi - r) + \alpha = \pi \Rightarrow \alpha = 2r - i$

3. On a $b = a \sin i$ ① $\Rightarrow x = \sin i$ et $\sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{x}{n}$.

$\Rightarrow \underline{D = \pi + 2 \arcsin(x) - 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)}$ ①

4. $\frac{dD}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}} \times \frac{1}{n} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{\sqrt{n^2-x^2}}$ ①

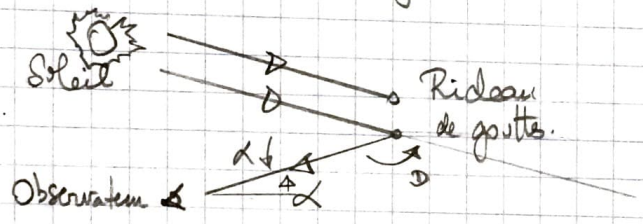
$\frac{dD}{dx} = 0 \rightsquigarrow n^2 - x^2 = 4(1-x^2) \rightsquigarrow 3x^2 = 4 - n^2 \Rightarrow \boxed{x_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}}$ ①

5. $x_m = 0,86 \rightarrow i = 59,2° \rightarrow r = 40,0° \rightarrow D_m = 138,4°$. ②
$= 1,04°$. $= 0,70$ rad

6. $x_{m_2} = 0,949 \rightarrow i_2 = 71,7° \rightarrow r_2 = 45,2° \rightarrow D_{m_2} = 128,1°$. ①

7. Les arcs sont dus à l'accumulation de lumière dans la direction D_m.
Le second est moins lumineux car de l'intensité a été perdue dans la seconde réflexion à l'intérieur de la goutte. ①

8.



②

9. L'angle de l'arc primaire par rapport à l'horizon est : $(\alpha + D + 10° = 180°)$

$\alpha = 180° - D - 10°$.

Pour l'arc primaire $\alpha_1 = 180° - 138,4 - 10 \approx 32°$ ①

secondaire $\alpha_2 = 180° - 128,1 - 10 \approx 42°$ ①

L'arc secondaire est externe. ①

10. On voit des couleurs car l'indice de l'eau dépend de la longueur d'onde, donc D en dépend. ①

Pour le violet $x_{m_v} = 0,8553 \Rightarrow D_{m_v} = 139,43°$

rouge $x_{m_r} = 0,8621 \rightarrow D_{m_r} = 137,56°$ } $\underline{\Delta D = 1,9°}$ ②

Le rouge est donc à l'extérieur. ①

16,5

Conditions d'obtention des interférences :

11. Pour du visible $\lambda \sim 500$ nm $\rightarrow \omega \simeq 2\pi \frac{c}{\lambda} \simeq 2\pi \frac{3.10^8}{5.10^{-7}} \simeq 10^{15}$ rad s^{-1} ①

12. La valeur moyenne est calculée pour la durée d'intégration du récepteur, ①
pour l'œil $\Sigma \simeq 0,1$ s — $I_1(P) = K\frac{a_1^2}{2}$; $I_2(P) = K\frac{a_2^2}{2}$ ①

13. $I(P) = \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle$ ①

$= \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2\langle s_1 s_2 \rangle$

$= I_1 + I_2 + I_{12}(P)$ 0,5

$I_{12}(P) = 2\langle a_1 a_2 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1) \cdot \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2) \rangle$

$= a_1 a_2 \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - k_1 x_1 - k_2 x_2 + \varphi_1 + \varphi_2) \rangle$

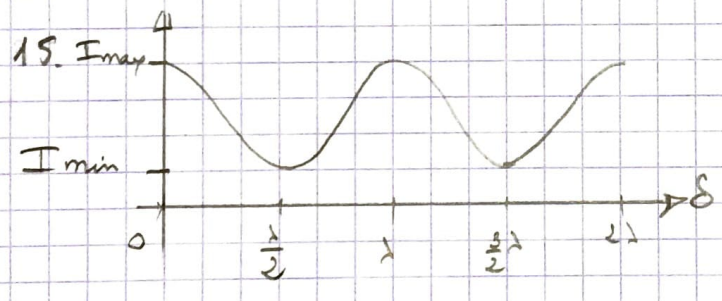
$+ a_1 a_2 \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - k_1 x_1 + k_2 x_2 + \varphi_1 - \varphi_2) \rangle$

$I_{12}(P)$ n'est non nul que si $\omega_1 = \omega_2$ et $\varphi_1 - \varphi_2 = cte$ ①

14. $I_{12}(P) = a_1 a_2 \langle \cos(k_1 x_1 - k_2 x_2) \rangle = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k_1 x_1 - k_2 x_2)$

$\delta(P) = \left(n.\frac{\omega}{c} x_1 - n.\frac{\omega}{c} x_2\right).\frac{\lambda}{2\pi} = n(x_1 - x_2)$ ②.

15.



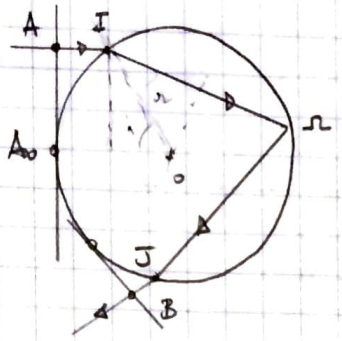
$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ ②

Théorie ondulatoire de l'arc-en-ciel :

16. Les rayons parallèles interfèrent à l'infini. ①

17. D'après le théorème de Malus les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde. ①

18. 

$(AB) = [AI] + n[I\Omega] + n[\Omega J] + [JB]$

$= 2[AI] + 2n[I\Omega]$ par symétrie. (1)

$[AI] = a - a\cos i$ (1)

$[I\Omega] = 2a\cos r$ (1)

$\Rightarrow \underline{(AB) = 2.a(1-\cos i) + 4na\cos r.}$

19. $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$

$\Rightarrow \pi - 4r_1 + 2i_1 = \pi - 4r_2 + 2i_2$

$\Rightarrow \underline{i_2 - i_1 = 2(r_2 - r_1)}$ (1)

20. On doit avoir $\delta = k\lambda$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (1).

21. On calcule $r_1 = 35,2°$; $r_2 = 44,11°$ $\Rightarrow r_2 - r_1 = 8,92°$

$\frac{1}{2}(i_2 - i_1) = 8,92°$ $\underline{\text{la propriété est vérifiée}}$ (1).

22. On a $\delta = (AB)_2 - (AB)_1 = 2.\lambda$

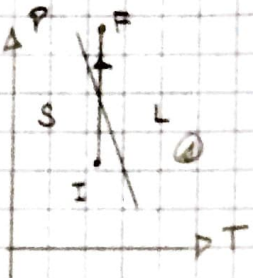
$\Rightarrow 2a(1-\cos i_2) + 4na\cos r_2 - 2a(1-\cos i_1) - 4na\cos r_1 = 2\lambda$

$\Rightarrow 2a(\cos i_2 - \cos i_1) + 4na(\cos r_2 - \cos r_1) = 2\lambda$

$\Rightarrow \underline{a = \dfrac{\lambda}{\cos i_2 - \cos i_1 + 2n(\cos r_2 - \cos r_1)} = 0,82\,mm.}$ (1)

Q32. 1 = état gazeux ; 2 = état liquide, 3 = état solide ; 4 = état fluide. ①
A = point triple, B = point critique. ①

Q33. Lorsque la pression de la glace augmente, on peut liquéfier la glace ① à T cste en franchissant la courbe d'équilibre solide liquide.



Q34. Les 3 modes de transfert thermique sont la convection, la conduction ① et le rayonnement.

Q35. $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$ ①

Q36. Le premier principe s'écrit pour le volume S dx de glace compris entre x et x+dx :

$dU = \delta Q + \delta W$ ①

$\delta W = 0$ car la glace est supposée incompressible et indilatable. ①

$dU = U(t+dt) - U(t) = dm \cdot c \left[T(t+dt) - T(t)\right] = \rho S dx\, c \frac{\partial T}{\partial t} dt$ ①

$\delta Q = j_{th}(x,t) S.dt - j_{th}(x+dx,t) S.dt = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx S dt$ ①

On en déduit : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$

Q37. Avec $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, on déduit $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ①

Q38. On considère $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ① $\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = A \Rightarrow T(x) = A.x + B$. ①

Les cond. aux limites donnent : $T(0) = T_0(t) \Rightarrow B = T_0(t)$

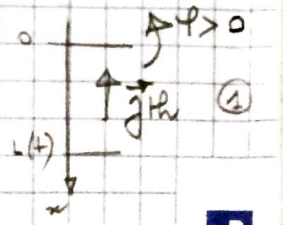
$T(L(t)) = T_E = A.L(t) + B \Rightarrow A = \frac{T_E - T_0(t)}{L(t)}$

On a donc $T(x,t) = T_0(t) + (T_E - T_0(t)) \frac{x}{L(t)}$. ①

Q39. En $x = 0$, la continuité du flux thermique s'écrit :

$+\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right)_0 . S = h\left(T_0(t) - T_A\right).S$ ①

$\hookrightarrow \quad +\lambda \frac{T_E - T_0(t)}{L(t)} = h\left(T_0(t) - T_A\right)$



$$\Rightarrow \quad L(t) = \lambda \frac{T_E - T_0(t)}{T_0(t) - T_A}$$

Q40. Pour $T_A = -10°C$, on lit à $t = 20h$ $L = 0{,}065\ m = 6{,}5\ cm$: la glace n'est pas assez épaisse. (1)

Rque : elle ne le sera jamais pour $T_A = -10°C$!

Q41. Pour une température T_A fixée, la vitesse est d'autant plus grande que la couche est fine (1), car le flux est plus grand pour une couche fine : lorsque L augmente la température de surface de la glace diminue et le flux diminue.

De même, plus T_A est faible, plus le flux est grand, donc plus la vitesse de croissance de la glace est grande. (1)

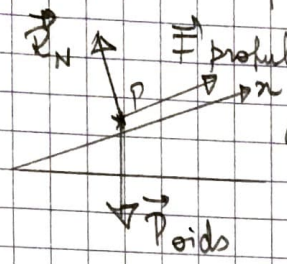
Q42. L'équation (6) ne suffit pas à résoudre le problème.

Il faut pour cela écrire la continuité du flux en $x = L(t)$, qui exprime le fait que l'énergie fluant vers la surface est due à la solidification de l'eau : on doit donc donner l'enthalpie de fusion de l'eau L_f, en $J.kg^{-1}$. (1)

Le hockey sur glace (CCP TSI 20) : $S_0 = 30$ méca + 20 thermo. CB 20/21.

Q1. On choisit le référentiel terrestre supposé galiléen pour des durées n'excédant pas l'heure, ce qui est le cas ici. ①

Q2.



$\vec{F}_{propulsion} = \vec{F}_p = F\,\vec{u}_x$ ①

Q3. $\vec{F}_p + \vec{R}_N + \vec{P} = m\vec{a} = ma\,\vec{u}_x$

En projection sur Ox :

$F - mg\sin\alpha = ma \Rightarrow \underline{F = ma + mg\sin\alpha}$ ①

Q4. $a = cste = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_f - 0}{\Delta t} = \dfrac{S_0}{0{,}5} = 100\ ms^{-2}$ ①

$\Rightarrow \underline{F} = 160.10^{-3}(100 + 10.\sin 20°) = \underline{16{,}5\ N}$ ①

Q5. Les forces sont $\vec{P}$, résistant et $\vec{R}_N$, sans effet. ①

Q6. En projection selon Ox :

$ma_x = -mg\sin\alpha \Rightarrow v_x = -g.\sin\alpha\, t + v_0$

$\Rightarrow \underline{x(t) = -\frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 + v_0 t + x_0}$ ①

Q7. $v = 0 \Leftrightarrow t_f = \dfrac{v_0}{g\sin\alpha} \Rightarrow d = x(t_f) - x(0) = -\dfrac{1}{2}g\sin\alpha\left(\dfrac{v_0}{g\sin\alpha}\right)^2 + \dfrac{v_0^2}{g\sin\alpha}$

$\underline{d = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{g\sin\alpha}}$ ①

Q8. Les forces de frottements ne sont pas conservatives. ①

Q9. $\delta W = \vec{R}_T.d\vec{M} = -f_D.\|\vec{R}_N\|\,\vec{u}_x\,dx\,\vec{u}_x$ avec $\|\vec{R}_N\| = mg$ (PFD selon Oy) ①

$\Rightarrow \underline{W = -f_D mg\,\Delta x}$ ①

Q10. Le théorème de l'énergie cinétique entre le début du mouvement et l'arrêt s'écrit $0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -f_D.mg.\Delta x$ car seule $\vec{R}_T$ travaille. ①

$\Rightarrow \underline{\Delta x} = \dfrac{v_0^2}{2.f_D g} = \dfrac{50^2}{2.0{,}05.10} = \underline{2500\ m}$ ① $= 42$ longueurs de patinoire. ①

$\frac{d}{dt}$ ... $\vec{v}_z = \dot{\theta}$ ①

Les forces appliquées sont :

- la réaction d'axe en O, dont le moment par rapport à Oz est nul car la liaison pivot est supposée parfaite. ①
- le poids appliqué en G, dont le moment s'écrit

$\vec{\mathcal{M}} = \vec{OG} \wedge M\vec{g} = h(\cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y) \wedge Mg\,\vec{u}_x = -Mgh\sin\theta\,\vec{u}_z$

$\Rightarrow \underline{\mathcal{M}_z = \vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{u}_z = -Mgh\sin\theta}$ ①

On en déduit donc $J\ddot{\theta} = -Mgh\sin\theta$.

Q12. Pour des mouvements de faible amplitude $\underline{\sin\theta \simeq \theta}$ $\rightarrow J\ddot{\theta} + Mgh\theta = 0$. ①

Q13. On reconnaît l'équ. d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgh}{J}}$ et de période $\underline{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgh}}}$. ①

Q14. $J\ddot{\theta} + Mgh\sin\theta = 0 \rightarrow J\ddot{\theta}\dot{\theta} - Mgh\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$

$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - Mgh\cos\theta\right) = 0$ ①

L'intégrale première est donc $\underline{E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - Mgh\cos\theta = cte}$.

Q15. $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ est l'énergie cinétique de la crosse, ①

$E_p = -Mgh\cos\theta$ est l'énergie potentielle de pesanteur.

$[J] = kg\,m^2$, $[\dot{\theta}] = s^{-1}$ $\rightarrow$ $\underline{[E_c] = kg\,m^2\,s^{-2} = J}$. ①

$[Mgh\cos\theta] = kg\,m\,s^{-2}\,m = J$.

Q16. Le mouvement est pendulaire, car θ est borné. ①

Q17. La trajectoire n'était pas fermée, il existe des frottements, sur l'axe ou dus à l'air, qui devraient être pris en compte. ①

Q18. On peut introduire un frottement fluide dont le moment s'écrirait $\underline{\mathcal{M}_f = -\lambda\dot{\theta}}$ ①

$\Rightarrow J\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + Mgh\sin\theta = 0$ ①

Le portrait est décrit dans le sens horaire car pour $\dot{\theta} > 0$, θ croît au cours du temps. ①