INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

Extrait du programme de PCSI 2021 :

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.3. Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	**Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.**
Loi de modération de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.

1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps	
Auto-induction Flux propre et inductance propre.	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur. **Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.**
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
Cas de deux bobines en interaction Inductance mutuelle entre deux bobines.	Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale ». **Mesurer la valeur de l'inductance mutuelle entre deux bobines et étudier l'influence de la géométrie.**
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
Transformateur de tension.	Établir la loi des tensions.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.
1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique. Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.	Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en citer des exemples d'utilisation. **Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.**
Conversion de puissance électrique en puissance mécanique Moteur à courant continu à entrefer plan.	Analyser le fonctionnement du moteur à courant continu à entrefer plan en s'appuyant sur la configuration des rails de Laplace. Citer des exemples d'utilisation du moteur à courant continu.

1. Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :

1.1. Nature de l'approximation :

Lorsque le temps de variation caractéristique T de $\vec{j}(\vec{r},t)$et $\rho(\vec{r},t)$, sources du champ est grand devant les temps de propagation du champ (entre le point P "source" et le point M où l'on étudie le champ), on peut négliger ce temps de propagation.
Cela se traduit par :

PM / c << T,

c étant la célérité de l'onde électromagnétique.

On admet qu'on peut alors négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère, qui s'écrit à présent :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

Les autres équations sont inchangées.

1.2. Loi de Faraday :

On a vu que l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit sous forme intégrale , pour un circuit filiforme fermé de contour orienté C :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \text{ où } \phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

Φ est le flux du champ magnétique à travers la surface S <u>ouverte</u> s'appuyant sur C et orientée en concordance avec C.

Remarque : en pratique les circuits inductifs sont des circuits bobinés constitués d'un grand nombre N de spires ; on peut confondre le flux à travers le circuit avec le flux à travers N spires fermées, donc on pourra toujours utiliser la loi de Faraday.

Le signe - de la loi de Faraday traduit **la loi de Lenz** : la fém induite tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

1.3. Equation de conservation de la charge :

On montre que l'équation de conservation de la charge s'écrit sous forme locale :

$$div\vec{j} = 0$$

Et sous forme intégale :

$$\oiint \vec{j}.d\vec{S} = 0$$

Le flux de $\vec{j}$ est conservatif ; cela traduit la loi des noeuds.

1.4. Champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

Le théorème d'Ampère est valable dans l'ARQS, ainsi les champs magnétiques créés par les courants gardent dans l'ARQS la même forme qu'en magnétostatique.

Par contre le champ électrique n'est plus à circulation conservative, car :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Le champ électrique <u>ne dérive plus d'un potentiel scalaire V</u> dans l'ARQS.

2. Cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps :

2.1. Coefficient d'inductance propre :

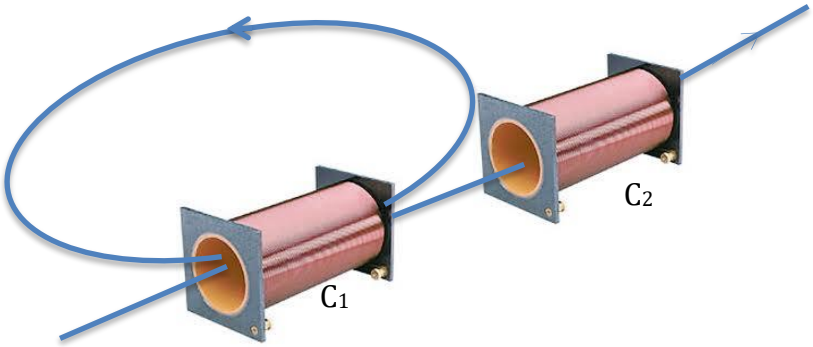
Un circuit traversé par un courant variable crée à travers lui même un flux proportionnel à i(t) appelé flux propre Φ_P ; on parle alors d'**auto-induction**.

Défintion : $L = \Phi_P / i(t)$ est le coefficient d'auto-inductance du circuit. Unité : Henry (H)

Propriété : L est toujours positif et ne dépend que de la géométrie du circuit.

2.2. Coefficients d'inductance mutuelle :

Soit deux circuits C_1 et C_2 parcourus par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, par exemple deux solénoides.



Le champ magnétique $\vec{B}_1(t)$ créé par $i_1(t)$ flue (totalement ou partiellement) à travers le circuit C_2 , créant un flux $\Phi_{1\to2}$ proportionnel à $i_1(t)$.

Définition : $M_{1\to2} = \Phi_{1\to2} / i_1(t)$ est le coefficient d'inductance mutuelle du circuit 1 dans le circuit 2.

De même le champ magnétique $\vec{B}_2(t)$ créé par $i_2(t)$ flue (totalement ou partiellement) à travers le circuit C_1, créant un flux $\Phi_{2\to1}$ proportionnel à $i_2(t)$:

Définition : $M_{2\to1} = \Phi_{2\to1} / i_2(t)$ est le coefficient d'inductance mutuelle du circuit 2 dans le circuit 1.

On a :

$$M_{2\to1} = M_{1\to2} = M \text{ (admis).} \quad \text{Unité : Henry.}$$

Remarque : M est algébrique ; son signe est lié aux orientations choisies pour C_1 et C_2 et n'a pas de signification physique.

Le flux total à travers le circuit C_1 est :

$$\Phi_1(t) = L_1\, i_1(t) + M.i_2(t)$$

Le flux total à travers le circuit C_2 est :

$$\Phi_2(t) = L_2\, i_2(t) + M.i_1(t)$$

2.3. Energie magnétique :

a) Cas d'un seul circuit :

Soit un circuit de coefficient d'inductance propre L, parcouru par un courant i(t) ; l'énergie magnétique emmagasinée dans le circuit est :

$$W_m = \frac{1}{2} L.i(t)^2$$

Cette énergie étant positive, on en déduit : L > 0.

b) Cas de deux circuits couplés par mutuelle :

Soit deux circuits C_1 et C_2 parcourus par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, de coefficients d'inductance propre L_1 et L_2, de coefficient d'inductance mutuelle M :
L'énergie magnétique stockée dans l'ensemble des deux circuits est :

$$W_m = \frac{1}{2} L_1.i_1(t)^2 + \frac{1}{2} L_2.i_2(t)^2 + M.i_1(t).i_2(t)$$

2.4. Application au transformateur :

Un transformateur est constitué de deux bobinages, l'un de n_1 spires dit primaire, l'autre de n_2 spires dit secondaire , enroulés sur un noyau de fer.

Modèle du tranformateur parfait :

- on néglige les résistances des enroulements ;
- on suppose que le flux Φ à travers une spire est identique au primaire et au secondaire.

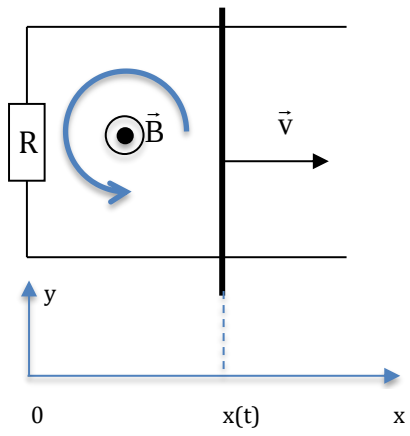
Dans ce modèle, on vérifie la loi des tensions :

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{n_2}{n_1}$$

3. Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire :

3.1. Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique : exemple du rail de Laplace :

On considère une tige d'abscisse x(t) glissant sans frottements sur deux rails parallèles, distants de b et connectés à une extrémité à une résistance R ; le circuit est horizontal, et plongé dans un champ perpendiculaire au plan des rails, uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{e_z}$.
La barre est entrainée à une vitesse $\vec{v}$.



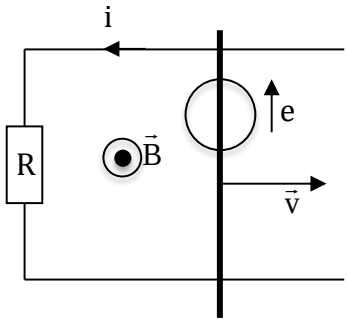
On oriente le circuit comme indiqué sur le schéma (sens direct), on a donc pour la surface du circuit $\overrightarrow{dS} = dS\vec{e_z}$.

Le flux de $\vec{B}$ est :

$$\phi = \int \vec{B}.\overrightarrow{dS} = Bx(t)b$$

La fém induite est :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -Bb\frac{dx(t)}{dt} = -Bbv$$



On modélise cette fém par un générateur orienté dans le sens du circuit, comme l'intensité.

La loi des mailles s'écrit pour le circuit :

$$e - Ri = 0$$

La puissance électrique fournie par la fém induite est :

$$P_{induite} = ei = \frac{(Bbv)^2}{R} > 0$$

La puissance des forces de Laplace sur la barre mobile est :

$$P_{Laplace} = \overrightarrow{F_L}.\vec{v} = ibBv = -\frac{(Bbv)^2}{R} < 0$$

On constate que :

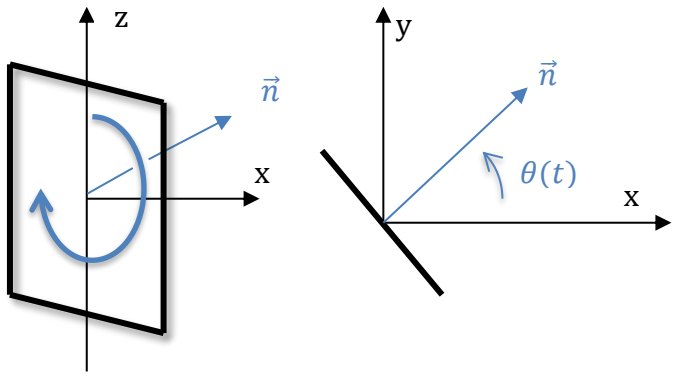
$$\boldsymbol{P_{Laplace} + P_{induite} = 0}$$

Cette égalité est générale : la conversion électro-mécanique est parfaite.

3.2. Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique : cadre en rotation dans un champ uniforme :

Ce cas modélise comme le précédent une génératrice.

On considère un cadre métallique rectangulaire vertical, entrainé en rotation autour d'un axe Oz à la vitesse angulaire ω_0. Ce cadre a une résistance R et une surface S.
Il est plongé dans un champ $\vec{B} = B\overrightarrow{e_x}$ uniforme et horizontal.
On donne une orientation au cadre, ce qui définit l'orientation de sa surface par le vecteur $\vec{n}$.
La position du cadre est repérée par l'angle $\theta(t)$ entre l'axe Ox et la normale au cadre.



Le flux de $\vec{B}$ est :

$$\phi = \int \vec{B}.\overrightarrow{dS} = BScos\theta(t)$$

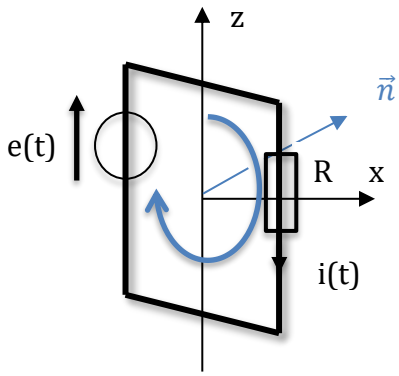
La fém induite est :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = BSsin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt} = BSsin\theta(t)\omega_0$$

On modélise cette fém par un générateur orienté dans le sens du circuit, comme l'intensité.

La loi des mailles s'écrit pour le circuit :

$$e - Ri = 0$$



La puissance électrique fournie par la fém induite est :

$$P_{induite} = ei = \frac{(BSsin\theta(t)\omega_0)^2}{R} > 0$$

La puissance des forces de Laplace sur le cadre mobile est :

$$P_{Laplace} = \vec{\Gamma_L}.\vec{\omega} = -iSBsin\theta(t)\omega_0 = -\frac{(BSsin\theta(t)\omega_0)^2}{R} < 0$$

On a encore :

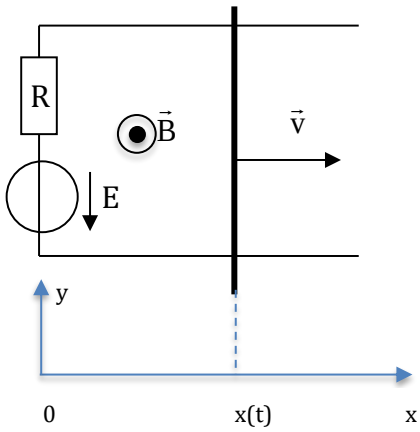
$$\boldsymbol{P_{Laplace} + P_{induite} = 0}$$

3.3. Courants de Foucault :

Les courants de Foucault sont des **courants volumiques induits** dans un matériau conducteur.
On les utilise souvent pour du freinage, exemple : freins de camion Telma.

3.4. Conversion d'énergie électrique en énergie mécanique : moteur à courant continu à entrefer plan :

On considère une tige glissant sans frottements sur deux rails parallèles, distants de b et alimenté par un générateur fournissant une fém E.
Le circuit est horizontal et possède une résistance R ; il est plongé dans un champ perpendiculaire au plan des rails, uniforme et permanent $\vec{B}$.
La barre se déplace à une vitesse $\vec{v}$.



On oriente le circuit dans le sens direct, on a donc pour la surface du circuit $\overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{e_z}$.

La fém induite est comme en 3.1 :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -Bb\frac{dx(t)}{dt} = -Bbv$$

La loi des mailles s'écrit pour le circuit :

$$e - Ri + E = 0$$

On obtient le bilan de puissance électrique en mulpliant par i :

$$Ei = Ri^2 - ei = Ri^2 + Bbvi \quad (1)$$

La barre n'est soumise dans le plan horizontal qu'à la force de Laplace, le principe fondamental projeté selon Ox s'écrit :

$$m\frac{dv}{dt} = F_L = Bbi$$

On obtient le bilan de puissance mécanique en multipliant par v :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = P_L = Bbiv \quad (2)$$

En combinant (1) et (2) :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

La puissance fournie par le générateur est convertie en effet Joule et en énergie cinétique.