CHAPITRE 5 : SUPERPOSITION DE N ONDES COHERENTES

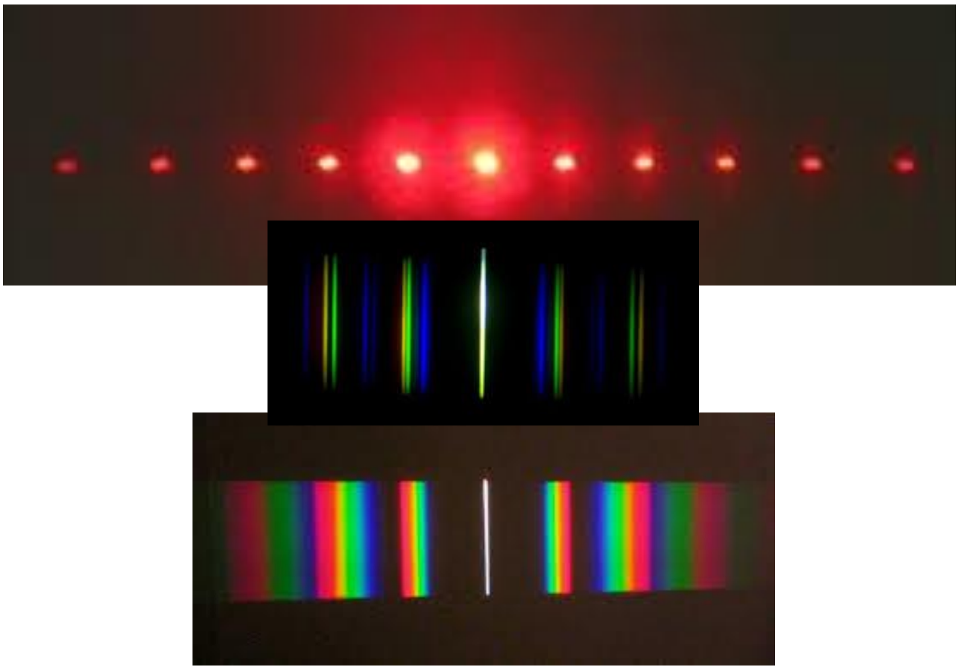
Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Superposition d'ondes lumineuses	
Superposition de N ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique dans le cas N >> 1.	Expliquer qualitativement l'influence de N sur l'intensité et la finesse des franges brillantes observées. Établir, par le calcul, la condition d'interférences constructives et la demi-largeur $2\pi/N$ des franges brillantes. Établir et utiliser la formule indiquant la direction des maxima d'intensité derrière un réseau de fentes rectilignes parallèles.

1. Expérience avec un réseau plan par transmission :

Un **réseau plan** est une structure diffractante périodique et plane ; en général un réseau est composé de traits équidistants, et peut être observé par transmission ou par réflexion.

Le réseau est caractérisé par son **pas a**, distance entre deux fentes consécutives.

Pour mettre evidence la diffraction par le réseau, on l'éclaire à l'aide d'une **onde plane**, et l'on observe « à l'infini » dans une direction θ.

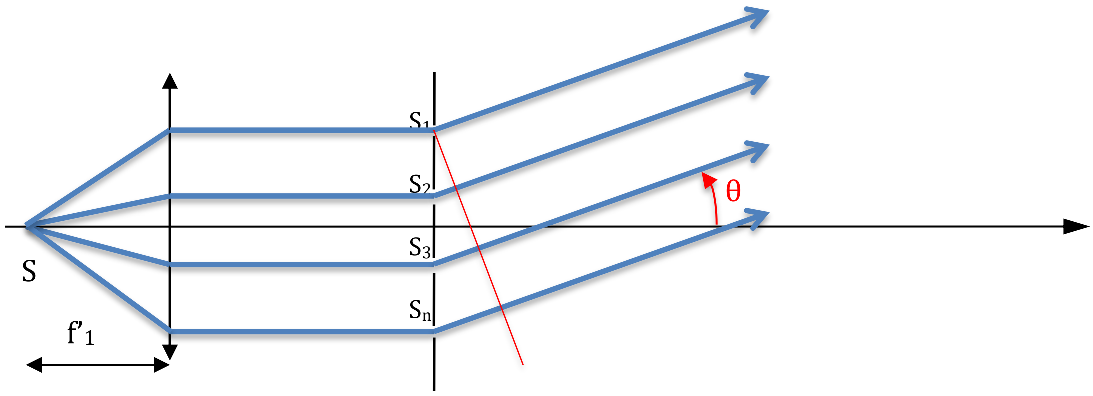


Spectres spatiaux observés en incidence normale avec :

- Un laser ;
- Une lampe à vapeur de mercure ;
- Une lampe blanche.

2. Modélisation par un ensemble de N trous alignés équidistants :

2.1. Incidence normale :



Le déphasage, dans une direction caractérisée par θ, entre les rayons i+1 et i vaut :

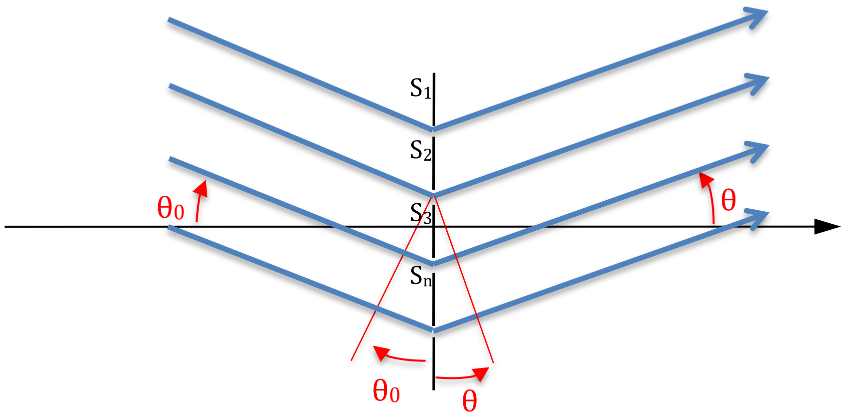
$$\varphi = \frac{2.\pi.n\,a}{\lambda}\sin(\theta)$$

Tous les rayons sont en phase (interfèrent constructivement) si :

$$\varphi = 2.k.\pi \; avec \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n\,a\sin(\theta) = k.\lambda$$

2.2. Incidence quelconque :



Le déphasage, dans une direction caractérisée par θ, entre les rayons i+1 et i vaut :

$$\varphi = \frac{2.\pi.n\,a}{\lambda}[\sin(\theta) - \sin(\theta_0)]$$

Tous les rayons sont en phase (interfèrent constructivement) si :

$$\varphi = 2.k.\pi \; avec \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{n\,a[\sin(\theta) - \sin(\theta_0)] = k.\lambda \; avec \; k \in \mathbb{Z}}$$

Formule fondamentale des réseaux plans

3. Amplitude résultante ; intensité résultante :

Par un choix convenable de l'origine des temps, on peut écrire l'amplitude en M due au rayon 1 comme :

$$s_1(M,t) = a.\cos(\omega t)\ ;\ \underline{s}_1(M,t) = a.\exp j(\omega t)$$

Les amplitudes dues aux rayons émergant des trous 2 et suivants s'écrivent alors :

$$s_2(M,t) = a.\cos(\omega t-\varphi)\ ;\ \underline{s}_2(M,t) = a.\exp j(\omega t-\varphi)$$
$$s_3(M,t) = a.\cos(\omega t-2\varphi)\ ;\ \underline{s}_3(M,t) = a.\exp j(\omega t-2\varphi)$$
$$\ldots\ldots$$
$$s_i(M,t) = a.\cos(\omega t-(i-1).\varphi)\ ;\ \underline{s}_i(M,t) = a.\exp j(\omega t-(i-1).\varphi)$$

L'amplitude résultante est :

$$s(M,t) = a.\cos(\omega t) + a.\cos(\omega t-\varphi)+ a.\cos(\omega t-2.\varphi)+\ldots$$
$$s(M,t) = \sum_{i=1}^{N} s_i(M,t)$$

$$\underline{s}(M,t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{s}_i(M,t) = a.e^{j\omega t}\left[1 + e^{-j\varphi} + e^{-j2\varphi} + \cdots + e^{-j(N-1)\varphi}\right]$$
$$= a.e^{j\omega t}\frac{1-e^{-jN\varphi}}{1-e^{-j\varphi}}$$

On en déduit l'intensité :

$$I(M) = \frac{1}{2}\langle \underline{s}(M,t).\underline{s}^*(M,t)\rangle = \frac{I_{max}}{N^2}\left[\frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}\right]^2$$

Lorsque N >> 1, les seuls maximas observables sont les maximas dits « principaux » correspondent au cas où :

$$\varphi = 2k\pi \text{ avec k entier.}$$

La première annulation après un maximum principal a lieu pour :

$$N\varphi/2 = \pi$$

La demi-largeur d'un maximum principal est donc :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

4. **Diagramme de Fresnel :**

Cas N = 10.

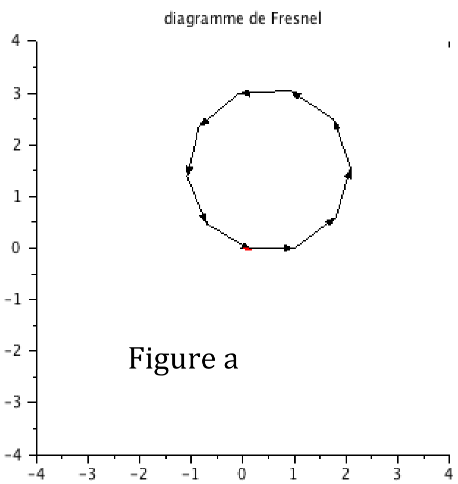


Figure a

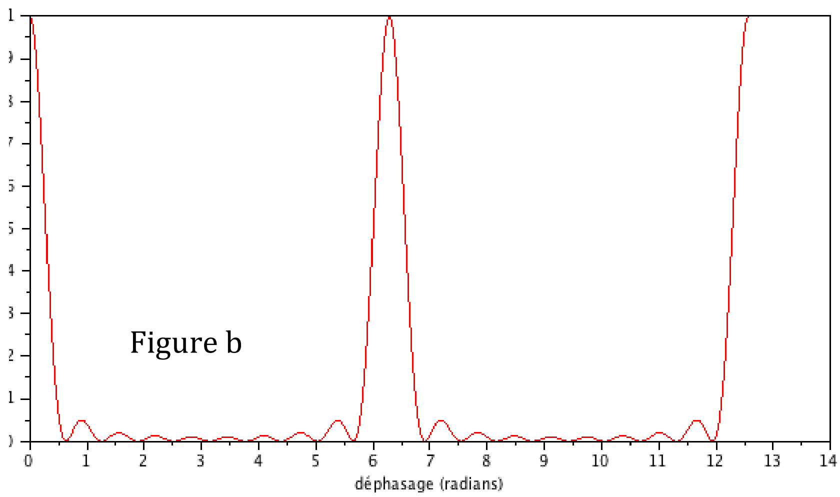


Figure b

On constate à nouveau que l'amplitude résultante passe par un maximum pour :

$$\varphi = 2k\pi \text{ avec k entier.}$$

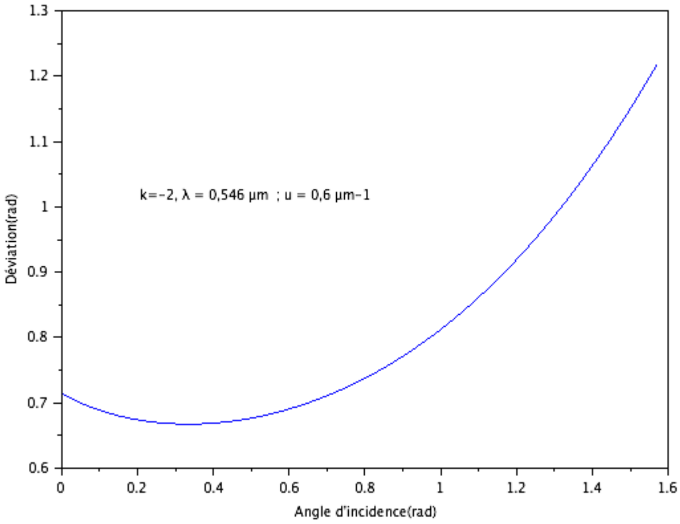
La première annulation (figure a) se produit pour

$$N\varphi = 2\pi$$

On retrouve alors la demi-largeur d'un maximum principal:

$$\Delta\varphi = 4\pi/N$$

5. Utilisation au minimum de déviation :



La déviation, choisie positive, est définie par :

$$D = |\theta - \theta_0|$$

Lorsque θ_0 varie, on constate expérimentalement que D passe par un minimum.

Dérivons la définition de D par rapport à θ_0 :

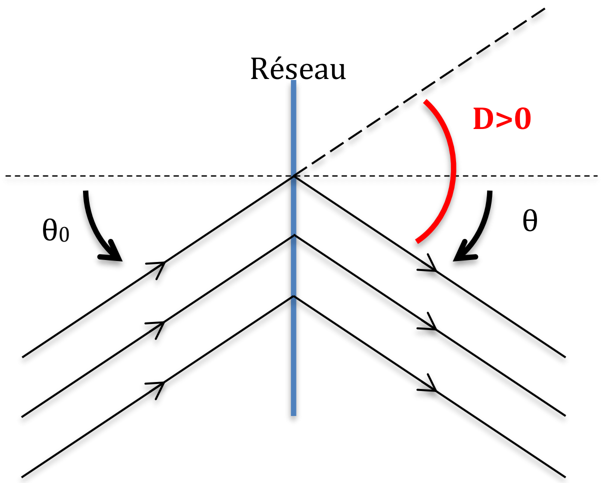
$$\frac{dD}{d\theta_0} = \frac{d\theta}{d\theta_0} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\theta}{d\theta_0} = 1 \quad (1)$$

Dérivons la formule fondamentale du réseau par rapport à θ_0 à k, a et λ constants :

$$\frac{d\sin(\theta)}{d\theta_0} - \frac{d\sin(\theta_0)}{d\theta_0} = \frac{d(\frac{k\lambda}{na})}{d\theta_0}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta)\frac{d\theta}{d\theta_0} - \cos(\theta_0) = 0 \quad (2)$$



Les équations (1) et (2) fournissent deux solutions :

$\theta_{min} = +\theta_0$ qui correspond à l'ordre 0, donc au faisceau non diffracté : pas d'intérêt

$\theta_{min} = -\theta_0$ qui correspond au minimum de déviation.

$$\theta_{min} = -\theta_0 \Rightarrow D_{min} = 2|\theta_{min}|$$

$$2a\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = |k|.\lambda \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$