

## DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX – EXERCICES

### 1. Écoulement de Poiseuille plan:

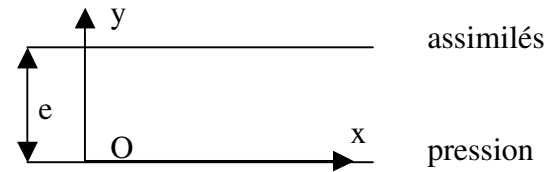
On considère une canalisation horizontale entre deux plans à des plans infinis séparés de  $e$ , dans laquelle coule un fluide visqueux, de viscosité  $\eta$ .

On néglige le poids volumique du fluide devant les forces de qu'il subit.

On recherche le champ de vitesse de l'écoulement stationnaire, qu'on suppose du type  $\vec{v} = v(y) \cdot \vec{u}_x$

Un dispositif extérieur impose une différence de pression  $\Delta P$  sur une longueur  $L$  de tuyau.

- Ecrire l'équation de Navier-Stokes et la projeter.
- En déduire que la pression ne dépend que de  $x$ , et que le gradient de pression  $dP/dx$  est constant. Quelle est sa valeur ?
- Montrer que le profil de vitesse est parabolique.
- En déduire le débit massique de fluide par unité de largeur .



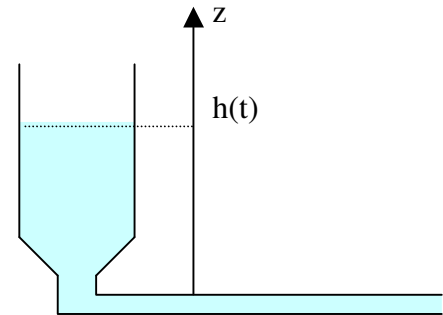
### 2. Viscosimètre à écoulement :

Un liquide visqueux considéré comme incompressible s'écoule lentement d'un récipient cylindrique de diamètre  $D$  dans un tube horizontal de diamètre  $d$  et de longueur  $L$ .

- Pourquoi peut-on considérer l'écoulement dans le récipient comme quasi-stationnaire ? En déduire l'expression du débit volumique  $D_v$  en fonction de  $h$ , en utilisant la loi de Poiseuille.
- A partir de l'équation de conservation de la masse, établir une expression différentielle satisfaite par  $h(t)$ , et la résoudre pour la condition initiale  $h(t_0) = h_0$ .
- Il faut 59 minutes pour que le niveau du liquide passe de  $h = 6$  cm à  $h = 3$  cm. Déterminer la viscosité cinématique du fluide.

Données :  $D = 4$  cm ;  $L = 50$  cm ;  $d = 1$  mm ;  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

Réponse :  $dh/dt + h/\tau = 0$  avec  $\tau = D^2 L \nu / g d^4$  ;  $\nu = 2.10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .



### 3. Etude d'une transmission :

Une surface plane (1) d'aire  $S$ , entraînée par un moteur, est en translation de vitesse constante  $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$ .

Une surface plane parallèle (2) entraîne un mécanisme qui exerce une force résistante constante :

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_x \quad \text{avec } F < 0$$

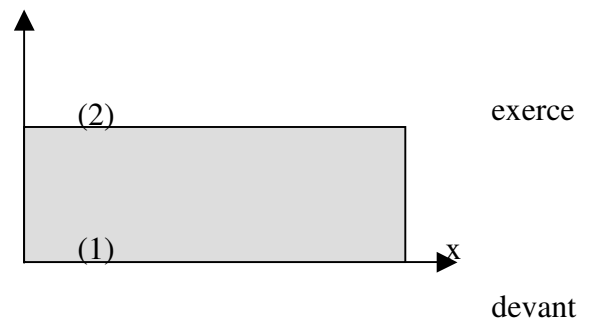
L'espace entre les deux plans est rempli par un liquide incompressible de masse volumique  $\rho$  et de viscosité  $\eta$ . Leur écartement est  $e$ . Les dimensions latérales sont très grandes

$e$ , et on admet que la vitesse ne dépend que de  $y$  et varie linéairement avec  $y$  (écoulement de « Couette plan »).

- Déterminer, en régime permanent, la vitesse  $v_2$  de la plaque (2).
- $P_1$  représentant la puissance fournie par la plaque (1) au fluide, et  $P_2$  la puissance fournie par le fluide à la plaque (2), définir et calculer le rendement énergétique de la transmission.
- Déterminer la force  $F$  pour laquelle le rendement est de 90 %.

Données :  $v = 1.3.10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $\rho = 900 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $v_1 = 10 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $F = 0.47 \text{ N}$  ;  $S = 100 \text{ cm}^2$  ;  $e = 3,6 \text{ mm}$ .

Réponses :  $F = 3,25 \text{ N}$ .



#### 4. Coulée de lave :

Une coulée de lave s'écoule par gravité sur une pente inclinée à  $\alpha = 45^\circ$ . La vitesse à la surface de la coulée est  $v_0 = 1$  mètre par heure en régime stationnaire. On néglige tout gradient de pression.

Peut-on en déduire une valeur de la viscosité cinématique de la lave ?

Epaisseur de la coulée :  $h = 2$  m.

Réponses :  $v(h) = gh^2 \sin \alpha / 2 \nu$ .

#### 5. Distribution d'eau :

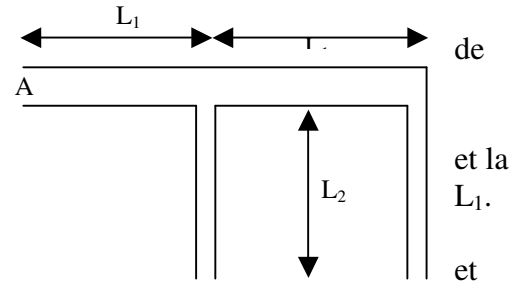
Un tuyau cylindrique, de diamètre intérieur  $d_1$  alimente deux tuyaux diamètres  $d_2$  et de longueur  $L_2$ , dont l'extrémité est à la pression atmosphérique.

Soit  $P_1$  la pression en amont ( point A ). La distance entre le point A première dérivation, ainsi que la distance entre les deux dérivation est

On considérera que le régime d'écoulement est laminaire.

En utilisant la loi de Poiseuille, faire un schéma électrique équivalent déterminer le débit de chaque tuyau.

Données :  $\Delta P = 1$  bar ;  $d_1 = 10$  mm ;  $d_2 = 4$  mm ;  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup> ;  $l_1 = l_2 = 5$  m.



#### 6. Mesure de viscosité :

On lâche une particule sphérique de rayon  $R = 1,25$  mm de masse volumique  $\rho_s = 3800$  kg.m<sup>-3</sup> dans une éprouvette graduée contenant un liquide visqueux dont on veut déterminer la viscosité  $\eta$ . La masse volumique du fluide est  $\rho_f = 1260$  kg.m<sup>-3</sup> On admet que la force de frottement visqueux sur la bille est donnée par la formule de Stokes.

- Montrer que la vitesse de la bille tend vers une vitesse limitée  $V_o$ , que l'on exprimera en fonction de  $\rho_f$ ,  $\rho_s$ ,  $R$ ,  $\eta$  et  $g$  accélération de la pesanteur (  $g = 9,8$  SI ) . Au bout de combien de temps peut-on considérer que la particule a atteint sa vitesse limite ?
- Le temps mis par la bille à parcourir les trois premiers cm est 7 s, les trois suivants de 6,1 s , les trois suivants de 6 s , les trois suivants de 6 s. Déterminer  $V_o$ . Vérifier que la formule de Stokes est applicable.
- Déterminer la viscosité du fluide.

Réponse : 1,1 Pa.s

#### 7. Etablissement de la formule de Stokes ( d'après Centrale PSI 2000 ) :

On considère un écoulement d'air ( viscosité  $\eta = 1,8.10^{-5}$  Pa.s ; masse volumique  $\rho = 1,3$  kg.m<sup>-3</sup> ) autour d'une sphère de rayon  $R = 5$   $\mu$ m.

A grande distance de la sphère, l'écoulement du fluide est uniforme  $\vec{v} = V_0 \vec{u}_z$  avec  $V_0 = 10$  m.s<sup>-1</sup> et la pression vaut  $P_0$ .

- Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Conclusion ?
- Quelles sont les conditions imposées sur le champ des vitesses par l'incompressibilité du fluide et la présence de la sphère ?
- On donne – en coordonnées sphériques - le champ des vitesses suivant :

$$\vec{v} = V_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{u}_r - V_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \vec{u}_\theta$$

Vérifier qu'il satisfait aux conditions précédentes. Caractériser cet écoulement par un ou plusieurs des mots suivants : rotationnel, irrotationnel, potentiel, stationnaire.

On admettra pour cela :  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  ;  $\text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) = -\frac{3V_0 R}{2r^3} (2 \cos \theta. \vec{u}_r + \sin \theta. \vec{u}_\theta)$  ;  $\text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) - \Delta \vec{v}$

- Ecrire l'équation de Navier-Stokes à la surface de la sphère et en déduire la valeur de la pression en tout point de cette surface.
- Calculer la résultante des forces de pression sur la sphère.

f) On admet que la contrainte de cisaillement s'écrit au voisinage de la surface :  $\vec{\sigma} = \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \vec{u}_\theta$ .

Montrer que force de cisaillement exercée par le fluide sur un élément de surface de sphère est donnée par :

$$d\vec{F}_{\text{cis}} = -\frac{3}{2} \eta V_0 R \sin^2 \theta. d\theta. d\phi. \vec{u}_\theta$$

Calculer la résultante des forces de cisaillement sur la sphère. Vérifier que la force de trainée sur la sphère est donnée par la formule de Stokes.