Chapitre 4 : EQUATIONS LOCALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES

http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/la-physique-animee/forces-de-viscosite-pour-un-fluide-equation-de-navier-stokes

4.3.3. Équations dynamiques locales	
Équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Terme convectif. Terme diffusif. Nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.	Utiliser l'équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Évaluer en ordre de grandeur le rapport du terme convectif sur le terme diffusif et le relier au nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.
Notion d'écoulement parfait et de couche limite.	Exploiter l'absence de forces de viscosité et le caractère isentropique de l'évolution des particules de fluide. Utiliser la condition aux limites sur la composante normale du champ des vitesses.
Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.	Établir et utiliser la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.

1. Cas d'un fluide newtonien :

1.1.Equation de Navier-Stokes :

On suppose un écoulement de fluide incompressible, soumis uniquement aux forces de pression, de pesanteur et de viscosité.

On considère un élément de fluide dV de masse dm = ρ.dV dans un référentiel R galiléen.
Le théorème de la résultante dynamique appliqué à dm donne :

$$\boldsymbol{\rho.dV.\vec{a} = -\overrightarrow{grad}P.dV + \rho.dV\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}.dV}$$

On en déduit l'équation locale de Navier-Stokes :

$$\boldsymbol{\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}}$$

2.2. Nombre de Reynolds (le retour) :

On cherche à évaluer l'effet de la viscosité dans le mouvement d'un fluide ; on doit pour cela comparer le terme de viscosité au terme d'inertie (convection).

Soit L une échelle spatiale caractéristique des variations de v dans l'écoulement.

Le terme traduisant la viscosité dans l'équation de Navier-Stokes vaut, en ordre de grandeur :

$$\|\eta \Delta \vec{v}\| \approx \eta \frac{v}{L^2}$$

Le terme traduisant l'inertie est $\rho\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$; il vaut en ordre de grandeur :

$$\left\|\rho\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right\| \approx \frac{\rho v^2}{L}$$

Le nombre de Reynolds R_e traduit le rapport des deux termes.

Définition : nombre de Reynolds $R_e = \rho VL / \eta$.

Ordres de grandeur :

Manteau terrestre	10^{-20}
Glacier	10^{-11}
Spermatozoïdes dans le liquide séminal	10^{-3}
Bille dans du miel	10^{-2}
Têtard	100
Homme dans l'eau	10^5
Requin dans l'eau	10^8

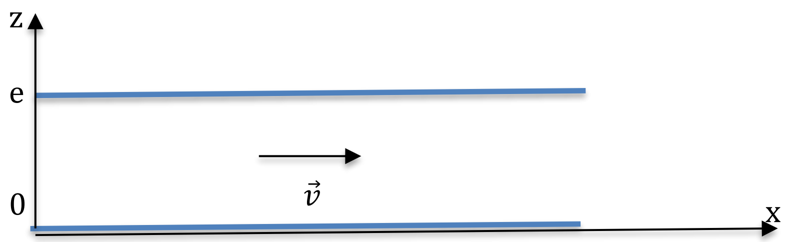
Dans un écoulement à grand nombre de Reynolds, l'inertie domine.

Dans un écoulement à petit nombre de Reynolds, la viscosité domine.

2.3. Ecoulement de Poiseuille plan :

On considère un écoulement laminaire et stationnaire de fluide visqueux dans une conduite dont les parois sont planes, parallèles et immobiles.

Un gradient de pression est nécessaire pour provoquer l'écoulement.
Remarque : l'écoulement reste laminaire jusqu'à Re = 2000 environ.



Soit $\Delta P = P(x=0) - P(x=L)$ une différence de pression responsable de l'écoulement entre deux plaques séparées d'une distance e.
L'écoulement a une largeur h >> e.
On choisit de négliger le poids devant les forces de pression appliquées.

a) Forme générale des champs des vitesses et des accélérations :

Puisque h >> e, ainsi on peut considérer que l'écoulement est invariant par translation selon Oy :

$$\vec{v} = v(x,z).\overrightarrow{u_x}$$

On considère le fluide incompressible, on a donc :

$$div\vec{v} = 0$$

On en déduit :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

La vitesse ne dépend pas de x.

On calcule :

$$(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \vec{0}$$

L'écoulement étant stationnaire :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

L'accélération particulaire est donc nulle.

b) Forces :

La force volumique de viscosité s'écrit :

$$\overrightarrow{f_{visco}} = \eta \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} \overrightarrow{u_x}$$

L'équivalent volumique des forces de pression s'écrit :

$$\overrightarrow{f_{pression}} = -\overrightarrow{grad}P$$

c) Résolution de l'équation dynamique :

L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} \right) = -\overrightarrow{grad}P + \eta \Delta \vec{v}$$

En projection :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

On déduit des deux dernières équations que la pression ne dépend que de x.

La première équation s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$$

Le premier membre n'est fonction que de x, le second n'est fonction que de z ; on a donc nécessairement :

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} = A = cte = -\frac{\Delta P}{L}$$

On en déduit ensuite :

$$\eta \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} = -\frac{\Delta P}{L}$$

Par intégration on en déduit :

$$v(z) = -\frac{\Delta P}{2\eta L} z^2 + B.z + C$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(e) = 0 \end{cases}$$

On a donc finalement :

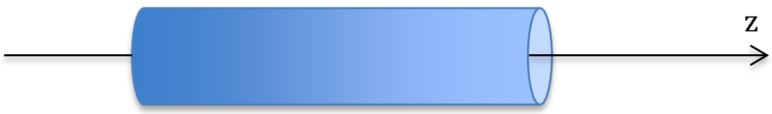
$$v(z) = \frac{\Delta P}{2\eta L} z(e - z)$$

Le débit de volume pour une largeur b de canal vaut :

$$D_v = \frac{\Delta P}{L} \frac{be^3}{12\eta}$$

2. . Ecoulement de Poiseuille cylindrique :

On considère un écoulement laminaire et stationnaire de fluide visqueux dans une conduite cylindrique de rayon R et d'axe Oz, sous l'effet d'une différence de pression.
Les coordonnées adaptées sont les cordonnées cylindriques r, θ et z.



Soit ΔP = P(z=0) – P(z=L) une différence de pression responsable de l'écoulement .
On choisit de négliger le poids devant les forces de pression appliquées.
On considère le fluide incompressible.

a) Forme générale des champs des vitesses et des accélérations :

Puisque le poids est négligé, le système présente une symétrie de révolution : l'écoulement est invariant par rotation d'angle θ :

$$\vec{v} = v(r,z).\overrightarrow{u_z}$$

On considère le fluide incompressible, on a donc :

$$div\vec{v} = 0$$

On en déduit, à l'aide d'un formulaire d'analyse vectorielle :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

La vitesse ne dépend pas de z.

On calcule :

$$(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \vec{0}$$

L'écoulement étant stationnaire :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

L'accélération particulaire est donc nulle.

b) Forces :

La force volumique de viscosité s'écrit, à l'aide d'un formulaire d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{f_{visco}} = \eta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial v(r)}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_z}$$

L'équivalent volumique des forces de pression s'écrit :

$$\overrightarrow{f_{pression}} = -\overrightarrow{grad}P$$

c) Résolution de l'équation dynamique :

L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\vec{v}$$

En projection :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial P(z)}{\partial z} + \eta\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{r.\partial v(r)}{\partial r}\right) \end{cases}$$

On déduit des deux premières équations que la pression ne dépend que de z.

La dernière équation s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r.\partial v(r)}{\partial r}\right)$$

Le premier membre n'est fonction que de z, le second n'est fonction que de r ; on a donc nécessairement :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = A = cte = -\frac{\Delta P}{L}$$

On en déduit ensuite :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r.\partial v(r)}{\partial r}\right) = -\frac{\Delta P}{L}$$

Par intégration on en déduit :

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L}r^2 + B.Ln(r) + C$$

On a un problème en r =0, car la vitesse ne peut pas diverger ; on a donc nécessairement :
B = 0

La condition aux limites s'écrit :
v(r) = 0

On a donc finalement :

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2) = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

avec :

$v_0 = \frac{\Delta P}{4\eta L} R^2$ vitesse maximale dans le tuyau.

d) Loi de Poiseuille :

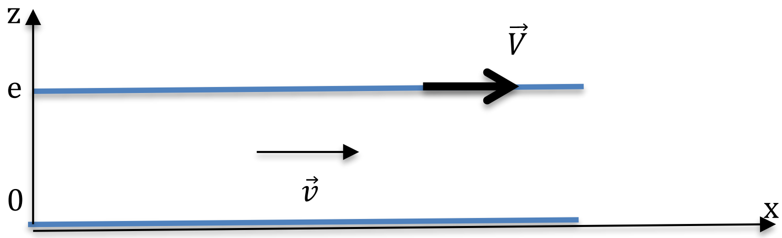
Le débit de volume à travers une section du tuyau est :

$$D_v = \frac{\Delta P}{L}\frac{\pi R^4}{8\eta}$$

Les lignes de courant et les trajectoires sont des droites parallèles à Oz.

2.5. Ecoulement de Couette plan :

Un écoulement de Couette est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois sont à des vitesses différentes.
On suppose l'écoulement stationnaire et le fluide incompressible.



Dans l'écoulement plan, la plaque à z = 0 est immobile, l'autre à z = e est animée d'une vitesse :

$$\vec{v} = v.\overrightarrow{u_x}$$

On suppose les plaques de grandes dimension selon x et y, ainsi le champ des vitesses du fluide s'écrit :

$$\vec{v} = v(z).\overrightarrow{u_x}$$

On néglige les effets de la pesanteur , ainsi que tout gradient de pression horizontal : la pression P n'est fonction que de z.

On calcule :

$$(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \vec{0}$$

L'écoulement étant stationnaire :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

L'accélération particulaire est donc nulle.

La force volumique de viscosité s'écrit :

$$\overrightarrow{f_{visco}} = \eta\left(\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{u_x} = \eta\left(\frac{d^2 v(z)}{dz^2}\right)\overrightarrow{u_x}$$

L'équivalent volumique des forces de pression s'écrit :

$$\overrightarrow{f_{pression}} = -\overrightarrow{grad}P = -\frac{\partial P}{\partial z}\,\overrightarrow{u_z}$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\vec{v}$$

En projection :

$$\begin{cases} 0 = \ 0 + \eta\left(\dfrac{d^2v(z)}{dz^2}\right) \\ 0 = \ 0 \\ 0 = -\dfrac{\partial P(z)}{\partial z} \end{cases}$$

On déduit de la dernière équation que la pression que la pression ne dépend pas non plus de z si on négligé la pesanteur.

L'équation selon x s'écrit :

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow v(z) = A.z + B$$

Avec les conditions aux limites :

$$v(0) = 0\ ;\ v(e) = V$$

On en déduit :

$$\vec{v} = V.\frac{z}{e}\overrightarrow{u_x}$$

La force exercée sur la plaque supérieure par le fluide sur une surface S de la plaque est :

$$\vec{\mathrm{F}} = -\eta.\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{z=e}\overrightarrow{u_x}.S = -\eta.\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{e}}.S.\overrightarrow{u_x}$$

La force exercée sur la plaque inférieure par le fluide sur une surface S de la plaque est :

$$\vec{\mathrm{F}} = +\eta.\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{z=e}\overrightarrow{u_x}.S = +\eta.\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{e}}.S.\overrightarrow{u_x}$$

Si m est la surface de la plaque supérieure et S sa surface, le PFD appliqué à la plaque s'écrit selon Ox :

$$\mathrm{m}.\frac{d\mathrm{V}}{dt} = -\eta.\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{z=e}.S$$

On n'est pas en régime stationnaire, donc le champ des vitesses n'est pas connue, mais en esrtimant :

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{z=e} \approx \frac{\mathrm{V(t)}}{\mathrm{e}}$$

On a :

$$\mathrm{m}.\frac{d\mathrm{V}}{dt} = -\eta.\frac{\mathrm{V(t)}}{\mathrm{e}}.S$$

Le temps caractéristique s'en déduit :

$$\tau = \frac{\mathrm{m.e}}{S.\eta}$$

2.6. Ecoulement de Couette cylindrique :

L'écoulement de Couette cylindrique est un écoulement visqueux entre deux cylindres coaxiaux d'axe Oz, l'un de ces cylindres étant animé d'une vitesse angulaire ω.

On montre que le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v} = \left(\frac{A}{r} + B.r\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

3. Couche limite :

2.1. Définition :

Dans un écoulement à grand nombre de Reynolds, les termes de viscosité ne sont à prendre en compte que dans une zone de faible épaisseur autour de l'obstacle, appelée couche limite, d'autant plus petite que Re est grand, et à l'intérieur de laquelle la vitesse varie rapidement.

L'épaisseur δ de cette couche est de l'ordre de $d = \frac{L}{\sqrt{Re}}$

L'écoulement du fluide dans cette couche peut être laminaire ou turbulent ; lors de la transition vers la turbulence (ex : Re = 2.10^5 pour une sphère) , les phénomènes de convection deviennent prépondérants dans la couche limite et la traînée chute brutalement (crise de trainée).

2.2. Décollement de la couche limite :

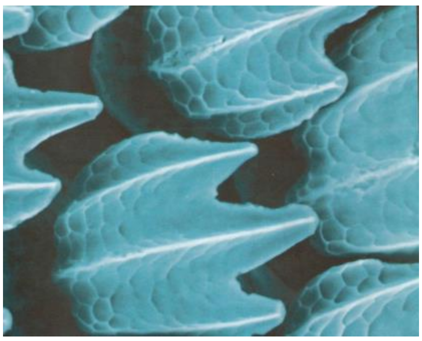
Lorsque la vitesse et le nombre de Reynolds croissent, il y a renversement local du sens de l'écoulement près de la paroi. Ce phénomène se traduit par un autre phénomène : le décollement de la couche limite.

Il apparaît alors en arrière du point de décollement une zone turbulente de grande largeur avec un sillage important ; la force de traînée augmente de façon considérable, alors que la portance (composante de la force normale au sens de l'écoulement) chute ; ce problème est crucial en aéronautique.

On observe qu'une couche limite turbulente « résiste » mieux au décollement qu'une couche limite laminaire : on peut stabiliser une couche limite en provoquant sa transition vers la turbulence grâce à un obstacle placé en amont du point de décollement, ou retarder son décollement en utilisant des volets de bords d'attaque.

2.3. Ecoulement parfait :

Un écoulement parfait est un écoulement dans lequel tous les phénomènes diffusifs, en particulier la viscosité, sont négligeables ; les particules de fluides évoluent de manière adiabatique et réversible.



4. Cas du fluide parfait :

3.1. Equation d'Euler.

On considère des écoulements parfaits, incompressibles et homogènes ; on a alors ρ = cte.

On rappelle qu'un écoulement parfait exclut les phénomènes dissipatifs : viscosité, diffusion thermique, diffusion de particules, etc. Le terme de viscosité disparaît ; l'équation de Navier-Stokes s'écrit , dans le cas ou seules des forces de pression et de pesanteur interviennent:
$\rho\left[(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right]=-\overrightarrow{grad}P+\rho\vec{g}$

Equation d'Euler

On rappelle que : $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}=\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)+(\overrightarrow{rot}\vec{v})\wedge\vec{v}$

3.2. Equation de Bernoulli.

On considère un écoulement parfait, incompressible, homogène, et stationnaire dans le seul champ de pesanteur et dans un référentiel galiléen.

Les hypothèses se traduisent par : η = 0 ; ρ = cte ; ∂/∂t = 0.

a) Cas de l'écoulement irrotationnel : $\overrightarrow{rot}\vec{v}=\vec{0}$

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho\left[(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right]=-\overrightarrow{grad}P+\rho\vec{g}$$

On a ici :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\vec{0}$$

et :

$$\rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}=\overrightarrow{grad}\left(\rho\frac{v^2}{2}\right)$$

Le poids volumique s'écrit, en orientant l'axe Oz ascendant :

$$\rho\vec{g}=-\overrightarrow{grad}(\rho gz)$$

On peut donc réécrire l'équation sous forme :

$$\overrightarrow{grad}\left(\rho\frac{v^2}{2}\right)+\overrightarrow{grad}P+\overrightarrow{grad}(\rho gz)=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{grad}\left(\rho\frac{v^2}{2}+P+\rho gz\right)=\vec{0}$$

Théorème de Bernoulli : Pour un écoulement irrotationnel, parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur la quantité $P + \rho gz + \rho v^2/2$ est constante dans tout le fluide.

Remarque : la quantité ρgz est appelée pression statique; ρv^2 est appelée pression cinétique·

b) Cas de l'écoulement rotationnel : $\overrightarrow{rot}\vec{v} \neq \vec{0}$

On a toujours :

$$(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\overrightarrow{rot}\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

En multipliant scalairement par un petit élément $d\overrightarrow{OM}$ situé le long d'une ligne de courant, donc parallèle à $\vec{v}$, on obtient :

$$[(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}].d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right).d\overrightarrow{OM} + \vec{0} = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

On a de même :

$$\overrightarrow{grad}P.d\overrightarrow{OM} = dP$$

et :

$$\overrightarrow{grad}(\rho g z).d\overrightarrow{OM} = d(\rho g z)$$

On obtient ainsi à partir de l'équation d'Euler :

$$d\left(\rho\frac{v^2}{2}\right) + dP + d(\rho g z) = 0$$

$$\Leftrightarrow d\left(\rho\frac{v^2}{2} + P + \rho g z\right) = 0$$

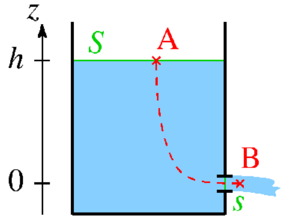
Second théorème de Bernoulli : Pour un écoulement rotationnel, parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur la quantité $P + \rho g z + \rho v^2/2$ est constante le long d'une ligne de courant.

5. Applications du théorème de Bernoulli :

4.1. Formule de Torricelli :

En supposant S >> s, on montre que :

$$v = \sqrt{2gh}$$



4.2. Effet Venturi :

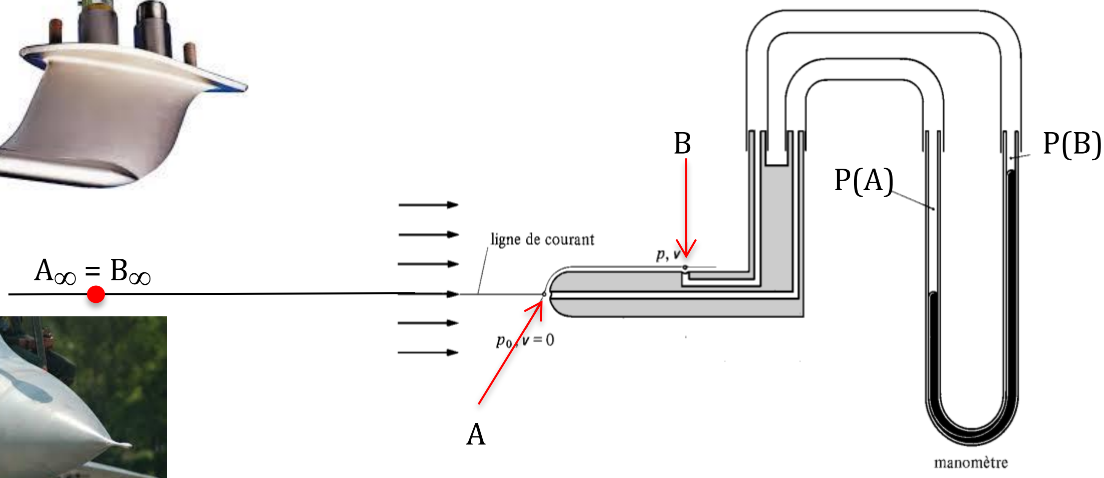
Dans un étranglement, pour un écoulement incompressible en régime stationnaire, lorsque la section diminue, la vitesse augmente et la pression diminue.

4.3. Mesures de vitesses : tube de Pitot.

a) Pression en des points remarquables :

Prise de pression axiale : au point A, appelé point d'arrêt on mesure la pression dynamique $P(A) = P(A_\infty) + \rho v^2(A_\infty) / 2$.

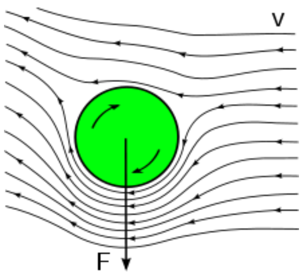
Prise de pression latérale : au point B, on mesure la pression statique :
$P(B) = P(B_\infty)$

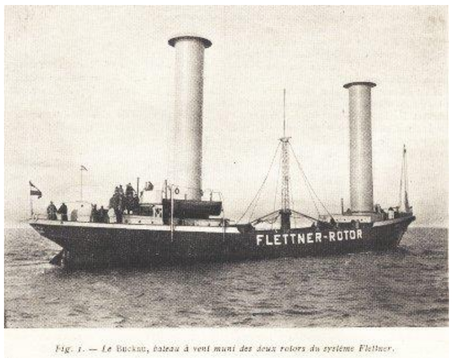


b) Mesure de vitesses :

$$P(A) - P(B) = \frac{1}{2}\rho v^2$$

4.4. Effet Magnus.





6. Paradoxe de d'Alembert.

Un mobile en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide ne subit ni trainée ni portance dans le modèle de l'écoulement parfait incompressible.
Ce résultat est naturellement contraire à toutes les expériences ; il est paradoxal.
On lève ce paradoxe grâce à la viscosité du fluide, qui intervient toujours dans la couche limite, et se traduit par des forces sur le mobile.