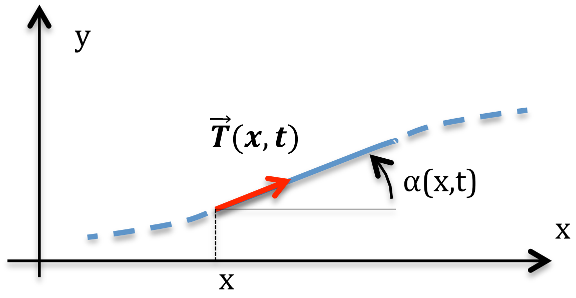
Chap 1 : PHENOMENES DE PROPAGATION UNIDIMENSIONNELS NON DISPERSIFS ; EQUATION DE D'ALEMBERT

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert	
1.1. Ondes mécaniques unidimensionnelles dans les solides déformables	
Équation d'onde pour des ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.	Établir l'équation d'onde en utilisant un système infinitésimal.
Modèle microscopique de solide élastique unidimensionnel (chaîne d'atomes élastiquement liés) : loi de Hooke. Ondes acoustiques longitudinales dans une tige solide dans l'approximation des milieux continus.	Relier la raideur des ressorts fictifs à l'énergie de liaison et évaluer l'ordre de grandeur du module d'Young. Établir l'équation d'onde en utilisant un système infinitésimal.
Équation de d'Alembert ; célérité. Exemples de solutions de l'équation de d'Alembert : - ondes progressives harmoniques - ondes stationnaires harmoniques	Reconnaître une équation de d'Alembert. Associer qualitativement la célérité d'ondes mécaniques, la raideur et l'inertie du milieu support. Différencier une onde stationnaire d'une onde progressive par la forme de leur représentation réelle. Utiliser qualitativement l'analyse de Fourier pour décrire une onde non harmonique.
Applications : - régime libre : modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités - régime forcé : résonances sur la corde de Melde.	Décrire les modes propres. En négligeant l'amortissement, associer mode propre et résonance en régime forcé.

1. Corde vibrante sous tension :

On considère une corde homogène et sans raideur de masse linéïque μ, tendue avec une tension T_0 à l'équilibre.
On néglige le poids devant sa tension.



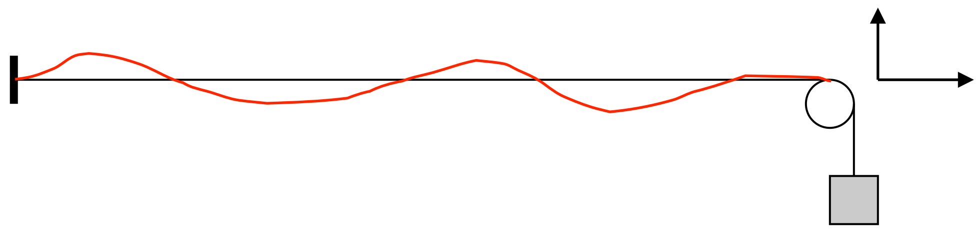
Les mouvements de la corde sont transversaux et petits ; en appelant α(x,t) l'angle entre la corde et l'horizontale, on a, à l'ordre le plus bas :

$$\cos\alpha \simeq 1 \; ; \; \sin\alpha \simeq \alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

On appelle $\vec{T}$ (x,t) la tension exercée par la partie de corde d'abscisses supérieures à x sur la partie d'abscisses inférieure à x ; on a à l'ordre le plus bas :

$$\vec{T} = \|\vec{T}\|\overrightarrow{u_x} + \|\vec{T}\|.\alpha.\overrightarrow{u_y}$$

Equilibre
Hors équilibre



On considère un petit élément de corde de longueur au repos dx ; il est soumis à deux forces :

- la tension $\vec{T}(x+dx,t)$ exercée par la partie de corde d'abcisses supérieures à x+dx ;
- la tension - $\vec{T}$ (x,t) exercée par la partie de corde d'abcisses inférieures à x.

Le mouvement se produit perpendiculairement à la direction de propagation : l'onde est **transversale**.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce petit élément de corde s'écrit :

$$\mu.dx.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}.\overrightarrow{u_y} = \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t)$$

En projection sur Ox :

$$0 = \|\vec{T}(x+dx,t)\| - \|\vec{T}(x,t)\|$$
$$\Leftrightarrow \|\vec{T}(x,t)\| = cte = T_0$$

En projection sur Oy :

$$\mu.dx.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \|\vec{T}(x+dx,t)\|.\alpha(x+dx,t) - \|\vec{T}(x,t)\|.\alpha(x,t)$$

On en déduit l'équation vérifiée par y(x,t) :

$$\mu.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

avec :

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

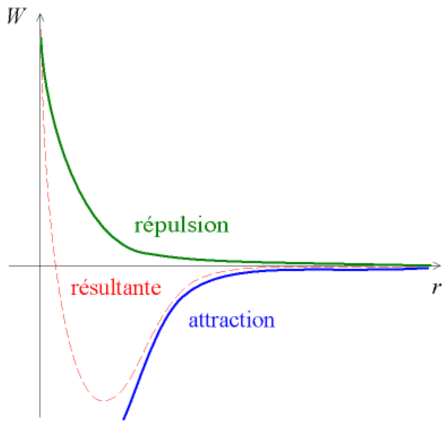
Cette équation est appelée **équation de d'Alembert** (1717-1783) ;
on remarque que s'exprime en m.s-1 : c'est une célérité.

Jean le Rond D'Alembert (1717 -1783) : mathématicien, philosophe et encyclopédiste français.

2. Onde dans un solide cristallin :

2.1. Modèle microscopique :

Dans un cristal ionique, l'énergie de liaison entre deux ions de charges opposées est attractive à longue distance et répulsive à courte distance (cf Kittel).



Elle peut être modélisée au niveau microscopique par le potentiel ci-contre.

Au voisinage de la position d'équilibre, ce potentiel peut être modélisé par un potentiel harmonique de la forme :

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2$$

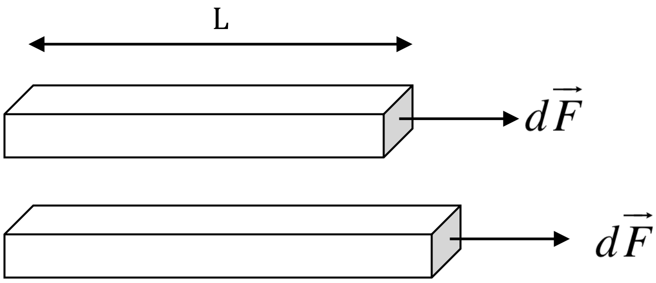
En ordre de grandeur $K \approx 10\ N.m^{-1}$.

La force microscopique qui dérive de ce potentiel harmonique est :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = -K.x.\overrightarrow{u_x}$$

2.2. Module d'Young :

Au niveau macroscopique, un barreau de cristal étiré au voisinage de sa position d'équilibre doit également répondre de manière linéaire.



Considérons une petite surface dS d'une face d'un solide de longueur L soumis à une force dF ; on constate que, pour des petites élongations (domaine élastique) l'élongation relative ΔL/L est proportionnelle à dF, soit :

$$dF = E.\frac{\Delta L}{L}.dS \quad (\text{ loi de Hooke})$$

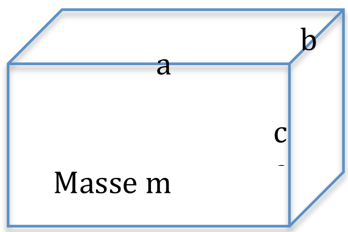
Le coefficient de proportionnalité E est le module d'Young, unité : Pa .

Ordre de grandeur : Acier E ≈ 10^{11} Pa.

2.3. Relation entre E et K :

Considérons une maille de paramètres a, b et c, et de masse m ; la masse volumique de la maille, et donc du cristal est donc :

$$\rho = m / abc.$$



Pour une section dS de solide, le nombre de chaines en parallèle est :

$$n = dS / bc.$$

Chacune de ces chaines compte L / a ressorts de raideur K, l'élongation de l'un de ces ressorts est :

$$\Delta L / (L/a) = a.\Delta L / L$$

On a donc :

$$dF = n.K.a.\Delta L / L = dS.\ K.a.\ .\Delta L / (Lbc).$$

On a donc par identification :

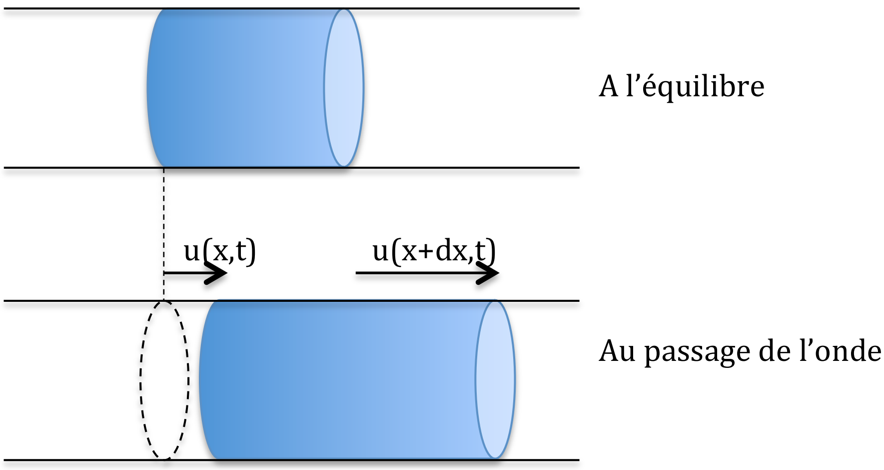
$$E = Ka /(bc)$$

Ordre de grandeur : E ≈ 10^{11} Pa.

2.4. Equation de d'Alembert :

Soit un barreau de longueur L et de section S, de module d'Young E et de masse volumique ρ.

Considérons une petite longueur dx de barreau comprise entre x et x+ dx.



L'allongement de ce petit élément est du = u(x+dx,t) – u(x,t) = $\frac{\partial u}{\partial x}.dx$

Le mouvement se produit dans la direction de propagation de l'onde : l'onde est **longitudinale**.

La force exercée par la partie à droite de ce petit élément est :

$$\vec{F}(x+dx,t) = E.S.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx}.\overrightarrow{u_x}$$

De même la force exercée par la partie à gauche de ce petit élément est :

$$\vec{F}(x,t) = -E.S.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}.\overrightarrow{u_x}$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'élement de longueur dx à l'équilibre :

$$\rho.S.dx.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\overrightarrow{u_x} = -\vec{F}(x,t) + \vec{F}(x+dx,t)$$

$$\Leftrightarrow \rho.S.dx.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\overrightarrow{u_x} = E.S.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.dx.\overrightarrow{u_x}$$

On aboutit ainsi à l'équation :

$$\boldsymbol{\rho.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

On peut l'écrire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

On retrouve une **équation de d'Alembert** à une dimension.

Exemple : fer $\rho = 7900$ kg.m^{-3} ; E = 10^{11} Pa : c ≈ 3600 m.s^{-1}.

3. Caractères généraux de l'équation de d'Alembert :

L'équation de d'Alembert à une dimension s'écrit toujours :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

C'est une équation **linéaire.**

On peut changer x en –x sans changer l'équation, donc ses solutions : le phénomène décrit par cette équation peut être décrit dans un sens ou dans l'autre de la même manière : il est **réversible spatialement**.

On peut changer t en –t sans changer l'équation, donc ses solutions : le phénomène décrit par cette équation est **réversible temporellement**.

Dans les deux cas, la constante c a la dimension d'une vitesse et est appelée **celérité de l'onde**.

Cette célérité fait intervenir un terme dynamique exprimant la raideur du milieu : T_0 ou E, comparé à un terme d'inertie : λ ou ρ.

Les solutions les plus générales de l'équation de d'Alembert à une dimension s'écrivent donc :

$$s(x, t) = f(x - ct) + g(x+ ct) ,$$

c étant la célérité des ondes.

La solution en x –c.t décrit une **onde progressive** progressant dans le sens des **x croissants** au cours du temps, avec la célérité c.
En effet, l'onde s(x-c.t) a même valeur en x à l'instant t et en x_0 à l'instant t_0 si et seulement si :

$$x - x_0 = c\,(t - t_0)\,.$$

On dit que l'onde se **propage**.

De même, la solution s (x + ct) décrit une **onde progressive** progressant dans le sens des **x décroissants** au cours du temps, avec la célérité c.

4. Onde plane progressive harmonique homogène (OPPHH) :

4 .1. Définitions :

Une onde plane progressive harmonique et homogène se propageant selon Ox est une onde de la forme :

$$u(x,t) = A_0.\cos(\omega t-kx+\phi).$$

A_0 est l'**amplitude** de l'onde, $\varphi(x,t) = \omega t-kx+\phi$ est sa **phase.**, en radians.

ω est la pulsation de l'onde, en rad.s^{-1} , liée à sa fréquence f par :

$$\omega = 2.\pi.f$$

ω et f sont des grandeurs positives.

Remarque : il est toujours possible de choisir $\phi = 0$ en changeant l'origine des temps ou des abcisses.

Remarque : l'amplitude de l'onde peut varier avec x, soit A = A(x), ce cas (OPPH non homogène) sera vu plus loin.

L'OPPHH possède une double périodicité :

- temporelle, de période : $T = 2\pi / \omega$, ;
- spatiale, de période : $\lambda = 2\pi / |k|$, appelée longueur d'onde.

L'OPPHH est un modèle, qui n'existe pas ; les ondes réelles ont toujours une extension spatiale et temporelle limitée.

Pour les approcher, il est possible de superposer (= sommer) de manière discrète ou continue des ondes de pulsations variables dans un même milieu ; la somme sera toujours une fonction de x – ct (ou x+ ct).

4.2. Relation de dispersion :

Définition : la relation de dispersion est la relation existant entre ω et k.

L'OPPHH peut aussi s'écrire :

$$u(x,t) = A_0.\cos(-k(x \pm ct) + \phi).$$

On a alors nécessairement :

$$k = \pm\frac{\omega}{c}$$

Une autre méthode pour trouver l'équation de dispersion consiste à chercher à quelle condition l'OPPHH vérifie l'équation de d'Alembert .

Définition : $\vec{k} = k.\overrightarrow{u_x}$ est le **vecteur d'onde** associé à une onde se propageant selon Ox.

La relation $\omega = k.c$ implique :

$$\lambda = c.T.$$

4.3. Forme générale de l'OPPHH :

Une OPPHH se propageant selon une direction quelconque dirigée par un vecteur unitaire $\vec{u}$ est de la forme :

$$u(\vec{r},t) = A.\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \phi)$$

avec un vecteur d'onde dirigé dans le sens de la propagation :

$$\vec{k} = k.\vec{u}$$

A t fixé, tous les points tels que $\vec{k}.\vec{r}$ =cte vibrent en phase ; ces points définissent des plans perpendiculaires à $\vec{k}$ appelés **plans d'onde**.

Définition : une onde plane est une onde dont les surfaces équiphases sont des plans.

Définition : la vitesse de phase v_φ est la vitesse de propagation des plans d'onde ; on a :

$$v_\varphi = \omega/|k|$$

4.4. Forme complexe de l'OPPHH :

La forme complexe $\underline{u}(x,t)$ de l'OPPHH est telle que :

$$u(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\,[\underline{u}(\vec{r},t)]$$

soit :

$$\underline{u}(\vec{r},t) = A.\exp j(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \phi).$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = j\omega\underline{u}\ ;\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} = -jk_x\underline{u}$$

5. Ondes planes stationnaires :

Si le milieu est infini, une onde émise en O à t = 0 se propage indéfiniment.
En général, le milieu est fini, et à ses extrémités se produisent des réflexions.

5.1. Exemple :

On considère une corde fixée à l'extrémité x = 0 sur laquelle arrive une onde incidente :

$$y_i(x, t) = A.\cos(\omega t - kx).$$

En x = 0 , on doit avoir :

$$y(0, t) = 0 \ \forall t$$

condition que ne vérifie pas l'onde incidente.

On constate qu'il existe une onde réfléchie, que l'on peut écrire de manière très générale :

$$y_r = A'.\cos(\omega' t + k'x + \phi)$$

et telle que :

$$y_{totale}(0, t) = y_i(0,t) + y_r(0,t) = 0$$

On en déduit :

$$\begin{cases} A' = -A \\ \phi = 0 \\ \omega' = \omega \\ k' = k \end{cases}$$

On calcule alors :

$$y_{tot}(x, t) = A.\cos(\omega t - kx) - A.\cos(\omega t + kx) = 2.A.\sin(\omega t).\sin(kx).$$

On remarque qu'on n'a plus de terme de propagation !

Remarque 1 : On peut définir le coefficient de réflexion en amplitude par $r = [g / f]_{x=0}$.
Ici r = - 1.

Remarque 2 : dans le cas général d'un changement de milieu en x = 0 , une partie de l'onde est transmise et une partie réfléchie ; on définit alors le coefficient de transmission en amplitude par $t = [g / h]_{x=0}$, h étant l'onde transmise.

5.2.Définition :

Définition : une onde stationnaire est une onde qui s'écrit : $u(x, t) = F(x).G(t)$.

On montre que les seules solutions acceptables physiquement sont de la forme :

$$u(x,t) = A.\cos(kx + \phi).\cos(\omega t + \varphi).$$

L'amplitude de u(x,t) est $A.\cos(kx+\phi)$.

On appelle **noeud de vibration** les points pour lesquels l'amplitude est nulle.

On appelle **ventre de vibration** les points pour lesquels l'amplitude de vibration est maximale.

La distance entre deux noeuds de vibration consécutifs est égale à $\lambda/2$, la distance entre un ventre et un noeud consécutifs est $\lambda/4$.

Nous avons vu qu'un onde stationnaire peut être considérée comme la superposition de deux ondes progressives de même amplitude se propageant en sens contraires.

De même, une onde progressive peut être considérée comme la superposition de deux ondes stationnaires de même amplitude et en quadrature.

Il est donc équivalent pour un problème donné de rechercher des solutions stationnaires ou progressives, mais :

- Lorsque le milieu est illimité, il est préférable de travailler avec des ondes progressives ;
- Lorsque le milieu est fini, il est préférable de travailler avec des ondes stationnaires.

6. Modes propres d'une corde sous tension : régime libre.

On considère une corde de longueur L fixée aux deux extrémités, sur laquelle aucune action extérieure n'est exercée : la corde oscille alors en **régime libre**.

On a alors :

$$y(x, t) = A.\cos(kx + \phi).\cos(\omega t + \varphi)$$

Les conditions aux limites imposent :

$$y(0, t) = 0 \Rightarrow \cos(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2.$$

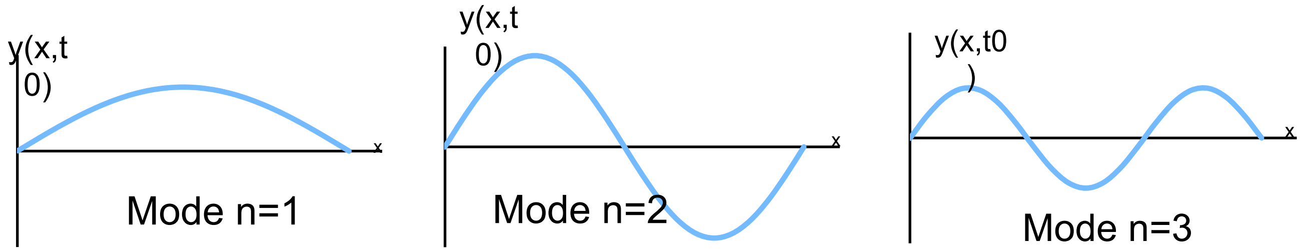
$y(L, t) = 0 \Rightarrow \cos(kL + \pi/2) = -\sin(kL) = 0$

$$\Rightarrow L = n.\pi/k = n.\lambda / 2 \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

Les différentes valeurs de n correspondent aux différents **modes propres** de la corde.

Les pulsations propres de la corde sont

$$\boldsymbol{\omega_n = \frac{n\pi c}{L}}$$



Pour n = 1, on observe le mode fondamental.
Les modes supérieurs sont appelés modes harmoniques :
le mode n = 2 correspond au premier harmonique, etc...

Le mouvement général de la corde est une superposition des différents modes propres :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\sin(k_n x).\cos(\omega_n t + \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right)$$

Les constantes A_n et φ_n sont fixées par les conditions initiales, c.à.d par la donnée de :
$y(x, 0)$ et $(\partial y/\partial t)(x, 0)$.

A t = 0 , on a en effet :

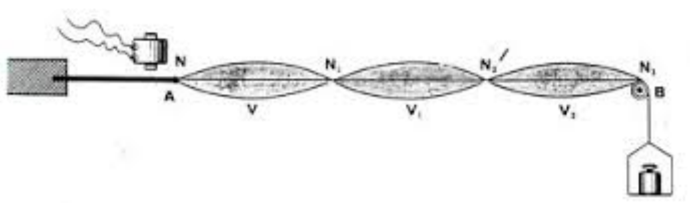
$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\sin(k_n x).\cos(\varphi_n)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n.\frac{n\pi c}{L}\sin(k_n x).\sin(\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n.\sin(k_n x)$$

On reconnait les développements en série de Fourier de deux fonctions impaires de période 2L ; la connaissance de y(x, 0) et (∂y/∂t) (x,0) sur l'intervalle [0,L] est donc suffisante pour en obtenir le développement en série de Fourier, si l'on prolonge ces fonctions en les rendant périodiques de période 2L.

7. Régime forcé : corde de Melde :

Corde de Melde (1852) : la corde de Melde est une corde dont les extrémités sont considéréres comme fixes, animée par un vibreur de pulsation ω variable.



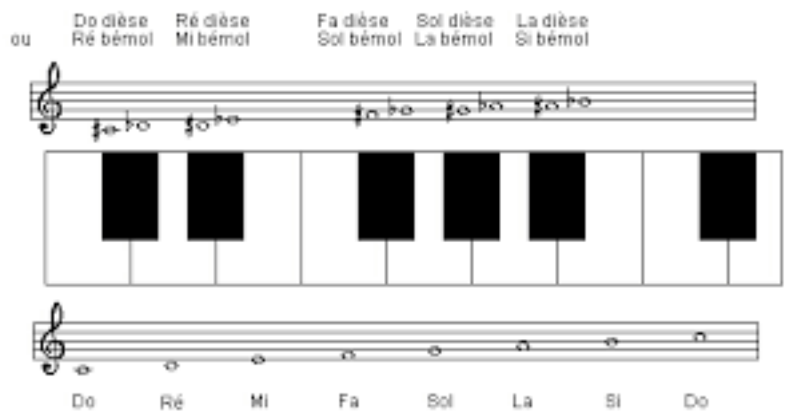
La corde entre en résonance lorsque ω est l'une des pulsations propres de la corde, soit :

$$\boldsymbol{\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

8. Notions musicales :

Une octave est l'intervalle de fréquence f, 2f.
Deux notes à l'octave sonnent de manière semblable, aussi portent-elles le même nom ; on les différencie par un numéro d'octave placé en indice.

Une octave est divisée en 12 demi-tons formée des notes succe
ssives :



DO-DO♯-RE-RE♯ (= MI♭)-MI-FA-FA♯-SOL-SOL♯-LA-LA♯ (= SI♭)-SI-DO

♯ = dièse : élève la note d'un demi-ton ;

♭ = bémol : abaisse la note d'un demi-ton.

Dans la gamme tempérée, deux demi-tons successifs ont un rapport de fréquence constant et égal à $2^{1/12}$.

La relation « nom-fréquence » nécessite une référence : le La_3 de fréquence f = 440 Hz.

Certains intervalles sonnent de manière plus harmonieuse que d'autres :

- l'octave ;
- la quinte correspondant à 7 demi-tons : exemple : do-sol $f_2 / f_1 = 2^{7/12} \approx 3/2$ (à 0,1 % près) ;
- la tierce majeure correspondant à 4 demi-tons : exemple : do-mi.

Un son musical n'est pas composé que d'une seule fréquence, mais comporte en général de nombreux harmoniques ; on le caractérise par 3 grandeurs :

- l'intensité, liée à l'amplitude des vibrations ;
- la hauteur, liée à la fréquence fondamentale du son ;
- le timbre, lié au spectre du son.