ONDES SUR UNE CORDE – EXERCICES

1. Corde de Melde :

Lors d'une manipulation avec la corde de Melde, on obtient, pour une même longueur L de corde et une masse M accrochée à celle-ci, les résultats suivants :

- f = 18 Hz pour deux fuseaux ;
- f' = 27 Hz pour trois fuseaux ;

a) Représenter l'état de vibration de la corde dans les deux cas.
b) Ces valeurs numériques sont-elle compatibles entre elles ?
c) Quelle est la fréquence fondamentale ?
d) Quelles seraient les fréquences de résonance suivantes ?
e) La longueur de la corde est L = 117 cm. Quelle est la célérité ?

2. Réflexion sur un mur :

On considère une corde fixée à l'extrémité x = 0 sur laquelle arrive une OPPH :

$$y_i(x, t) = y_o.\cos(\omega t - kx).$$

a) La condition aux limites en x=0 est-elle vérifiée ?
b) En déduire l'existence d'une onde réfléchie et écrire sa forme générale.
c) Quelle relation impose la condition en x=0 ?
d) Calculer l'onde résultante ? Commenter.

3. Réflexion et transmission sur une discontinuité :

On considère une corde très longue, composée de deux tronçons, l'un de masse linéique μ_1, l'autre de masse linéique μ_2, reliés en x = 0.
La corde est tendue par une force de module T_0.
a) Une onde incidente $y_i(x, t) = y_0.\cos(\omega t - k_1.x)$ arrive en se propageant vers les x croissants du côté x < 0. Donner la relation entre ω et k_1 et écrire l'expression complexe $\underline{y}_i(x,t)$.
On observe l'existence d'une onde réfléchie et d'une onde transmise en x = 0.
b) Ecrire leurs expressions générales complexes à l'aide des coefficients de réflexion ρ et de transmission τ en x = 0, définis par $\rho = y_r(0, t) / y_i(0, t)$ et $\tau = y_t(0, t) / y_i(0, t)$.
c) Le vecteur tension est continu en x = 0. Quelle autre grandeur l'est ?
En déduire les expressions de ρ et τ en fonction de μ_1 et μ_2.
d) Examiner quelques cas limites.
Réponses : $r = (\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}) / (\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})$; $\tau = 1 + \rho$.

4. Guitare :

Une guitare possède six cordes de longueur 65 cm, accordées sur les notes MI 1, LA 1, RE 2, SOL 2, SI 2 et MI 3.
La corde de LA 1 a une fréquence fondamentale de 110 Hz , sa masse linéique est 5 $g.m^{-1}$.
a) Quelle est la fréquence fondamentale de la corde de MI1 ?
b) Calculer la tension T_0 de la corde de LA 1.
c) Pour que la caisse de l'instrument ne vrille pas, les six cordes sont également tendues. Quelle est la masse linéïque de la corde de Mi1 ?
d) Les frettes du manche permettent de jouer tous les demi-tons. Comment ces frettes doivent-elles être placées ?
On joue "en harmoniques" en posant le doigt sur la corde pour provoquer un noeud d'amplitude en ce point, en permettant à la longueur totale de la corde de vibrer.
e) Où doit-on poser le doigt sur la corde de MI 1 pour jouer l'harmonique de rang 2 (MI 2) ? L'harmonique de rang 4 (MI 3) ?
g) Quelle note obtient-on en jouant en harmonique au tiers de la corde de LA1 ? En déduire une méthode permettant d'accorder la guitare.

5. Impédance d'une corde :

On considère une corde de masse linéique μ et de tension T_0 ;
L'impédance caractéristique de la corde est définie par :

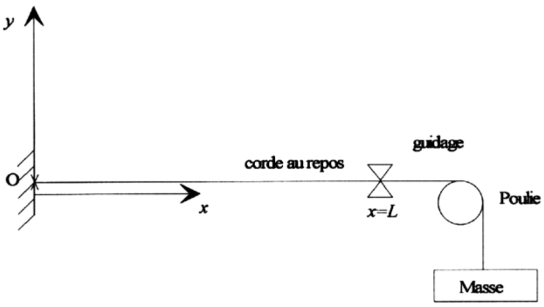
$$Z = T_y(x,t) \;/\; v_y(x,t),\; v_y(x,t) \text{ étant la vitesse vibratoire.}$$

a) Quelle est son unité ?
b) Calculer cette impédance en fonction de μ et T_0 dans le cas d'une onde progressive dans le sens des x croissants, puis dans le sens des x décroissants.

6. Modes propres d'une corde sous tension :

Une corde en acier de longueur L, masse linéique μ, fixée à ses extrémités A et B et soumise à la tension T_0, est excitée en M_0 par un petit électroaimant alimenté par un GBF dont on peut faire varier la fréquence f_0.
Le mouvement imposé en M_0 est $y\,(x_0, t) = Y_0 \sin(\omega_0 t)$.
La corde entre en mouvement si $f_0 = f_n$.
a) Exprimer l'amplitude et la phase, puis y (x,t) en un point M quelconque.
b) Décrire le mouvement d'ensemble de la corde et calculer les valeurs de f_n si $\mu = 20 g.m^{-1}$; $T_0 = 50$ N ; L = 50 cm.

7. Aspect énergétique d'une corde vibrante (*):



On considère une corde de longueur L, de tension au repos T_0, tendue par une masse par l'intermédiaire d'une poulie.
On se place dans le cas des ondes stationnaires et on considère, sauf mention contraire, le mode propre n, tel que :

$$z_n(x, t) = A_n.\sin(k_n x).\sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

a) Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un élément de corde. En déduire l'énergie cinétique de la corde entre x = 0 et x = L sous forme d'une intégrale.
b) En déduire l'énergie cinétique totale de la corde entre x = 0 et x = L sous la forme :

$$E_c = C_1.A_n^2.\cos^2(\omega_n t + \varphi_n).$$

Exprimer C_1 en fonction de n, T_0 et L.
c) Exprimer la longueur d'un élément de corde de longueur au repos dx au deuxième ordre en a, puis en fonction d'une dérivée partielle à déterminer. En déduire l'allongement de l'élément de corde.
d) En déduire l'allongement total de la corde entre x = 0 et x = L noté DL sous forme intégrale, et calculer l'allongement total de la corde entre x = 0 et x = L.
e) En considérant la variation de hauteur de la masse qui tend la corde, déduire l'expression de l'énergie potentielle de la corde sous la forme :

$$E_p = C_2.A_n^2.\sin^2(\omega_n t + \varphi_n).$$

Exprimer C_2 en fonction de n, T_0 et L .
f) Exprimer l'énergie mécanique totale de la corde sous la forme : $E_m = K_n.T_0.A_n^2$ et donner K_n en fonction de n et L.
g) La solution générale de l'équation de propagation est une combinaison linéaire des divers modes de vibration. Donner, sans démonstration, l'expression de l'énergie mécanique totale de la corde dans le cas général.
Réponses : $C_1 = C_2 = n^2p^2T_0/4L$.