PAQUETS D'ONDE - DISPERSION - ABSORPTION

2.2 Paquets d'ondes	
Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe.	Déterminer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.

1. Exemple : propagation d'une onde acoustique dans un milieu visqueux.

On considère un milieu de viscosité η , et dans lequel se propage une onde acoustique plane avec :

$$p = p(x,t) \text{ et } \vec{v} = v(x,t).\overrightarrow{u_x}.$$

L'équation d'Euler doit être remplacée par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\vec{v}$$

soit sous forme linéarisée :

$$\rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Les autres équations sont inchangées.

L'équation de propagation de la surpression est à présent :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) + c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_s}} \; et \; \nu = \frac{\eta}{\rho_0}$$

Cette équation **n'est pas une équation de d'Alembert** ; les solutions ne seront pas les solutions usuelles.

2. Analyse harmonique ; relation de dispersion :

2.1. Relation de dispersion :

Pour savoir si une onde plane peut se propager dans ce milieu, on réalise une **analyse harmonique** en cherchant des solutions sous la forme :

$$\underline{p}(x,t) = p_0.\exp j(\omega t-\underline{k}x)$$

avec ω réel positif **mais $\underline{k}$ éventuellement complexe**.

L'équation de propagation appliquée à cette solution impose une relation entre $\underline{k}$ et ω appelée **relation de dispersion.**
Ici cette relation s'écrit :

$$\omega^2 = \underline{k}^2c^2 + j\omega\nu\underline{k}^2$$

$\underline{k}$ est donc complexe.

On obtient alors :

$$\underline{\mathbf{k}}(\omega) = \mathbf{k'(\omega) + jk''(\omega)} \text{ avec } k'(\omega) = \mathrm{Re}(\underline{k}) \text{ et } k''(\omega) = \mathrm{Im}(\underline{k}).$$

On a alors :

$$\underline{p}(x, t) = p_0.\exp j(\omega t - k'x)\exp(k''x)$$

et

$$p(x, t) = \mathrm{Re}(\underline{p}(x,t)) = p_0.\cos(\omega t - k'x).\exp(k''x)$$

Remarque : dans notre exemple, l'onde se propage selon les x croissant ; on doit avoir :

$$k' > 0 \text{ et } k'' < 0.$$

3. Vitesse de phase.

3.1. Définition :

La solution générale contient un terme de propagation : c'est $\cos(\omega t - k'x)$.

Un plan d'onde est caractérisé par une phase

$$\varphi = \omega t - k'x = cte$$

on a alors :

$$\omega.dt - k'.dx = 0,$$
$$\text{soit } dx/dt = \omega/k' ;$$

Le plan d'onde se propage à la célérité ω/k'.

Déf : la vitesse de phase V_φ est la vitesse de propagation des plans d'onde ; $V_\varphi = \omega/k'$.

Si cette célérité dépend de ω, on dit que le milieu est **dispersif**.

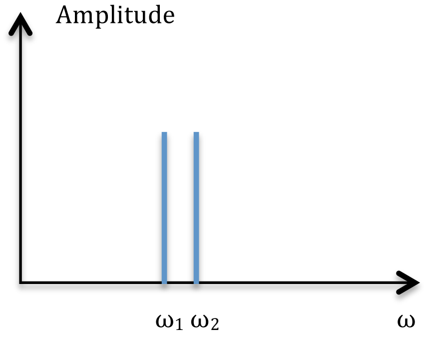
3.2. Absorption :

Le terme $\exp(k''x)$ traduit un amortissement de l'onde ; on dit qu'il y a **absorption**.

Remarque : certains systèmes peuvent donner une amplification de l'onde (exemple : laser).

4. Vitesse de groupe :

4.1. Propagation d'un signal à deux composantes :



On considère un milieu :

- sans absorption : k est réel, supposé > 0 ;
- faiblement dispersif : v_φ dépend de ω.

On considère la propagation d'une onde formée de deux composantes très proches dans un milieu dispersif caractérisé par une relation de dispersion $k = f(\omega)$:

$$u_1(x,t) = A.\cos(\omega_1 t - k_1 x)$$
$$u_2(x,t) = A.\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

où $k_1 = k(\omega_1)$; $k_2 = k(\omega_2)$.

La vitesse de phase V_φ de chacune de ces ondes est :

$$V_{\varphi 1} = \omega_1/k_1 \text{ et } V_{\varphi 2} = \omega_2/k_2.$$

On pose

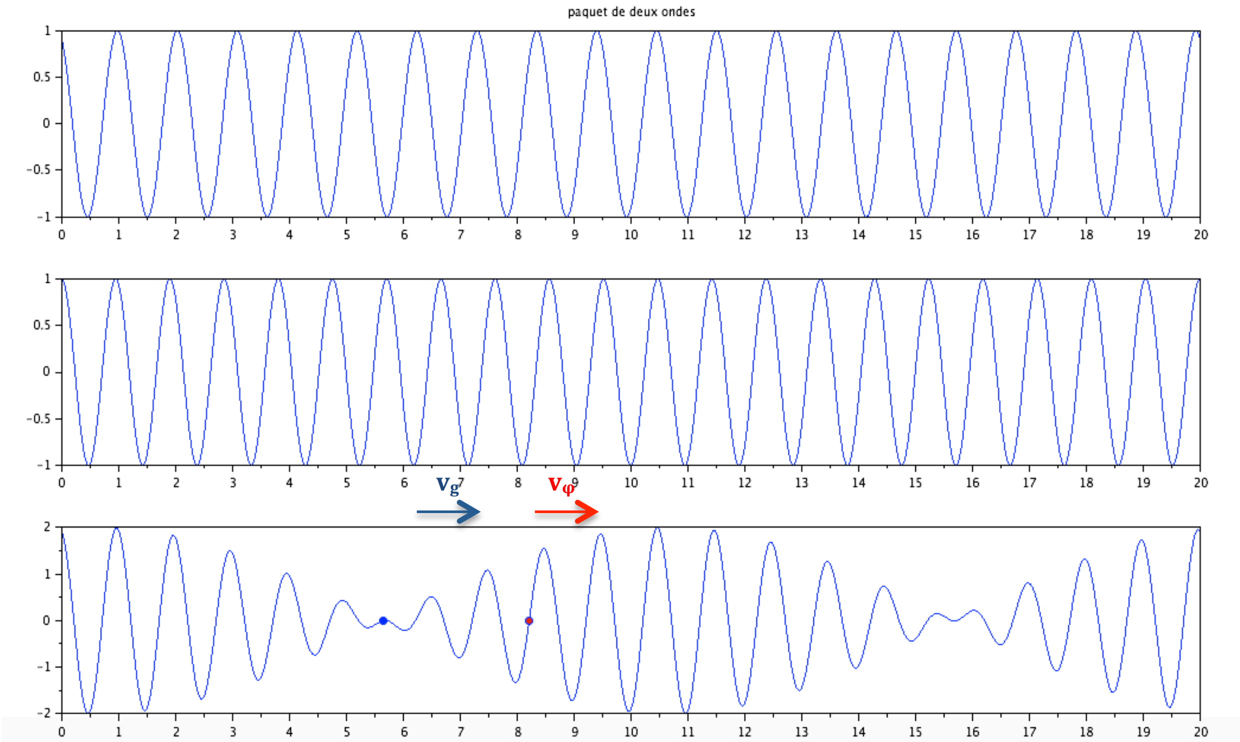
$$\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2 \;;\; \Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)/2 \;;$$
$$k_m = (k_1 + k_2)/2 \;;\; \Delta k = (k_2 - k_1)/2 \;;$$

On suppose

$$\Delta\omega << \omega_m \;;\; \Delta k << k_m$$

On calcule

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = 2.A.\cos(\omega_m t - k_m.t).\cos(\Delta\omega.t - \Delta k.t)$$



L'onde résultante a une vitesse de phase moyenne :

$$v_\varphi = \frac{\omega_m}{k_m}$$

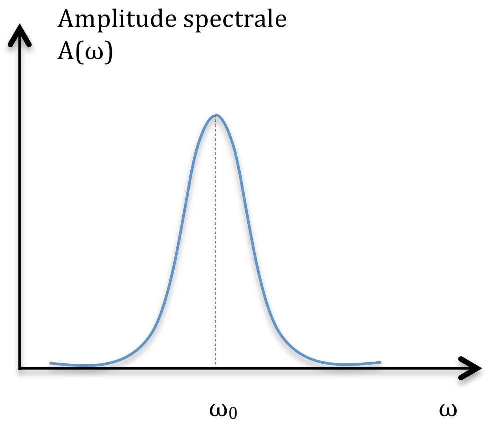
L'enveloppe de l'onde résultante se propage à une vitesse dite vitesse de groupe :

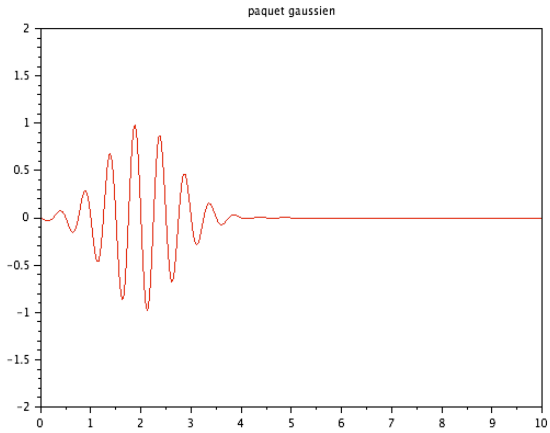
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

4.2 Paquet d'ondes : vitesse de groupe :

Définition : on appelle paquet d'ondes (ou groupe d'ondes) une onde formée par un ensemble d'ondes sinusoïdales ayant un spectre de pulsations continu dans un domaine limité entourant une pulsation ω_0 et une densité spectrale d'amplitude $A(\omega)$.

Exemple : paquet d'onde gaussien.





Le paquet d'ondes s'écrit :

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega).\exp j(\omega t - k(\omega).x).d\omega$$

Au voisinage de k = $k_0 = k(\omega_0)$, un développement de Taylor de ω à l'ordre 1 donne :

$$\omega = \omega_0 + (k - k_0).\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$$

d'où :

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega).d\omega.\exp j(\omega_0 t - k(\omega_0).x).\exp j\left((k-k_0)\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}.t - x\right]\right)$$

Définition : la vitesse de groupe est :

$$\boldsymbol{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

Le paquet d'ondes se propage à la vitesse de groupe.