CHAPITRE 6 : ONDE TRANSMISE PAR UN OBJET DIFFRACTANT PLAN

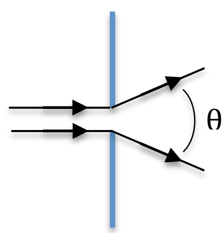
Notions et contenus	Capacités exigibles
5. Onde transmise par un objet diffractant plan éclairé par une onde plane sous incidence normale.	
Réseau unidimensionnel d'extension infinie de coefficient de transmission t(X) sinusoïdal et de pas supérieur à la longueur d'onde. Plan de Fourier.	Construire l'onde transmise par superposition de trois ondes planes définies par la condition aux limites sur le réseau. Interpréter les observations dans le plan de Fourier.
Mire unidimensionnelle d'extension latérale infinie de N traits parallèles équidistants. Fréquence spatiale.	**Relier une fréquence spatiale du spectre de la mire à la position d'un point du plan de Fourier. Relier l'amplitude de l'onde en ce point à la composante du spectre de Fourier correspondant. Interpréter les observations dans le plan de Fourier.**
Fente rectiligne de coefficient de transmission uniforme.	**Relier une fréquence spatiale du spectre de la fente à la position d'un point du plan de Fourier. Relier l'amplitude de l'onde en ce point à la composante du spectre de Fourier correspondant. Interpréter les observations dans le plan de Fourier.** Faire le lien avec la relation $\sin\theta = \lambda/a$ vue en première année.
Filtrage optique	**Utiliser l'analyse de Fourier pour interpréter les effets d'un filtrage de fréquences spatiales dans le plan de Fourier .**

1. Diffraction à l'infini :

Lorsqu'une onde de longueur d'onde λ se propage dans un milieu dont les dimensions sont d'ordre de grandeur de λ, elle peut subir de la **diffraction** : la direction de propagation est modifiée par le diaphragme rencontré.

Pour une onde se propageant selon une direction Ox, un diaphragme de dimension a dans une direction perpendiculaire à Ox provoque une diffraction dans un cône d'ouverture θ tel que :

$$\sin\theta = 2.\lambda/a.$$



Ce phénomène s'observe avec tous les types d'ondes, dès que a est comparable à λ.

2. Réseau unidimensionnel sinusoidal :

2.1. représentation complexe d'une onde plane :

On considère une onde plane monochromatique se propageant selon Oz.
Son amplitude instantanée s'écrit :

$$\underline{s}(x,y,z,t) = a_0.expj(\omega t-kz)$$

En utilisant le vecteur d'onde $\vec{k} = k.\overrightarrow{u_z}$ on peut écrire :

$$\underline{s}(x,y,z,t) = a_0.expj(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Cette forme se généralise à toute direction de propagation dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

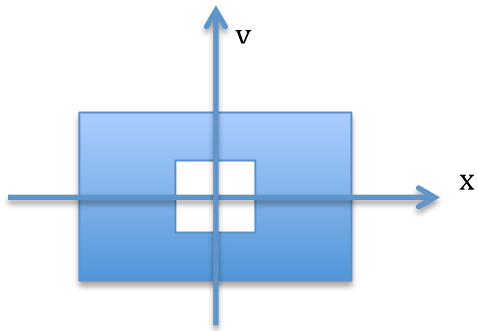
2.2. Coefficient de transmission d'un objet mince plan (ou transmittance):

L'onde plane tombe en incidence normale sur un objet diffractant mince plan situé dans le plan z = 0.

Définition : le coefficient de transmission est :

$$t(x,y) = s(x,y,0^+,t)/s(x,y,0^-,t).$$

Remarque : les transmittances considérées dans le cours de PC sont réelles ; les objets sont appelés objets d'amplitude.



Exemple : trou carré de coté a :

- t(x,y) = 1 pour $-a/2<x<a/2$ et $-a/2<y<a/2$
- t(x,y) = 0 ailleurs

2.3. Mire sinusoidale ; fréquences spatiales :

On considère une mire sinusoidale de coefficient de transmission :

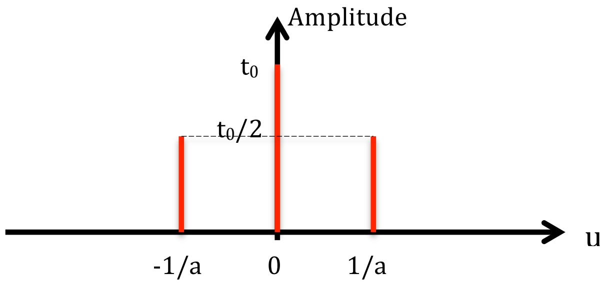
$$t(x) = t_0(1 + cos\left(2\pi\frac{x}{a}\right)) = t_0\left(1 + \frac{1}{2}expj\left(2\pi\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}expj\left(-2\pi\frac{x}{a}\right)\right)$$

La période spatiale du réseau sinusoidal est a., la fréquence spatiale fondamentale est $u_0 = 1/a$.

L'écriture complexe du coefficient de transmission montre qu'il peut être décomposé en trois fréquences spatiales :

- Une fréquence nulle d'amplitude t_0 ;
- Une fréquence 1/a d'amplitude $t_0/2$;
- Une fréquence -1/a d'amplitude $t_0/2$;

Ces composantes constituent le **spectre de Fourier complexe** de t(x).



2.4. Amplitude diffractée :

On suppose a >λ, et le réseau invariant par transation selon y, ainsi s ne dépend pas de y.

On constate **expérimentalement** l'existence de trois faisceaux diffractés, de vecteurs d'onde :

$$\overrightarrow{k_0};\ \ \overrightarrow{k_1}\ et\ \overrightarrow{k_{-1}}$$

L'onde diffractée par le réseau s'écrit donc :

$$\underline{s}(x,z,t) = A_0.expj\left(\omega t - \overrightarrow{k_0}\vec{r}\right) + A_1.expj\left(\omega t - \overrightarrow{k_1}\vec{r}\right) + A_{-1}.expj\left(\omega t - \overrightarrow{k_{-1}}\vec{r}\right)\ \ (1)$$

L'amplitude diffractée par un point du réseau en z=0+ s'écrit en notation complexe :

$$\underline{s}(x,y,0^+,t) = a_0.t(x).expj(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow s(x,0^+,t) = a_0.t_0\left(1+\frac{1}{2}expj\left(2\pi\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{2}expj\left(-2\pi\frac{x}{a}\right)+\right).expj(\omega t)\ \ (2)$$

L'amplitude est continue en z = 0+ ; on déduit donc de (1) et (2) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{u_x} = 0\ ;\ \overrightarrow{k_1}.\overrightarrow{u_x} = \dfrac{2\pi}{a}\ ;\ \overrightarrow{k_{-1}}.\overrightarrow{u_x} = -\dfrac{2\pi}{a} \\ A_0 = t_0.a_0;\ A_1 = A_{-1} = \dfrac{1}{2}t_0.a_0. \end{cases}$$

De plus , les trois ondes vérifient la même équation de dispersion dans le vide, donc :

$$\left\|\overrightarrow{k_0}\right\| = \left\|\overrightarrow{k_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{k_{-1}}\right\| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ainsi, l'onde transmise est la somme de trois ondes de vecteurs d'onde :

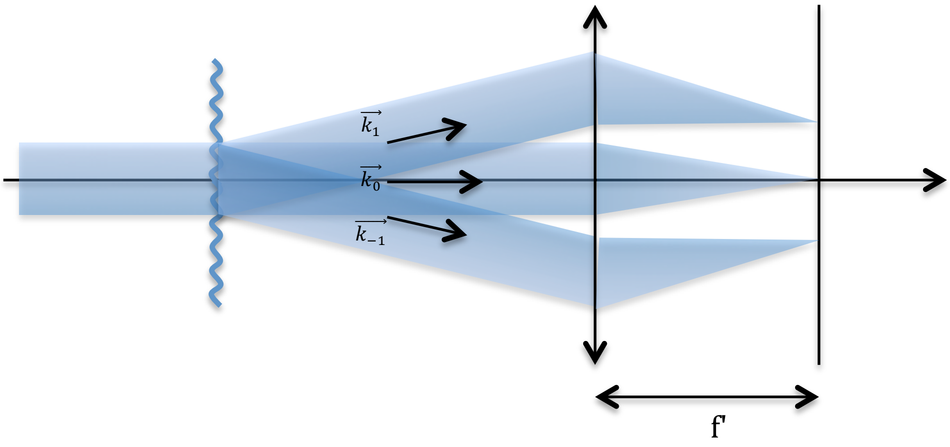
$$\overrightarrow{k_0} = \frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u_z}\ ;\ \overrightarrow{k_1} = \frac{2\pi}{a}\overrightarrow{u_x} + 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{a^2}}\overrightarrow{u_z}\ ;\ \overrightarrow{k_{-1}} = -\frac{2\pi}{a}\overrightarrow{u_x} + 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{a^2}}\overrightarrow{u_z}$$

On en déduit l'angle formé par les faisceaux diffractés :

$$\boldsymbol{sin(\theta_0) = 0\ ;\ sin(\theta_1) = \frac{\lambda}{a}\ ;\ sin(\theta_{-1}) = -\frac{\lambda}{a}}$$

2.5. Plan de Fourier :

Les ondes émergentes étant planes, on observe les images de diffraction dans le plan focal d'une lentille convergente ; ce plan est le **plan de Fourier**.



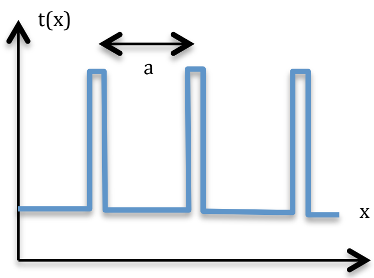
Dans le plan de Fourier on observe donc une répartition lumineuse déterminée par le spectre de Fourier complexe du coefficient de transparence t(x) :

- les directions des ondes planes correspondant aux taches sont liées aux fréquences spatiale n.u par :
  $$\sin(\theta_n) = n.\lambda.u_0 \text{ avec } n= 0, -1, \text{ ou } 1$$
- Les intensités lumineuses correspondant à ces directions sont proportionnelles au carré des composantes de la décomposition de Fourier complexe de t(x) .

3. Mire unidimensionnelle d'extension latérale infinie de N traits parallèles équidistants :

3.1. Coefficient de transmission :

L'objet diffractant est un réseau dont la transmission t(x) est :



Cet objet se décompose en une superposition de mires sinusoïdales identiques à celle qui vient d'être étudiée.

$$t(x) = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n.cos\left(2\pi n\frac{x}{a} + \varphi_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n.cos\left(2\pi n\frac{x}{a} + \varphi_n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{2}.[expj(2\pi nux + \varphi_n) + exp - j(2\pi nux + \varphi_n)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t_n}{2}.expj(2\pi nux + \varphi_n)$$

3.2. Onde diffractée :

L'onde diffractée est la somme d'ondes de vecteurs d'onde :

$$\overrightarrow{k_0} = \frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u_z}\ ;\ \overrightarrow{k_1} = \frac{2\pi}{a}\overrightarrow{u_x} + 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{a^2}}\overrightarrow{u_z}\ ;\ \overrightarrow{k_2} = \frac{2\pi}{a}\overrightarrow{u_x} - +2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2^2}{a^2}}\overrightarrow{u_z}, \ldots$$

et plus généralement :

$$\overrightarrow{k_{\mathrm{n}}} = \frac{2\pi}{a}\overrightarrow{u_x} + 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\mathrm{n}^2}{a^2}}\overrightarrow{u_z}\ ;\ \overrightarrow{k_{-\mathrm{n}}} = -\frac{2\pi}{a}\overrightarrow{u_x} + 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\mathrm{n}^2}{a^2}}\overrightarrow{u_z}$$

On constate que le nombre d'ondes diffractées est limité par la condition :

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\mathrm{n}^2}{a^2} > 0$$
$$\Leftrightarrow |n| < \frac{a}{\lambda}$$

On observe dans le plan de Fourier une répartition lumineuse centrée sur l'image géométrique (θ=0) correspondant aux différentes fréquences spatiales :

- les taches lumineuses correspondent aux directions:
  $\sin(\theta) = n\ \lambda/a = n.u_0.\lambda$
- leurs intensités lumineuses sont proportionnelles à $(t_n)^2$; elles décroissent avec n.

3.3. Application au réseau plan :

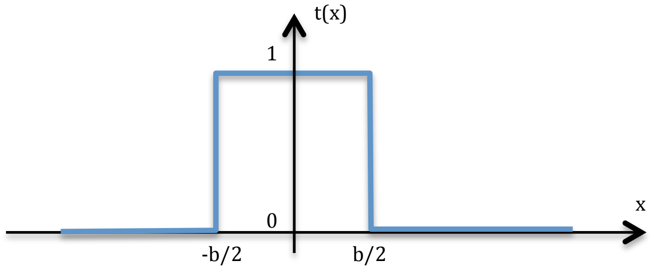
Un réseau plan par transmission est une mire unidimensionnelle composée de N traits parallèles et équidistants de pas a.
Pour une incidence normale, on observe des maximas d'éclairement dans les directions telles que :

$\sin(\theta) = n\ \lambda/a$ avec n entier relatif.

Dans le cas du réseau, par analogie avec les interférences, n est appelé **ordre.**

4. Fente rectiligne de coefficient de transmission uniforme :

L'objet diffractant est une fente de largeur b dont le coefficient de transmission t(x) est :



Cet objet peut s'interpréter comme la mire précédente dont le pas tendrait vers l'infini : la fréquence spatiale u tend alors vers zéro, et t(x) se décompose en une superposition **continue** de mires sinusoïdales :

$$t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(u).expj(2\pi ux + \varphi(u)).du$$

Remarque : cette opération s'appelle la transformée de Fourier de t(u).

Lorsque la fente est éclairée en incidence normale, on observe dans le plan de Fourier une

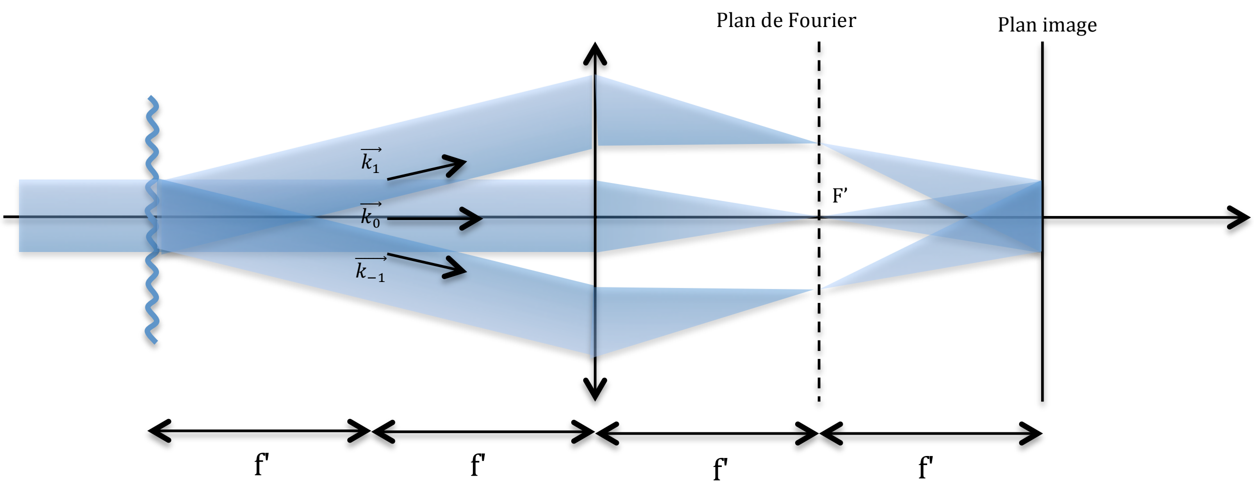
- Une fréquence spatiale u donne une tache dans la direction d'angle θ telle que :
$$\sin(\theta) = u.\lambda$$
- l'amplitude dans la direction θ est proportionnelle à t(u).

Dans le plan de Fourier on observe une tache principale de diffraction d'autant plus large que la fente est fine conformément à la relation admise en première année :
$$sin(\theta_{max}) = \lambda/b$$

5. Application au filtrage optique :

Le montage utilise une lentille convergente permettant de faire l'image géométrique de la mire diffractante sur un écran ; le spectre de Fourier est observé dans le Fourier.

Le montage suivant est appelé montage 4-f :



On place un diaphragme dans le plan de Fourier pour filtrer l'image :
- Une fente centrée en F' se comporte comme un **filtre passe-bas** et l'image sur l'écran a une intensité lumineuse uniforme.
- Un cache au point F' correspond à un **filtre passe-haut** : la fréquence spatiale u = 0 n'est plus visible.