DS DE PHYSIQUE N°3
SAMEDI 10 DECEMBRE 2022 – 4 HEURES

1) Etude d'un diapason (E3A MP 22) :

Ce problème porte sur l'étude d'un oscillateur mécanique faiblement amorti très utilisé en musique : le diapason.

Figure 1 – Gauche : diapason de musicien. Droite : diapason (avec son marteau) muni d'une caisse de résonance pour améliorer l'émission sonore, utilisé dans l'enseignement

Partie I - Étude de la réponse percussionnelle

Les branches du diapason sont décrites comme un oscillateur masse-ressort oscillant selon un axe horizontal, amorti par frottement fluide linéaire en la vitesse.

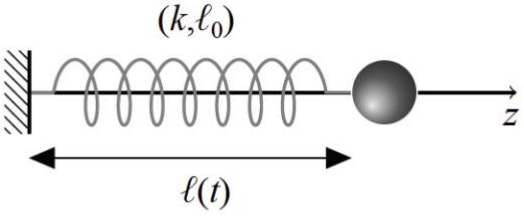


Figure 2 – Modélisation des branches du diapason par un oscillateur masse-ressort horizontal. La coordonnée z repère la position de la masselotte sur l'horizontale

On note m la masse de la masselotte, k la constante de raideur du ressort linéaire équivalent, ℓ_0 sa longueur à vide et $\ell(t)$ sa longueur à l'instant t (voir **figure 2**). De plus, on suppose que la masselotte est soumise à une force $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

Q1. Quel phénomène physique la force $\vec{f}$ modélise-t-elle ? Justifier par un argument énergétique le signe de la constante λ.

À l'instant $t = 0$, on percute l'une des branches du diapason, ce qui provoque la mise en mouvement de chaque branche. On suppose le choc instantané, c'est-à-dire que les branches pseudo-oscillent librement pour $t > 0$. Une note est alors émise.

Q2. On note $z(t) = \ell(t) - \ell_0$ la position de la masselotte. Établir l'équation différentielle dont $z(t)$ est solution pour $t > 0$.

Q3. Exprimer la fréquence propre et le facteur de qualité Q de ce système en fonction de k, m et λ.

Q4. Sachant que l'on obtient des pseudo-oscillations, établir l'expression littérale de $z(t)$ en fonction de k, m et λ et de constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

La masse de certains diapasons, utilisés par les musiciens, de fréquence propre voisine de 500 Hz vaut 30 g. Pour un diapason sans caisse de résonance, l'émission sonore est détectable à l'oreille pendant environ une trentaine de secondes.

Q5. Réaliser une estimation de la constante de raideur du ressort équivalent. De même, réaliser une estimation de la constante de raideur de ressorts utilisés en travaux pratiques. Commenter.

Q6. Proposer une estimation du facteur de qualité du diapason. Comparer cette valeur à celle d'un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques.

Q7. Pour un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques, dont la période propre vaut une seconde, indiquer s'il est correct d'affirmer que la durée entre deux maxima successifs de la position de la masselotte vaut effectivement 1,0 s. On s'appuiera sur une discussion numérique à partir d'un développement limité à l'ordre 1 de la pseudo-période en $1/Q^2$.

Q8. De même, est-il correct d'affirmer que les branches d'un diapason de fréquence propre f_0 oscillent à la fréquence f_0 après percussion ?

Pour préciser l'estimation précédente du facteur de qualité du diapason, on réalise un enregistrement à l'aide d'un microphone en utilisant un diapason équipé d'une caisse de résonance en bois permettant d'augmenter l'intensité de l'émission sonore (voir schéma du montage, **figure 3**). On obtient les deux enregistrements présentés sur le **document 1**.

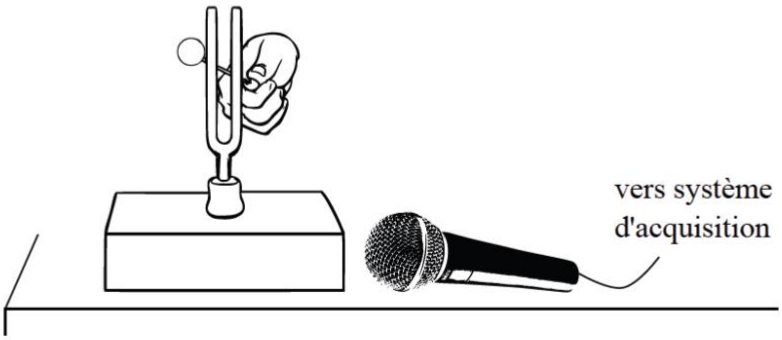
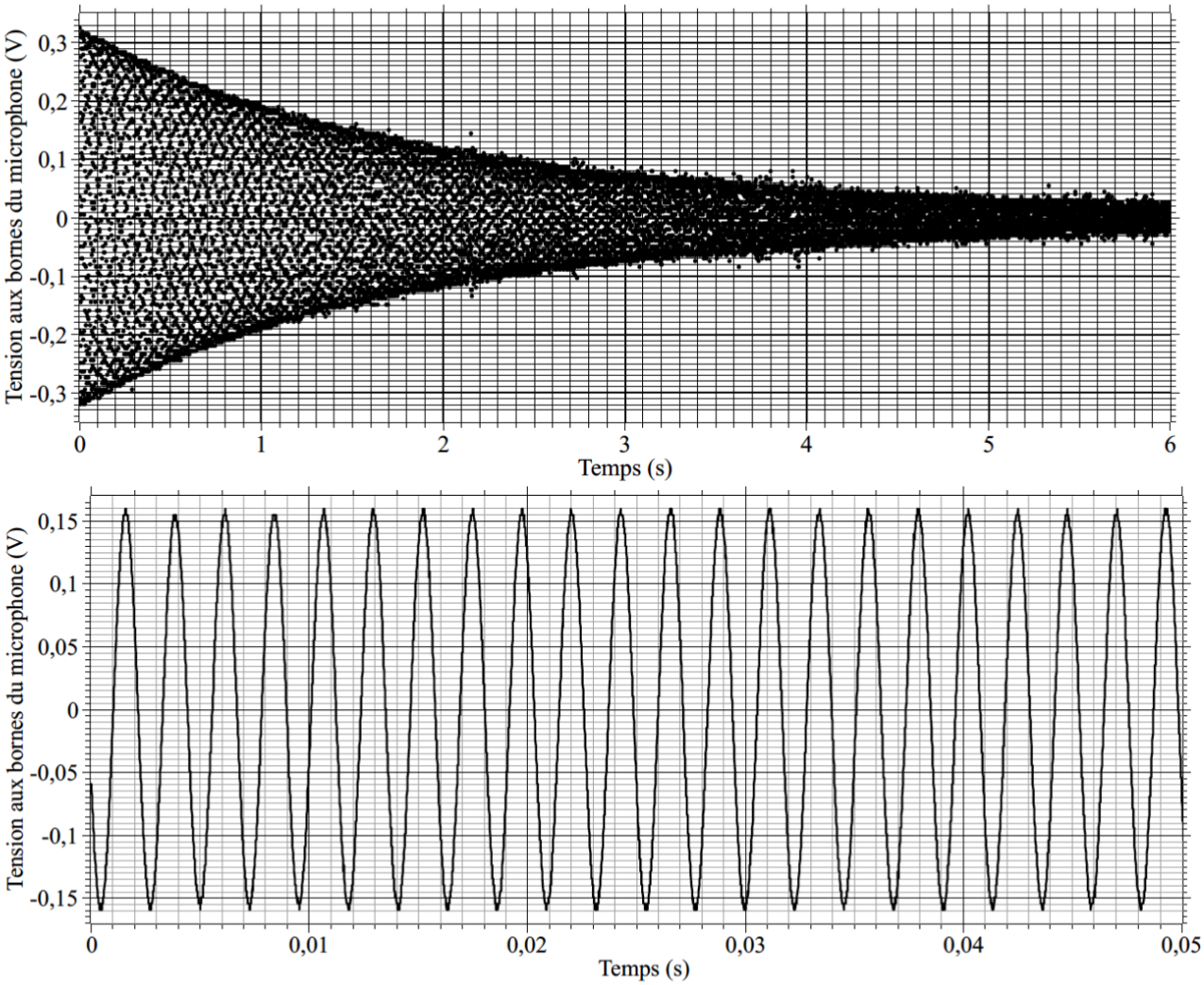


Figure 3 – Schéma du dispositif expérimental étudié dans la question 9

Q9. Exploiter le **document 1** pour estimer au mieux la fréquence propre et le facteur de qualité du diapason **A** (on reproduira sommairement la (ou les) figure(s) utilisées pour faire apparaître la méthode graphique employée pour ces déterminations). Comparer la valeur du facteur de qualité mesuré en présence de la caisse de résonance à celui du diapason en son absence. Commenter.

Document 1 - Étude de la réponse percussionnelle



Tension aux bornes d'un microphone enregistrant le son émis par la caisse de résonance du diapason **A** en réponse à une percussion avec le marteau (lors de deux mesures).

2) Effets de ralentissement et de modification de la distance Terre-Lune (E3A MP 18) :

Le Soleil, la Terre et la Lune sont tous trois supposés à symétrie sphérique.
On note T le centre de la Terre, S le centre du Soleil, L le centre de la Lune et O le centre de masse du système solaire.
Le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ est le vecteur unitaire de l'axe Tz des pôles, autour duquel la terre tourne sur elle-même avec une vitesse angulaire égale à $\Omega_T = 7{,}29.10^{-5}$ rad.s^{-1}. La Lune tourne sur elle-même avec une vitesse angulaire de rotation propre $\Omega_L = 2{,}66.10^{-6}$ rad.s^{-1} autour de l'axe Lz.

Q1. Définir les référentiels : de Copernic R_O, géocentrique noté R_T et terrestre noté R_T*.

On suppose le référentiel de Copernic R_O galiléen. On lui associe le repère (O, $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$). De même, au référentiel géocentrique R_T, on associe (T, $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$) et au référentiel terrestre R_T*, on associe (T, $\overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y}, \overrightarrow{e_Z}$). On définit un référentiel sélénocentrique R_L associé au repère (L,$\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$).

Q2. Justifier l'ordre de grandeur de la vitesse de rotation propre de la Terre.

Q3. À quelle condition peut-on considérer le référentiel géocentrique comme galiléen ?
À quelle condition peut-on considérer le référentiel terrestre comme galiléen ?

Q4. La Lune présente toujours la même face à la Terre. Qu'en déduisez-vous en supposant que le centre de la Lune L décrit une trajectoire circulaire à vitesse uniforme autour de T dans le référentiel géocentrique ? Évaluer en jours l'ordre de grandeur de la durée d'une révolution lunaire autour de la Terre.

Dans le référentiel géocentrique, on suppose qu'on peut écrire le principe fondamental pour un point matériel de masse m, placé en un point M sous la forme :

$$m\frac{d^2\overrightarrow{TM}}{dt^2} = m\overrightarrow{A_T}(M) + m\overrightarrow{A_L}(M) + m\overrightarrow{A_S}(M) + \overrightarrow{R_{ext}}(M) - m\frac{d^2\overrightarrow{OT}}{dt^2}$$

en appelant $\overrightarrow{A_T}(M)$, $\overrightarrow{A_L}(M)$ et $\overrightarrow{A_S}(M)$ les champs gravitationnels créés respectivement par la Terre, la Lune et le Soleil (on néglige les autres astres).

Q5. Interpréter chaque terme de l'égalité ci-dessus en précisant quel théorème de la mécanique est utilisé. Le référentiel géocentrique est-il supposé galiléen ?

Q6. Écrire le théorème de la résultante cinétique appliqué à la Terre dans le référentiel de Copernic.

On néglige les effets du Soleil et des autres astres : on considère le système Terre-Lune isolé.
On s'intéresse au mouvement du centre de la Lune autour de la Terre dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen dans la suite. On assimilera la trajectoire de la Lune autour de la Terre à un cercle centré en T.

Q7. Dans cette hypothèse de trajectoire circulaire de rayon d, exprimer la vitesse V de L sur son orbite en fonction de d, $\mathcal{G}$ et M_T. Est-ce compatible numériquement avec le résultat de la question Q4 ? Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_T(L)}$ de la Lune, assimilée à un point matériel L, par rapport au point T, et associé au mouvement orbital de la Lune, en fonction de d, $\mathcal{G}$, M_L et M_T.

On admet que les effets d'attraction lunaire sur les océans créent des bourrelets d'eau symétriques dont la surface limite est un ellipsoïde, de centre T, tangent à la sphère terrestre. La situation est représentée figure 1 dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{e_z}$, donc dans le plan orthogonal à l'axe de rotation de la Lune autour de la Terre. On note θ l'angle entre le grand axe de l'ellipsoïde et la direction TL.

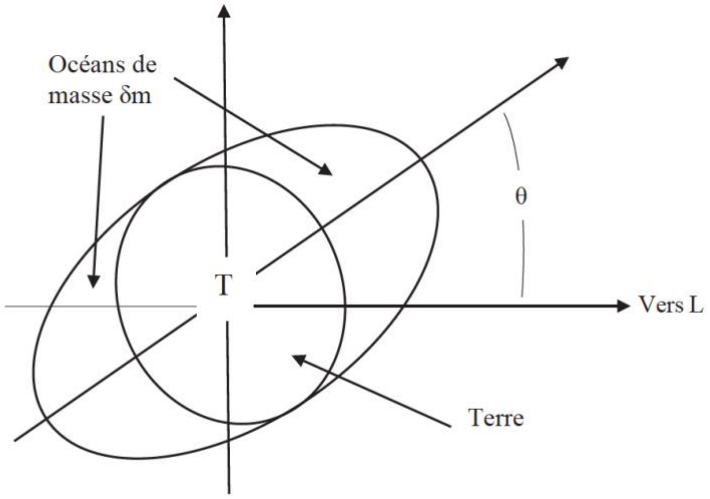


Figure 1 – Surface des océans (l'échelle n'est pas respectée par commodité de représentation)

Q8. Ces effets introduisent un couple de frottement exercé par la Lune sur la Terre de la forme :

$$\vec{\Gamma} = -a.\sin(2\theta)\delta m \frac{2\mathcal{G}M_L}{d^3} {R_T}^2 \overrightarrow{e_z}$$

Quelle est la dimension de a ?

La quantité $a\delta m \frac{2\mathcal{G}M_L}{d^3} {R_T}^2$ est une constante qui vaut K = $4{,}3.10^{16}$(SI). Le moment d'inertie de la Terre autour de son axe de rotation propre s'exprime par $J = \frac{2}{5} M_T {R_T}^2$

Q9. Ce couple de frottement peut faire diminuer la vitesse de rotation de la Terre Ω_T. En exploitant un théorème de mécanique appliqué au solide terre, exprimer en fonction de K et J, la variation $\frac{d\Omega_T}{dt}$ pour une position θ = 45°. Faire l'évaluation numérique et commenter.

On admet que la conservation du moment cinétique du système isolé Terre-Lune permet d'affirmer que, si la vitesse de rotation de la Terre diminue, il y aura augmentation du moment cinétique orbital de la Lune, donc augmentation de la distance Terre-Lune d, le moment cinétique de rotation propre de la Lune étant négligeable devant le moment cinétique orbital. On établit ainsi que la quantité $J\Omega_T+\sigma_T(L)$ reste constante.

Q10. En déduire la variation relative δd/d du rayon de l'orbite lunaire pour une période d'un an. Donner la valeur numérique de δd.

Données :

– Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G}$ = $6{,}67.\ 10^{-11}$ N.m².kg^{-2}
– Masse du Soleil : M_S = $2{,}00.10^{30}$ kg
– Masse de la Terre : M_T = $6{,}00.10^{24}$ kg
– Masse de la Lune : M_L = $7{,}34.10^{22}$ kg
– Distance Terre-Soleil : D = $1{,}50.10^{11}$ m
– Distance moyenne Terre-Lune : d = $3{,}84.10^{8}$ m
– Rayon de la Terre : R_T = $6{,}37.10^{3}$ km
– Rayon de la Lune : R_L = $1{,}75.10^{3}$ km

Pour un solide de moment d'inertie J tournant à vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\overrightarrow{e_z}$ autour d'un axe fixe Oz :

- ✓ Moment cinétique :

$$\vec{\sigma} = J\vec{\Omega}$$

- ✓ Energie:

$$E_c = \frac{1}{2}J\Omega^2$$

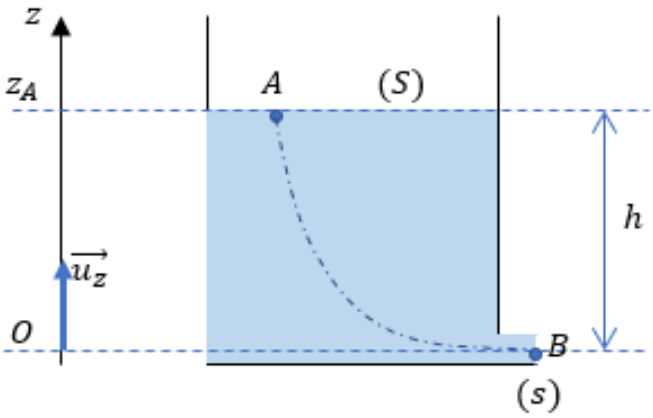
Puissance d'un moment de forces $\overrightarrow{M_0}$ par rapport à O :

$$P = \overrightarrow{M_0}\vec{\Omega}$$

3) Vérification expérimentale de la formule de Torricelli (ATS 2020) :

a) Modélisation

On considère un réservoir contenant de l'eau s'écoulant à travers une ouverture de section s (cf. ci-dessous). L'eau est assimilée à un fluide incompressible de masse volumique ρ. Dans une première approche, l'écoulement est supposé parfait. Le réservoir est aussi alimenté à travers l'ouverture supérieure de section S ce qui permet d'assurer un écoulement stationnaire (cette alimentation n'est pas représentée ci-dessous). On note P_0 la pression atmosphérique supposée uniforme et $\vec{g} = -g.\vec{u_z}$ le champ de pesanteur terrestre avec g = 10 m.s^{-2}. Dans toute la suite, les vitesses seront mesurées par rapport au référentiel lié au réservoir et supposé galiléen.



Soient A un point de la surface libre de section S et B un point situé sur l'extrémité de la section d'ouverture s. A et B appartiennent à une même ligne de courant. On a z_A-z_B = h. On note v_A et v_B les vitesses d'écoulement mesurées respectivement en A et B. On supposera également que la vitesse v_A est commune à tous les points de la surface libre horizontale et que la vitesse v_B est également uniforme sur la section droite s.

1) Etablir la relation reliant v_A, v_B, S et s.
2) Appliquer la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant reliant les points A et B en utilisant uniquement les notations du sujet.
3) On suppose que s ≪ S, en déduire alors que $v_B = \sqrt{2gh}$. Commenter cette relation appelée formule de Torricelli.

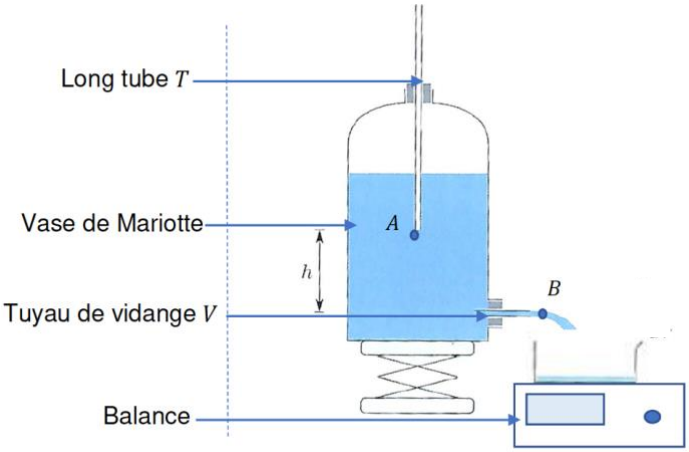
A t = 0, on arrête l'alimentation en eau à travers l'ouverture supérieure de section S alors que h = 20 cm. L'hypothèse stationnaire n'est alors plus valable mais on peut supposer le régime d'écoulement quasi-stationnaire à tout instant ce qui revient à adapter la formule de Torricelli sous la forme $v_B = \sqrt{2gz_A(t)}$.
4) Exprimer la vitesse v_A en fonction de z_A puis former une équation différentielle en z_A.
5) Déterminer la valeur du rapport S/s assurant une vidange complète du réservoir en 10 s.

b) Partie expérimentale :

On souhaite vérifier expérimentalement la relation de Torricelli en mesurant la vitesse v_B pour différentes valeurs de h.

6) Tracer $v_B^2(h)$ puis donner la valeur numérique de la pente théorique de cette fonction.

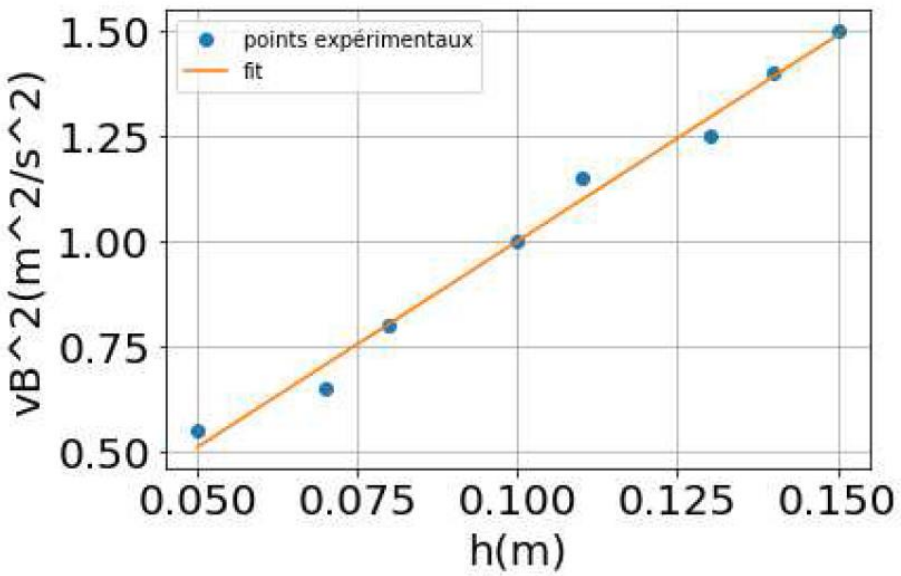
Le dispositif expérimental utilisé est représenté ci-dessous :



Plutôt que d'utiliser le dispositif étudié dans la partie théorique, on utilise un vase de Mariotte. Il s'agit d'un récipient fermé à l'intérieur duquel plonge un long tube noté T.
En régime stationnaire, l'air bulle en sortie de ce tube (au niveau du point A). De la sorte, tant que l'extrémité inférieure de T plonge dans l'eau, la hauteur h intervenant dans la relation de Torricelli reste constante au cours de la vidange. La vidange s'effectue à travers un tuyau de rayon R, la masse d'eau évacuée en B est ensuite mesurée à l'aide d'une balance.

7) En régime stationnaire et pour différentes valeurs de h, on récupère une masse Δm pendant un intervalle de temps Δt . Donner l'expression de la vitesse v_B en fonction de Δm , Δt , R et ρ.

8) On obtient expérimentalement le graphique ci-dessous. Commenter ce graphique.



Pour interpréter les résultats expérimentaux, il est nécessaire de prendre en compte dans le théorème de Bernoulli les pertes visqueuses, dites pertes de charges singulières se produisant au niveau du tuyau de vidange S.
Soit $w_f = -\frac{Kv_B^2}{2}$ le travail massique associé à ces pertes de charge, où K est une constante.

9) Adapter la relation de Bernoulli entre A et B en tenant compte de ces pertes de charges puis donner l'expression de la fonction $v_B^2(h)$ en fonction de K, g et h (on a encore $v_B \gg v_A$).

10) Evaluer la valeur de K associée au dispositif expérimental étudié.

c) Modélisation visqueuse :

Pour comprendre le travail massique évoqué plus haut, on tient compte de la viscosité, et l'on s'intéresse à l'écoulement d'un fluide incompressible de viscosité η et de masse volumique ρ dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe Oz, de longueur L et de rayon R. Cet écoulement unidirectionnel est caractérisé dans un repère cylindrique $\left(O,\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z}\right)$ par un champ de vitesse $\vec{v}=v\left(r,\theta,z,t\right)\overrightarrow{e_z}$ qui vérifie l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right)=-\overrightarrow{grad}P+\rho\vec{g}+\eta\Delta\vec{v}$$

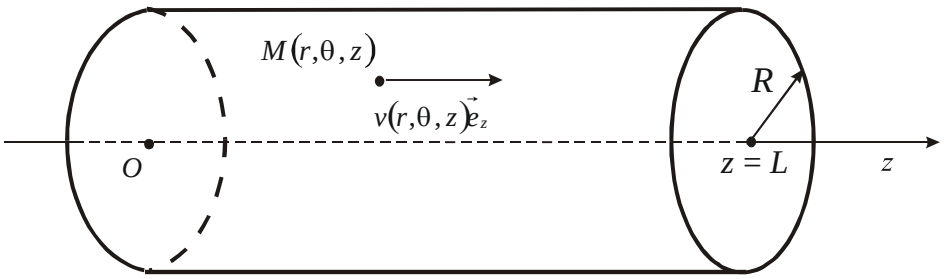


Figure 1

On note $P\left(z=0\right)=P_0$ et $P\left(z=L\right)=P_L$.
On néglige les phénomènes de pesanteur.

11) Justifier pourquoi le champ de vitesse est indépendant de θ.

12) Rappeler dans le cas général, l'équation locale de conservation de la masse. Que devient cette relation dans le cas d'un fluide incompressible ? En déduire que le champ de vitesse ne dépend pas de z.

13) Quelle propriété présente le champ de vitesse dans le cas d'un écoulement stationnaire ? On étudie maintenant un écoulement stationnaire.

14) En projetant l'équation de Navier-Stokes dans la base cylindrique, montrer que P ne dépend que de z et établir une équation différentielle reliant $v\left(r\right)$, r et $\frac{dP}{dz}$. Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques sont données à la fin du sujet.

15) Etablir l'expression de $P\left(z\right)$ en fonction de P_0, P_L, z et L.

16) En déduire que le champ de vitesse s'écrit $v\left(r\right)=\frac{1}{4\eta}\frac{P_0-P_L}{L}\left(R^2-r^2\right)$ sachant que la vitesse en $r=0$ est bornée. Tracer le profil de la vitesse et préciser la valeur maximale $v_{\max}$ de la vitesse.

d) Résistance hydraulique :

17) Calculer le débit volumique Q dans la conduite. On l'exprimera sous la forme $Q = K\left(P_0 - P_L\right)$ connue sous le nom loi de Poiseuille. Calculer la constante K.

18) On définit R_{Hy}, résistance hydraulique de longueur L et de surface S, par la relation :

$$P_0 - P_L = R_{Hy} Q .$$

Exprimer R_{Hy} en fonction de L, R et η. Quelle est l'analogie avec la définition de la résistance électrique ?

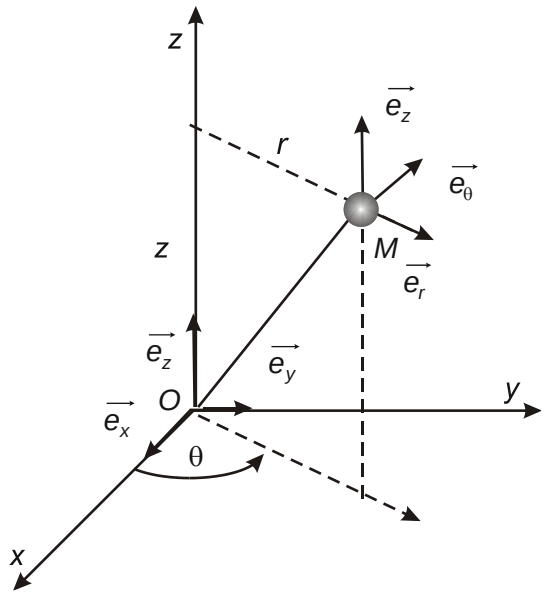
19) Rappeler l'expression de la puissance électrique dissipée dans une résistance électrique, R traversée par un courant d'intensité I. Par analogie, déterminer la puissance dissipée par les forces de viscosité en fonction de R_{Hy} et Q.

20) On admet que la vitesse moyenne est $v_m = v_{max}/2$. Montrer que le travail massique de la force de viscosité entre z = 0 et z = L est :

$$w = -\frac{8\eta L v_m}{\rho R^2}$$

Interpréter le signe et commenter.

Données pour les coordonnées cylindriques



$$div\left(\vec{A}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(A_\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(A_z\right)}{\partial z}$$

$$\Delta\left(f\left(r\right)\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)$$

$$\overrightarrow{grad}\left[f\left(r,\theta,z\right)\right] = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

Problème 1 – Étude d'un diapason

I – Étude de la réponse percussionelle

1. Force de frottement fluide, exercée par le fluide au contact des branches du diapason. La puissance transférée par frottement fluide des branches du diapason vers l'air qui les entoure permet de **modéliser l'émission d'un son**. Elle est **dissipative** du point de vue du diapason pour $\boldsymbol{\lambda > 0}$ (car la puissance de la force $\vec{f}$ est alors $-\lambda v^2 \leq 0$).

2. TRD à la masselotte dans le ref du labo supposé galiléen : $\boldsymbol{m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = 0}$.

3. $\ddot{z} + \dfrac{\lambda}{m}\dot{z} + \dfrac{k}{m}z = 0$ par identification avec la forme canonique $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\dot{z} + {\omega_0}^2 z = 0$, il vient

$$\boldsymbol{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\mathrm{Q} = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}}$$

4. Puisqu'il y a des pseudo-oscillations, $\Delta = \left(\dfrac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 < 0$. Alors les racines $r_\pm$ de l'équation caractéristiques sont $r_\pm = -\dfrac{1}{\tau} \pm \mathrm{i}\Omega$ avec $\tau = \dfrac{2\mathrm{Q}}{\omega_0}$, $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4\mathrm{Q}^2}}$ et

$$z(t) = \mathrm{A}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cos(\Omega t + \phi) = \boldsymbol{\mathrm{A}\exp\left(-\frac{\lambda t}{2m}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4mk}}\,t + \phi\right)}$$

où A et ϕ sont deux constantes d'intégration.

5. $k = 4\pi^2 {f_0}^2 m \simeq 4 \times 10 \times 5^2.10^4 \times 3.10^{-2}$, soit $\boldsymbol{k \simeq 3.10^4}$ **N/m**. Pour les ressorts utilisés en TP, on constate typiquement un étirement à l'équilibre $\Delta\ell \simeq 10$ cm si on suspend une masselotte de masse $\simeq 10^{-1}$ kg d'où

$$k_{\mathrm{TP}} \simeq \frac{mg}{\Delta l} = \frac{10^{-1} \times 10}{10^{-1}} = \mathbf{10\ N/m}$$

Le ressort équivalent pour **le diapason est nettement plus raide** que celui d'un ressort de TP.

6. Pour le diapason, $\tau \simeq 10$ s donc $\mathrm{Q} \simeq \tau\omega_0/2 = 10 \times \pi \times 5.10^2 \simeq \boldsymbol{10^4}$. Pour un oscillateur masse-ressort de TP, on compte typiquement une dizaine de pseudo-oscillations soit $\boldsymbol{\mathrm{Q} \simeq 10}$. Le **facteur de qualité du diapason est bien supérieur** à celui de l'oscillateur masse-ressort de TP.

7. La durée entre les deux passages est

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4\mathrm{Q}^2}}} = \frac{\mathrm{T}_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4\mathrm{Q}^2}}}$$

en notant T_0 la période propre. En **toute rigueur**, l'affirmation est **inexacte puisque** $\boldsymbol{\mathrm{T} \neq \mathrm{T}_0}$.

$$\mathrm{T} \simeq \mathrm{T}_0\left(1 + \frac{1}{8\mathrm{Q}^2}\right) \qquad \text{(pour } \mathrm{Q} \gg 1\text{)}$$

Toutefois, l'approximation peut être **acceptable selon la précision requise** : pour $\mathrm{Q} \simeq 10$, l'écart relatif entre T et T_0 est de l'ordre de 0,1%.

8. Pareil, en toute rigueur, $T \neq T_0$; mais cette fois $Q \simeq 10^4$ donc l'**approximation est bien meilleure** que pour l'oscillateur masse-ressort de TP.

9. La deuxième figure donne $f_0 = \frac{11}{25.10^{-3}} = \left(\frac{10}{25} + \frac{1}{25}\right) \times 10^3 = \mathbf{4{,}4.10^2}$ **Hz**. La première figure donne τ entre 1,5 et 2,0 s selon la méthode utilisée (**tangente à l'origine** ou **0,37× la valeur initiale**), d'où $Q = \pi f_0 \tau = 3 \times 4{,}4.10^2 \times 2 = \mathbf{2{,}8.10^3}$. La valeur de la **fréquence correspond bien** à l'estimation précédente, mais le **facteur de qualité** est **plus faible**. On peut penser que l'**estimation à l'oreille** était très **grossière**. On peut aussi penser que l'**ajout de la cavité fait baisser Q** : en présence de la caisse de résonance, l'émission sonore est plus importante donc l'atténuation plus rapide.

Effets de ralentissement et de modification de la distance Terre-Lune (CCP MP 18) :

Q1. Le référentiel de Copernic a son origine au centre de masse du système solaire et trois axes dirigés vers des étoiles fixes. Il est supposé galiléen.
Le référentiel géocentrique est en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic, il n'est donc pas galiléen.
Le référentiel terrestre est en rotation par rapport au référentiel géocentrique, il n'est pas galiléen.

Q2. La période de rotation de la terre autour de son axe est voisine de T = 24 h. La pulsation est donc :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24.3600} = 7{,}2.10^{-5} rad.s^{-1}$$

Q3. On peut considérer le référentiel géocentrique comme galiléen pour des durées de l'ordre de la journée. On peut considérer le référentiel terrestre comme galiléen pour des durées de l'ordre de l'heure (exemple : le pendule de Foucault fait un tour en 32h à Paris).

Q4. La vitesse angulaire de rotation de la Lune sur elle-même est identique à sa période de rotation autour de la Terre. La période est donc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2{,}66.10^{-6}} = 27{,}3\ jours$$

Q5. Dans le premier membre, la masse m est multiplié par l'accélération relative.
Dans le second membre, on trouve les forces de gravitation exercées la terre, la Lune et le Soleil, puis les forces autres que les forces de gravitation, et enfin la force d'inertie d'entrainement, égale à -m multipliée par l'accélération du point coïncident, ici le centre de la terre T.

Q6. Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la Terre dans le référentiel de Copernic s'écrit :

$$M_T \frac{d^2\overrightarrow{OT}}{dt^2} = M_T\overrightarrow{A_L}(T) + M_T\overrightarrow{A_S}(T)$$

Q7. La troisième loi de Kepler permet de calculer :

$$V = \sqrt{\frac{\mathcal{G}\mathrm{MT}}{d}} = 1019\ m.s^{-1}$$

On peut calculer la période par :

$$T = \frac{2\pi d}{V} = 27{,}4\ jours$$

Le résultat est compatible.

Le moment cinétique de la Lune s'écrit :

$$\overrightarrow{\sigma_T(L)} = \overrightarrow{TL} \wedge M_L\vec{V} = dM_L\sqrt{\frac{\mathcal{G}\mathrm{MT}}{d}}\overrightarrow{e_z} = M_L\sqrt{\mathrm{d}\mathcal{G}\mathrm{MT}}\overrightarrow{e_z}$$

Q8. On montre que a est sans dimensions.

Q9. On peut utiliser le théorème du moment cinétique appliqué dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen, et projeté selon Oz :

$$J\frac{d\Omega_T}{dt} = -Ksin(2\theta) = -K$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\Omega_T}{dt} = -\frac{K}{J} = 4{,}4.10^{-22} s^{-2}$$

Cette valeur est extrêmement faible, on peut négliger la variation de Ω_T à l'échelle des siècles !

Q10. On peut écrire :

$$J\frac{d\Omega_T}{dt} + \frac{d\sigma T(L)}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow -K + \frac{M_L}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{d}}\frac{\delta d}{\delta t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta d}{d} = \frac{2K\delta t}{dM_L}\sqrt{\frac{d}{\mathcal{G}M_T}}$$

On calcule : $\delta d = 3{,}6\ cm$

III – Vérification expérimentale de la formule de Torricelli

a) Modélisation

25) Fluide incompressible □ conservation du débit volumique □ $\boxed{v_A S = v_B s}$

26) Théorème de Bernoulli : Lors de l'écoulement stationnaire incompressible parfait d'un fluide, la charge reste invariante sur une ligne de courant. *Formule de Daniel Bernoulli, 1738*

A et B à l'air libre à la pression p_0 : $\cancel{p_0} + \square g z_A + \frac{1}{2}\square v_A^2 = \cancel{p_0} + \square g z_B + \frac{1}{2}\square v_B^2$ □ $\boxed{2gh + v_A^2 = v_B^2}$

27) $s << S$ □ $v_A << v_B$ □ $2gh + \cancel{v_A^2} = v_B^2$ □ $\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$ *Formule d' Evangelista Torricelli, 1643 < 1738*

Torricelli a observé que le débit lors de l'écoulement n'est pas constant et diminue selon la racine de la hauteur d'eau. Cette conversion E_p □ $\xrightarrow{E_m = \text{constante}}$ □ E_c se retrouve dans la chute de la bille $v_{sol} = \sqrt{2gh}$.

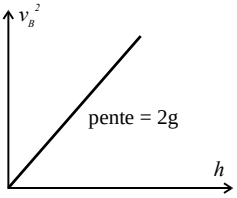
28) $\frac{dz_A}{dt} = \square v_A(t) = \square\frac{s}{S}v_B(t) = \square\frac{s}{S}\sqrt{2gz_A(t)}$ *Attention au signe, $z_A(t)$ est une fonction décroissante.*

En physique, quand une équation différentielle n'est pas linéaire, elle est souvent à variables séparables

$\frac{dz_A}{\sqrt{z_A}} = \square\frac{s}{S}\sqrt{2g}dt$ □ $\int_h^0 \frac{dz_A}{\sqrt{z_A}} = \square\frac{s}{S}\sqrt{2g}\int_0^{t_v} dt$ □ $\left[2\sqrt{z_A}\right]_h^0 = \square\frac{s}{S}\sqrt{2g}t_v$ □ $2\sqrt{h} = \frac{s}{S}\sqrt{2g}t_v$ □ $\boxed{\frac{S}{s} = t_v\sqrt{\frac{g}{2h}}}$

AN : $\frac{S}{s} = 10\cdot\sqrt{\frac{10}{2\cdot 0{,}2}} = 10\cdot\sqrt{25}$ soit $\boxed{\frac{S}{s} = 50}$ $\square x^{\square}dx = \frac{1}{\square+1}x^{\square+1}$ primitive à connaitre

b) Partie expérimentale



29) $v_B^2 = 2gh$. La courbe de v_B^2 en fonction de h est une droite de $\boxed{\text{pente } 2g \square 20 \text{ m.s}^{\square 2}}$

30) Avec le vase de Mariotte, le débit volumique reste constant de valeur $D_V = \square r^2 v_B$.

Le débit massique vaut $D_m = \square\square r^2 v_B$ et on a $\square m = \square\square r^2 v_B \square t$. $\boxed{v_B = \frac{\square m}{\square\square r^2 \square t}}$

31) On rappelle la formule de cours $\square\left(p + \square.g.z + \frac{1}{2}\square.v^2\right) = \frac{\cancel{P_{méc}}}{\cancel{D_V}}\square\square p_{\text{charge}}$ (pas de machine)

Il est bon de se rappeler l'interprétation énergétique de cette relation (premier principe)

Les pertes de charge (*pas de s à charge*) sont en fait des pertes d'énergie volumique donc avec les notations de l'énoncé $\left(\cancel{p_0} + \square g z_B + \frac{1}{2}\square v_B^2\right)\square\left(\cancel{p_0} + \square g z_A + \frac{1}{2}\square v_A^2\right) = \square\square\frac{K}{2}v_B^2$

Comme précédemment, on fait l'hypothèse $v_A << v_B$ donc $\frac{1}{2}\square v_B^2 \square\square gh = \square\square\frac{K}{2}v_B^2$ □ $\boxed{v_B^2 = \frac{2gh}{K+1}}$

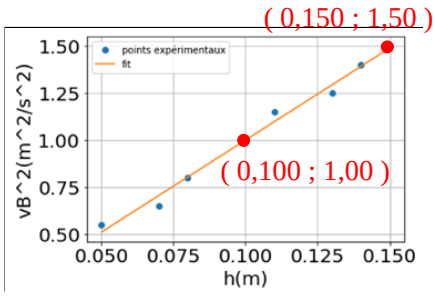
NB : v_B □ $\sqrt{2gh} = v_{B\text{ sans pertes de charge}}$ et pour $K = 0$, on retrouve le cas sans pertes de charge.

32) La pente de la courbe vaut $\frac{1{,}50\square 1{,}00}{0{,}150\square 0{,}100} = 10{,}0 \text{ m.s}^{\square 2}$ *2 chiffres significatifs (lecture), ne pas oublier l'unité.*

La pente est $\frac{2g}{K+1}$ avec $g = 10 \text{ m.s}^{\square 2}$ *2 chiffres significatifs*

donc il est trivial que $\boxed{K = 1{,}0}$. *K est adimensionnel*

NB : La moitié de l'énergie potentielle n'est pas convertie en énergie cinétique à cause des pertes de charge (50% de l'énergie)



11) Le système présente une invariance par rotation atout de l'axe Oz.

12) L'équation de conservation de la masse s'écrit sous forme locale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

Pour un fluide incompressible on obtient :

$$div(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

La vitesse ne dépend pas de z.

13) Pour un écoulement stationnaire le champ des vitesses est indépendant de t.

14) On calcule $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \vec{0}$; l'accélération particulaire est donc nulle.

L'équation de Navier-Stokes s'écrit en projection :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial P(z)}{\partial z} + \eta \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{r.\partial v(r)}{\partial r}\right) \end{cases}$$

On déduit des deux premières équations que la pression ne dépend que de z.

La dernière équation s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = \eta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r.\partial v(r)}{\partial r}\right)$$

15) Le premier membre n'est fonction que de z, le second n'est fonction que de r ; on a donc nécessairement :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = cte$$

On en déduit :

$$P(z) = P_0 + \frac{P_L - P_0}{L} z$$

16) On en déduit ensuite :

$$\eta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r.\partial v(r)}{\partial r}\right) = \frac{P_L - P_0}{L}$$

Par intégration:

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 + B.Ln(r) + C$$

La vitesse en r =0 est bornée, on a donc nécessairement B = 0.
La condition aux limites s'écrit : v(R) = 0
On a donc finalement :

$$v(r) = \frac{P_0 - P_L}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

La vitesse maximale dans le tuyau est :

$$v_{max} = \frac{P_0 - P_L}{4\eta L} R^2$$

Le profil de vitesse est parabolique.

17) Le débit de volume à travers une section du tuyau est :

$$Q = \frac{P_0 - P_L}{L}\frac{\pi R^4}{8\eta}$$

18) La resistente hydraulique est :

$$R_{hy} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

19) La puissance Joule est :

$$P = RI^2$$

Par analogie la puissance dissipée par viscosité est :

$$P = R_{hy} Q^2$$

20) Le travail massique est donné par :

$$w = -P.\frac{\Delta t}{m}$$

Pour une particule de fluide traversant le tube, la durée de parcours est Δt=L/v_m.
La masse de fluide dans le tube est m = $\rho\pi R^2 L$.

On en déduit :

$$w = -\frac{8\eta L}{\pi R^4}\left(\frac{P_0 - P_L}{L}\frac{\pi R^4}{8\eta}\right)^2 \cdot \frac{2L4\eta L}{(P_0 - P_L)R^2} \cdot \frac{1}{\rho\pi R^2 L} = -\frac{P_0 - P_L}{\rho} = -\frac{8\eta L v_m}{\rho R^2}$$

Le signe est du au caractère résistant des forces de viscosité.
On constate que ce travail est proportionnel à la vitesse moyenne du fluide.