

ELECTROSTATIQUE – EXERCICES

1. Quatre charges :

On considère quatre charges dans un plan :

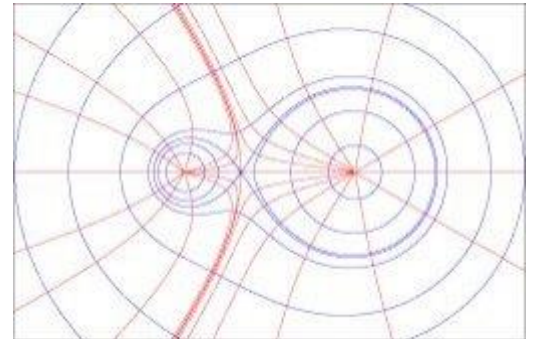
$$Q \text{ en } (1 ; 1) ; Q \text{ en } (-1 ; 1) ; -Q \text{ en } (-1 ; -1) \text{ et } -Q \text{ en } (1 ; -1).$$

- Donner les plans de symétrie et d'antisymétrie de cette distribution.
- Placer quelques vecteurs champ et esquisser les lignes de champ.
- Tracer les équipotentielles.

2. Etude d'une carte de champ :

On considère la carte de ligne de champ et d'équipotentielles ci-contre :

- Identifier les lignes de champ et les équipotentielles ;
- Identifier les points de champ nul ;
- Localiser les charges et calculer leur rapport.



3. Piège électronique :

On considère un champ électrostatique dérivant du potentiel :

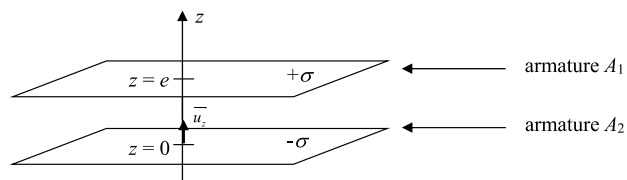
$$V(x,y,z) = -V_0 (2z^2 - x^2 - y^2) / 4d^2 \text{ avec } V_0 > 0$$

- Trouver les équipotentielles dans le plan Oxy et dans un plan quelconque passant par Oz.
- Calculer le champ E.
- Un électron est soumis à la force électrostatique exercée par ce champ. Ecrire les équations du mouvement. A quelle condition sur V_0 le mouvement axial est-il confiné dans une région limitée de l'espace ? Le mouvement transversal est-il confiné ?

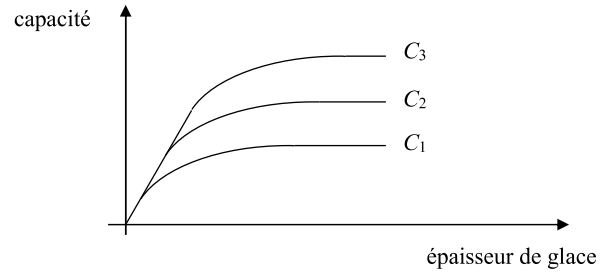
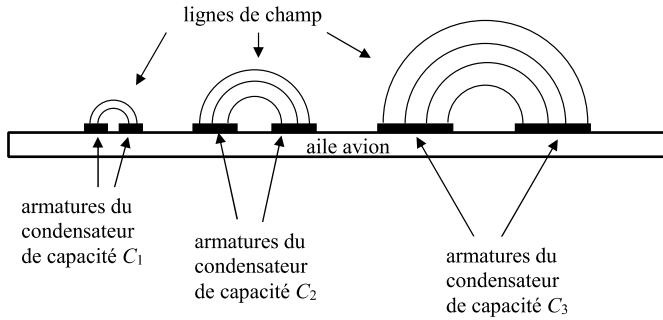
4. Mesure du givre (CCP PC 20) :

Divers accidents d'avions ont été liés à la formation de givre sur les sondes Pitot conduisant ainsi à une perte des indications de vitesse. On doit mesurer l'épaisseur de givre, ce qui peut être fait par mesure capacitive.

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures A_1 et A_2 , parallèles, de surface S , placées dans de l'air de permittivité ϵ_0 , uniformément chargées en surface et perpendiculaires à l'axe (Oz) de vecteur unitaire associé \vec{u}_z (figure). L'armature A_1 possède une densité superficielle de charges positives $+\sigma$ et l'armature A_2 une densité superficielle de charges négatives $-\sigma$. Ces armatures sont séparées d'une distance e . Les dimensions des armatures sont importantes par rapport à la distance e qui les sépare.



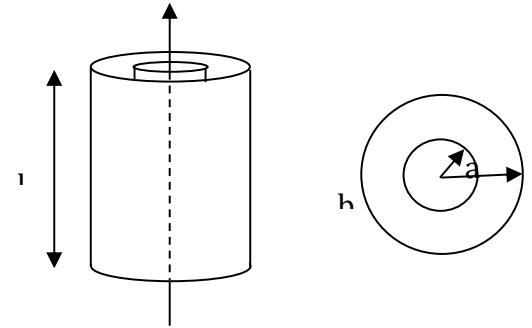
- Montrer que le champ électrique entre les armatures a pour expression : $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$.
- Déterminer l'expression de la capacité C du condensateur plan. ^[SEP] On admet que la capacité d'un condensateur plan placé dans un milieu diélectrique de permittivité relative ϵ_r est obtenue en remplaçant, dans l'expression de la capacité C obtenue à la question précédente, ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$.
- La permittivité relative de la glace est $\epsilon_r = 80$, celle de l'air est égale à 1. Il est possible de détecter la présence de glace en utilisant des jeux d'électrodes de différentes tailles et de différents espacements. En vous appuyant sur le schéma de principe de la figure ci-dessous, expliquer qualitativement le principe de cette mesure dite capacitive. Justifier la nécessité d'utiliser plusieurs capteurs de tailles différentes.



5. Capacité d'un câble coaxial :

On considère une ligne coaxiale de longueur L constituée de deux cylindres de rayons a et b, d'axe Oz et d'épaisseur négligeable, séparés par un diélectrique assimilé à du vide. On a $l \gg a, b$: la ligne peut être assimilée à une ligne infinie.

Les conducteurs portent respectivement les charges -Q et Q uniformément réparties sur les surfaces des conducteurs de rayons a et b.



a) Montrer que le champ électrique est radial et qu'il ne dépend que de r, soit $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u}_r$.

b) Etablir l'expression de E(r) en tout point de l'espace, en fonction de Q, ϵ_0, r, L .

c) Le conducteur central est porté au potentiel V_1 , et l'autre conducteur au potentiel V_2 . Exprimer la différence de potentiel $V_2 - V_1$ en fonction de Q, ϵ_0, l, a et b.

d) La capacité C du condensateur formé par les deux armatures est le quotient de Q par la différence de potentiel $V_2 - V_1$; déterminer C en fonction de ϵ_0, l, a et b. En déduire la capacité du câble par unité de longueur.

6. Supercondensateurs (E3A PC 2019) :

Les condensateurs classiques ont une autonomie électrique insuffisante pour la traction électrique (exemple : vélo électrique). Le principe de base des supercondensateurs est de réaliser une valeur élevée du rapport S/e . Les charges électriques se trouvent localisées sur des surfaces très importantes (électrodes poreuses) et à des distances très faibles (principe de la double couche électrochimique) où apparaissent les ions de l'électrolyte et les charges opposées de l'électrode.

On s'intéresse ici à une modélisation rudimentaire d'un supercondensateur.

Considérons alors le profil de densité volumique de charge $\rho(z)$ à l'intérieur du diélectrique suivante :

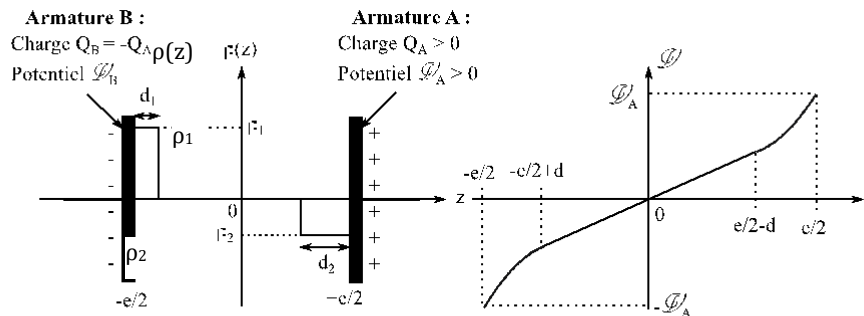


FIGURE 6—Distribution de charge à l'intérieur du diélectrique. Les charges à l'intérieur du diélectrique sont localisées sur les épaisseurs d_1 et d_2 . Graphe de la fonction $\psi = f(z)$.

1. Donner une relation entre ρ_1, ρ_2, d_1 et d_2 en la justifiant.

2. Montrer que le potentiel électrique à l'intérieur du supercondensateur satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 0$$

3. Justifier la forme linéaire ou parabolique des différentes parties du graphe du potentiel $V = f(z)$. Afin de simplifier les calculs, on considérera que $d_1 = d_2 = d$ et que $V_B = -V_A$.