1.STATIQUE DES FLUIDES

Ce chapitre rassemble l'essentiel du cours de PCSI.

1. Définition des fluides :

Un fluide est un système pouvant se déformer sous l'effet de forces aussi petites soient-elles , pourvu qu'elles soient appliquées assez longtemps.
En pratique, on considérera des liquides et des gaz.

Un fluide est formé à l'échelle microscopique de particules individuelles, cependant on traite le fluide comme un milieu continu, constitué de "particules élémentaires de fluide" (échelle mésoscopique) si la dimension typique L du système considéré (échelle macroscopique) est grande devant le libre parcours moyen des molécules.

Les particules de fluide sont donc petites à l'échelle macroscopique, mais contiennent un nombre de molécules pour pouvoir y définir des grandeurs moyennées.

2. Forces dans les fluides :

2.1. Forces surfaciques, forces volumiques :

Les forces exercées sur les fluides peuvent être décomposées en deux types :

- les forces volumiques, qui s'appliquent à chaque élément dV du fluide ; on définit dans ce cas une densité volumique de forces par :

$$d\vec{F} = \vec{f}_V . dV$$

Exemple : poids volumique $\vec{f}_{Vpoids} = \rho\vec{g}$, force électromagnétique volumique $\vec{f}_{Vém} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

- les forces superficielles, qui s'appliquent à chaque élément dS de la surface S entourant le volume V du fluide ; on admet que <u>dans le fluide au repos</u> la force exercée sur une petite surface dS du fluide étudié est :

$$d\vec{F} = -P(M).d\vec{S}.$$

où $d\vec{S}$ est le vecteur surface orienté par la normale sortante, et où P(M) est appelée pression au point M.

Unité SI de pression : le **Pascal** (Pa) : 1 Pa = 1 $N.m^{-2}$.

Autres unités : le bar : 1 **bar** = 10^5 Pa ; **l'atmosphère** (atm) : 1 atm = 101325 Pa ;
Le millimètre de mercure (**mmHg**) : 1 atm = 760 mmHg ; le **torr** : 1torr = 1 mmHg.

2.2. Résultante volumique des forces de pression :

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{F} = \iint_S - P.d\vec{S} = -\iiint_V \vec{\nabla}P.dV$$

Les forces de pression sont donc, <u>du seul point de vue de la résultante</u>, équivalentes à des forces volumiques de densité :

$$\vec{f}_{vpression} = -\overrightarrow{grad}P$$

3. Equation locale de la statique des fluides :

Un fluide est en **équilibre** par rapport à un référentiel R si pour toute particule fluide :

$$\vec{v}_R(M,t) = 0.$$

On se place dans le cas d'un fluide soumis aux **seules forces de pesanteur** et aux forces de pression, en équilibre par rapport à un référentiel R **galiléen.**

L'équilibre dans R s'écrit sous forme locale :

$$\rho.\vec{g} - \overrightarrow{grad}P = \vec{0}$$

Cette relation se projette sur un axe Oz **ascendant** selon :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

Définition : on appelle surfaces **isobares** les surfaces P = cste.

Propriété : les isobares sont perpendiculaires aux lignes de champ de $\overrightarrow{f_v}$.

4. Champ de pression dans le champ de pesanteur pour un fluide incompressible homogène :

Un fluide est **incompressible** si sa masse volumique ρ ne dépend pas de P.
Si de plus le fluide est homogène, alors ρ = cte.

On a alors :

P(z) = P(0) - ρgz (si l'axe des z est ascendant)

Théorème de Pascal : dans un liquide au repos, les variations de pression se transmettent intégralement d'un point à un autre.

5. Champ de pression dans un gaz parfait : modèle de l'atmosphère isotherme :

L'équation d'état du GP s'écrit :

P = ρRT / M.

On déduit de la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$$P(z) \;=\; P(0).exp^{-Mgz/RT}$$

Le facteur $exp^{-Mgz/RT}$ est appelé facteur de Boltzmann : il compare l'énergie potentielle de pesanteur à l'énergie d'agitation thermique.

6. Théorème d'Archimède :

Enoncé : Un solide immergé dans un fluide à l'équilibre est soumis à une poussée verticale de bas en haut, égale en norme au poids du liquide déplacé et s'exerçant au centre de masse du fluide déplacé.

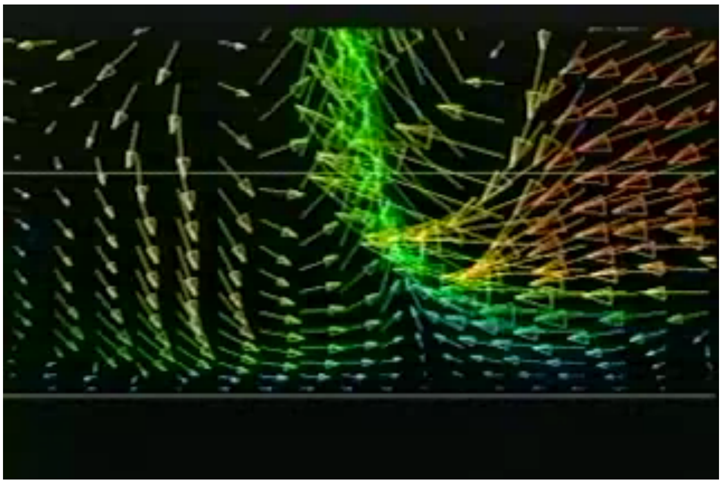
Remarque 1 : la poussée d'Archimède n'est pas un nouveau type de force ! Elle traduit la résultante des forces de pression, dans le cas d'un fluide soumis uniquement à la pesanteur.

Remarque 2 : la démonstration du théorème suppose que le solide peut être remplacé par du fluide sans modifier l'équilibre. Pensez-y !

Chapitre 2 : CINEMATIQUE DES FLUIDES

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1 Description d'un fluide en mouvement	
Champ eulérien des vitesses. Lignes de champ. Tubes de champ.	Définir et utiliser l'approche eulérienne.
Écoulement stationnaire.	Savoir que le caractère stationnaire dépend du référentiel.
Dérivée particulaire de la masse volumique. Écoulement incompressible.	Établir l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique. Utiliser son expression pour caractériser un écoulement incompressible. Savoir que le caractère incompressible ne dépend pas du référentiel.
Équation locale de conservation de la masse. Caractérisation d'un écoulement incompressible par la divergence du champ des vitesses.	Établir cette équation dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie. Utiliser div **v** =0 pour un écoulement incompressible.
Dérivée particulaire du vecteur-vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer d**v**/dt à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Connaître et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme (**v.grad**) **v.** Utiliser l'expression fournie de l'accélération convective en fonction de **grad** (v^2/2) et **rot v x v.**
Vecteur tourbillon. Écoulement irrotationnel défini par la nullité du rotationnel du champ des vitesses en tout point ; potentiel des vitesses.	Illustrer sur des exemples simples la signification qualitative du vecteur tourbillon. Utiliser **rot v = 0** pour un écoulement irrotationnel et en déduire l'existence d'un potentiel des vitesses. Savoir que le caractère irrotationnel dépend du référentiel.

1. Description du fluide en mouvement ; champ des vitesses :



1.1. Description eulérienne :

On utilise la **description eulérienne**, utilisée pour tous les champs en physique.

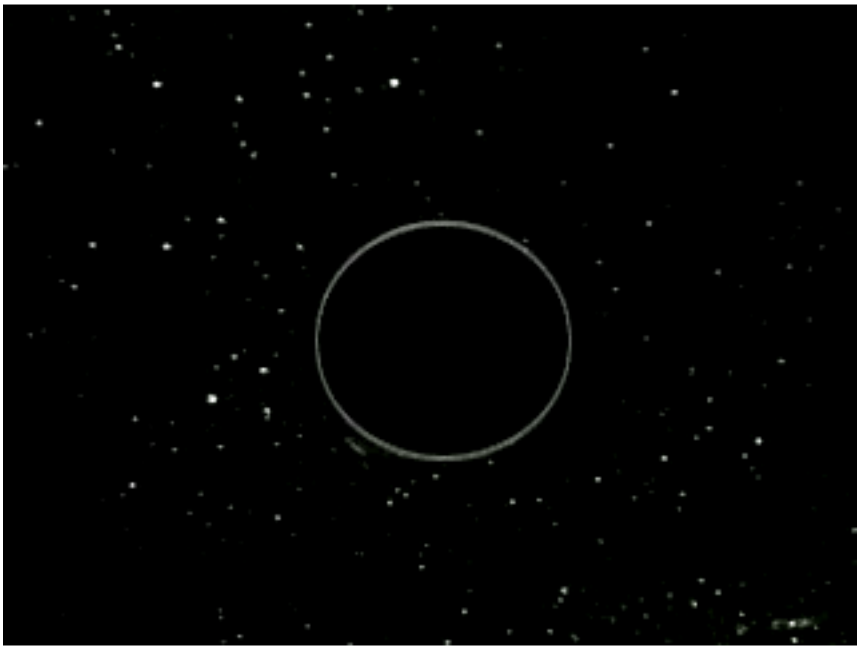
Pour le champ des vitesses, elle consiste à donner la vitesse en tout point du fluide et à tout instant, par rapport au référentiel considéré, soit

$$\vec{v} = \vec{v}_{/R}(\vec{r}, t).$$

Les variables d'espace et de temps sont ici des variables **indépendantes**, appelées variables d'Euler.

1.2. Ecoulement stationnaire :

Définition : on appelle écoulement stationnaire un écoulement pour lequel tous les champs eulériens sont indépendants du temps (donc en particulier la vitesse).



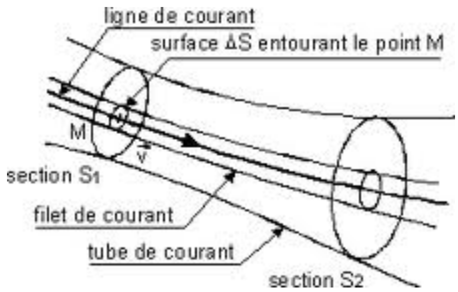
Dans ce cas la variable t n'apparaît pas dans l'expression de $\vec{v}$.

Le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel considéré.

1.3. Définitions :

Définition : Les **lignes de courant** sont les lignes de champ du vecteur vitesse ; elles se déforment au cours du temps, si l'écoulement n'est pas stationnaire.

Définition : Un **tube de courant** est la surface formée par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé C.



2. Débits :

2.1. Débit volumique :

Définition : le débit volumique Dv est le volume de fluide traversant une certaine surface **orientée** pendant l'unité de temps. Unité : $m^3.s^{-1}$.

Soit un écoulement parcouru par un fluide à vitesse $\vec{v}.(\vec{r},t)$:

le volume élémentaire traversant une petite surface $\vec{dS}$ pendant dt est :

$$d^2V = \vec{v}.(\vec{r},t).\vec{dS}.dt$$

Le volume traversant une surface S pendant dt est donc :

$$dV = \iint \vec{v}(\vec{r},t).\vec{dS}.dt = \left(\iint \vec{v}(\vec{r},t).\vec{dS} \right).dt.$$

Le débit volumique s'écrit donc :

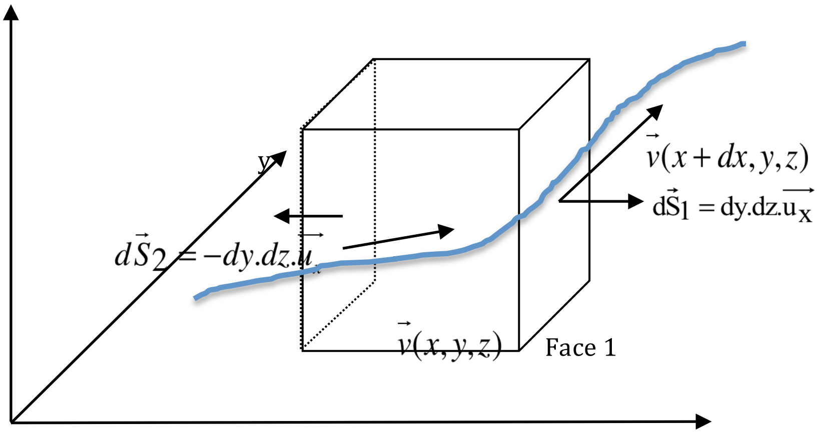
$$\boxed{Dv = \frac{dV(t)}{dt} = \iint \vec{v}(\vec{r},t).\vec{dS}}$$

C'est le **flux** de $\vec{v}(\vec{r},t)$ à travers la surface S.

Cas simple et classique : écoulement à travers une surface sur laquelle la vitesse est uniforme.

2.2. Flux volumique : opérateur divergence :

Calculons le débit à travers les faces d'un petit volume élémentaire dV = dx.dy.dz (6 faces) :



Le débit élémentaire s'écrit alors :

$$dD = v_x(x+dx,y,z,t).dy.dz - v_x(x,y,z,t).dy.dz$$
$$+ v_y(x,y+dy,z,t).dx.dz - v_y(x,y,z,t).dx.dz +$$
$$+ v_z(x,y,z+dz,t).dx.dy - v_z(x,y,z,t).dx.dy.$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x}.dx.dy.dz + \frac{\partial v_y}{\partial y}.dx.dy.dz + \frac{\partial v_z}{\partial z}.dx.dy.dz$$

$$= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).dx.dy.dz\,.$$

On pose :

$$div\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$ (lire « divergence de v »).

La divergence est un **opérateur** ; elle a pour unité m^{-1}, elle s'applique à un champ de vecteurs et donne un scalaire : pour le rappeler il n'y a pas de flèche sur div.

Remarque : les expressions de la divergence en coordonnées cylindriques et sphériques sont beaucoup moins simples !

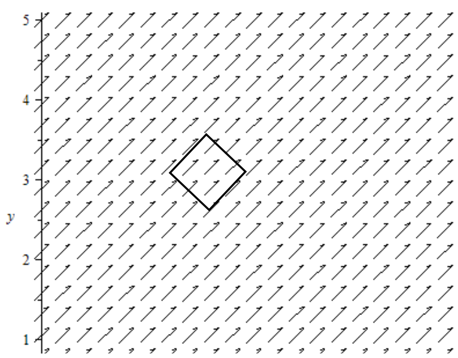
La divergence d'un vecteur exprime le flux volumique de ce vecteur en un point.

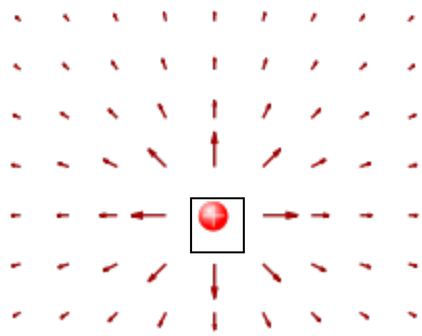
Théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_V \mathrm{div}(\vec{A}).dV = \oiint_S \vec{A}.d\vec{S}$$

où V est le volume fermé par la surface S (fermée) orientée vers l'extérieur.

Exemples :





La divergence d'un champ de vecteurs est non-nulle lorsque à travers la surface fermant un petit volume il « sort plus de champ qu'il n'en rentre », ou qu'il « entre plus de champ qu'il n'en sort ».

2.3. Débit massique :

Définition : le **débit de masse D_m** est la masse traversant une certaine surface orientée pendant l'unité de temps. Unité : $kg.s^{-1}$.

Avec un raisonnement analogue au précédent on a *:*

$$D_m = \frac{dM(t)}{dt} = \iint \rho(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t).\overrightarrow{dS}$$

Définition : le vecteur $\vec{j}(\vec{r}.,t) = \rho(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t)$ est appelé densité de courant de masse.

Généralisation (HP) : le débit d'une grandeur G(t) quelconque – scalaire ou vectorielle - est égale au flux du vecteur $\overrightarrow{j_G}(\vec{r}.,t) = g.(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$ où $g.(\vec{r},t) = \frac{dG(t)}{dt}$ est la densité volumique de G(t).

3. Dérivée particulaire de la masse volumique :

Comme le champ des vitesses, le champ des masses volumiques dépend de $\vec{r}$ et t.

Considérons une particule de fluide dans un écoulement : entre les instants t et t+ dt, elle se déplace du point M(x, y, z) au point M'(x+dx, y+dy,z+dz) avec naturellement :

$$dx = v_x dt \; ; \; dy = v_y dt \; ; dz = v_z dt \; .$$

Sa masse volumique varie, car on change de point, et d'instant ; la dérivée correspondante est dite particulaire et notée $\frac{D\rho}{Dt}$, avec :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{dt \to 0} \left[\frac{\rho(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt) - \rho(x,y,z,t)}{dt}\right]$$

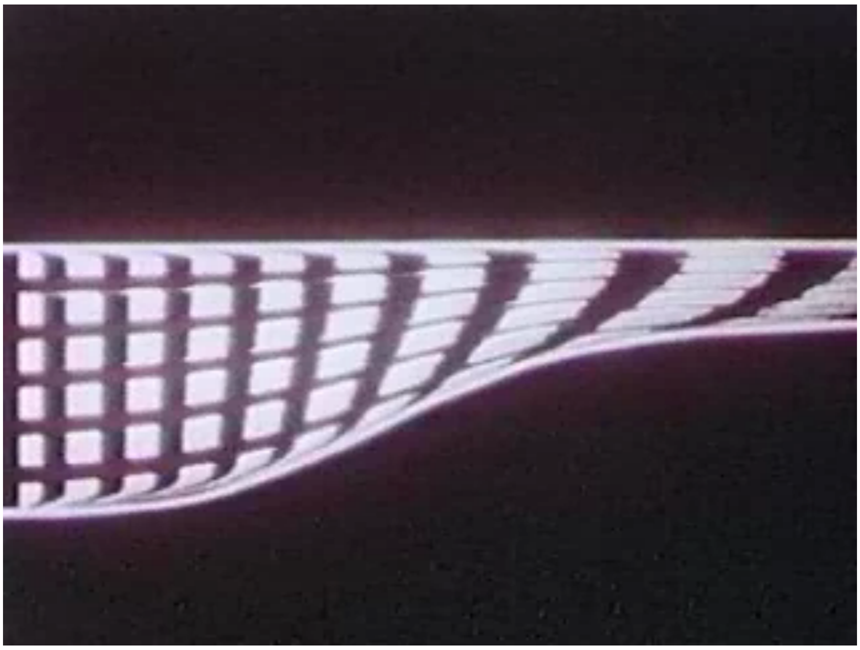
Une variation de ρ s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\rho(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt) - \rho(x,y,z,t) = d\rho(x,y,z,t) \\
&= \frac{\partial\rho}{\partial x}.dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}.dy + \frac{\partial\rho}{\partial z}.dz + \frac{\partial\rho}{\partial t}.dt \\
&= \frac{\partial\rho}{\partial x}.v_x dt + \frac{\partial\rho}{\partial y}.v_y dt + \frac{\partial\rho}{\partial z}.v_z dt + \frac{\partial\rho}{\partial t}.dt \\
&= (\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\rho.dt + \frac{\partial\rho}{\partial t}.dt
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{D\rho}{Dt} = (\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

L'opérateur D/Dt est appelée **dérivée particulaire** (ou en suivant le mouvement) ; le premier terme est la **dérivée convective**, due au fait qu'on regarde l'effet d'un changement de point à t donné, le second terme est la **dérivée locale** : on regarde en un même point la variation temporelle.



Définition : un écoulement incompressible est un écoulement pour lequel $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

Le caractère incompressible d'un écoulement ne dépend pas du référentiel considéré.

4. Equation locale de conservation de la masse.

4.1. Principe du bilan :

Le principe du bilan d'une grandeur G est toujours le même : un volume V donné de l'espace – fixe - en contient une certaine quantité à t .
On regarde la variation de G contenu dans V pendant dt.
Si cette quantité a varié, cela ne peut être que pour deux raisons :

- Soit du G est passé à travers la frontière de V ;
- Soit du G s'est transformé en autre chose.

Ce dernier cas peut ne pas se produire, par exemple en mécanique classique la masse ne peut se transformer !

4.2. Equation locale de conservation de la masse :

Reprenons le petit élément de volume dV, qui servira pour tous les bilans **locaux**.

La grandeur dont on fait le bilan est la masse M contenue dans dV.

On suppose que la vitesse du fluide est $\vec{v} = v(x, y, z, t).\overrightarrow{u_x}$.

La masse contenue dans le volume V à l'instant t est :

$$dM(t) = \rho(\vec{r},t).dV$$

et à l'instant t+ dt :

$$dM(t+dt) = \rho(\vec{r}, t+dt).dV$$

Entre les instants t et t+ dt, la masse contenue dans V a donc varié de :

$$d^2M = dM(t+dt) - dM(t) = dM/dt.dt \quad \text{car dM ne dépend que de t}$$

$$= [\rho(\vec{r}, t+dt) - \rho(\vec{r}, t)].dV = \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t}.dt.dV$$

La masse traversant les frontières du volume considéré est :

$$d^2m = \rho(x,y,z,t).\vec{v}.(x,y,z,t).dS.\overrightarrow{u_x}.dt - \rho(x+dx,y,z,t).\vec{v}(x+dx,y,z,t).dS.dt.\overrightarrow{u_x}$$

$$= \rho(x,y,z,t).v_x.(x,y,z,t).dS.dt - \rho(x+dx,y,z,t).v_x(x+dx,y,z,t).dS.dt$$

$$= \frac{\partial \rho.v_x}{\partial x}.dx.dS.dt \text{ avec } dx.dS = dV$$

Or on a naturellement : dm = -dM ; on en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} = 0$$

Cette équation se généralise à trois dimensions par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho.\vec{v}) = 0}$$

4.3. Condition nécessaire et suffisante :

Formule d'analyse vectorielle (à ne pas retenir !) :

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \rho.\operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\rho = \rho.\operatorname{div}(\vec{v}) + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\rho$$

L'équation de continuité peut s'écrire : $\rho.\operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\Leftrightarrow \rho.\operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Pour un écoulement incompressible on a donc :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

On peut montrer qu'un critère d'incompressibilité est v<<c, où c est la célérité du son dans le fluide.

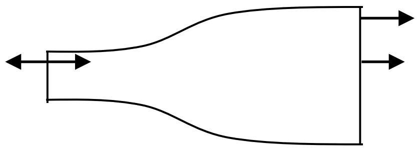
4.4. Cas particulier de l'écoulement stationnaire :

Dans ce cas l'équation de conservation de la masse s'écrit sous forme locale :

$$div(\rho.\vec{v}) = 0$$

et sous forme intégrale :

$$\oiint \rho(\vec{r},t).\vec{v}.(\vec{r},t).\overrightarrow{dS} = 0$$: le débit de masse se conserve.

Exemple : 

$$\oiint_S \rho.\vec{v}.d\vec{S} = \iint_{S_1} \rho.\vec{v}.d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \rho.\vec{v}.d\vec{S}_2 = -\rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2 = 0$$

5. Dérivée particulaire du champ des vitesses : champ des accélérations :

La démonstration est similaire à celle effectuée pour la masse volumique.

On considère une particule dans un écoulement : entre les instants t et t+ dt, elle se déplace du point M(x, y, z) au point M'(x+dx, y+dy,z+dz) avec naturellement :

$$dx = v_x dt \,;\; dy = v_y dt \,; dz = v_z dt\,.$$

Son accélération au temps t est en description eulérienne notée $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$; elle s'écrit :

$$\vec{a} = \lim_{dt \to 0} \left[\frac{\vec{v}(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - \vec{v}(x, y, z, t)}{dt}\right]$$

$$\vec{v}(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - \vec{v}(x, y, z, t) = d\vec{v}(x, y, z, t)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}.dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}.dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}.dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.dt$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}.v_x dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}.v_y dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}.v_z dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.dt$$

$$= (\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v}.dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.dt$$

On a donc

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Le premier terme est l'accélération **convective**, due au fait qu'on regarde l'effet d'un changement de point à t donné, le second terme est l'accélération **locale** : on regarde en un même point la variation temporelle.

Remarque : $(\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v} + = \overrightarrow{grad}\frac{\vec{v}^2}{2} + \left(\overrightarrow{rot}\vec{v}\right)\wedge\vec{v}$

Exemple : tuyère convergente en régime permanent.

4.3.Généralisation :

L'opérateur dérivée particulaire est :

$$\frac{D}{Dt} = (\vec{v}.\overrightarrow{grad}) + \frac{\partial}{\partial t}$$

6. Ecoulement rotationnel : vecteur tourbillon :

6.1. Circulation du champ des vitesses : opérateur « rotationnel » :

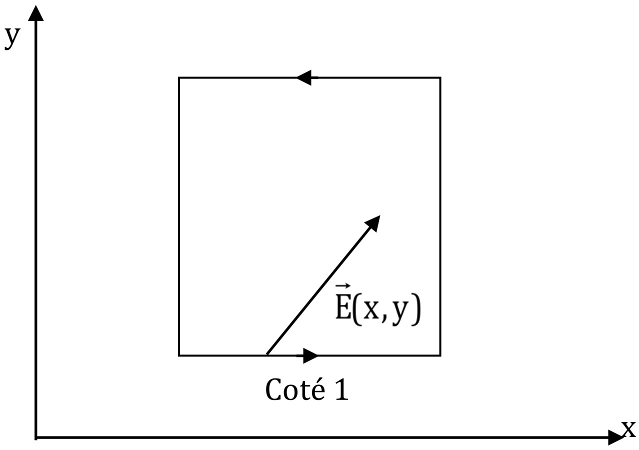
Définition : la circulation du champ $\vec{v}$ sur une courbe AB orientée :

$$C_{A\to B} = \int_A^B \vec{v}.\vec{dl}$$

Lorsque la courbe est fermée, elle est appelée contour fermé et l'on note :

$$C_{A\to A} = \oint \vec{v}.\vec{dl}$$

Calculons la circulation élémentaire sur un contour plan orienté de cotés dx et dy en coordonnées cartésiennes.



Il faut orienter le contour - de manière arbitraire - , son vecteur surface sera orientée en concordance par la règle du tire-bouchon par exemple.
Ici la surface élémentaire de la boucle orientée est $d\vec{S} = dx.dy.\vec{u}_Z$.

La circulation élémentaire du champ des vitesses est alors :

$$dC = \vec{v}(x,y).dx.\vec{u}_x + \vec{v}(x,y+dy).(-dx.\vec{u}_x) + \vec{v}(x+dx,y).dy.\vec{u}_y + \vec{v}(x,y).(-dy).\vec{u}_y$$

$$= v_x(x,y).dx - v_x(x,y+dy).dx + v_y(x+dx,y).dy - v_y(x,y).dy$$

$$= -\frac{\partial v_x}{\partial y}.dy.dx + \frac{\partial v_y}{\partial x}.dy.dx$$

$$= (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}).dy.dx$$

$$= (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}).\vec{u}_z.d\vec{S}$$

Le terme $(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})$ est la composante selon z du vecteur rotationnel du champ des vitesses.

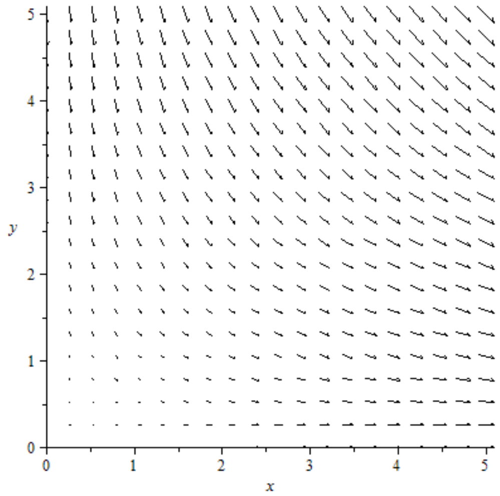
Remarque : on a omis les variables z et t pour ne pas surcharger.

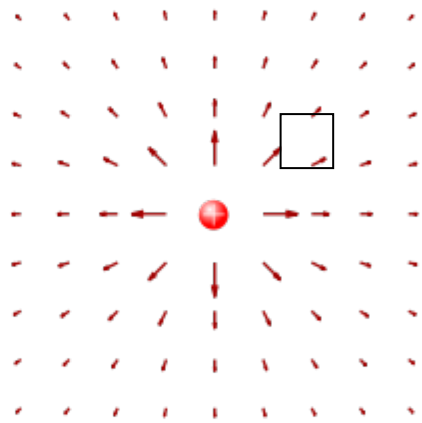
En cartésiennes, on a $\overrightarrow{rot}\vec{v} = (\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}).\vec{u}_x + (\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}).\vec{u}_y + (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}).\vec{u}_z$.

Le rotationnel est un vecteur dont les composantes représentent une circulation par unité de surface.

Il est assez difficile de voir sur une carte de champ si un champ est à rotationnel nul ou pas ! On peut dire en première approximation qu'un champ à rotationnel non nul « tourne » localement.

Exemples :





6.2. Théorème de Stokes :

Soit une surface S ouverte et orientée en concordance avec le contour C sur lequel elle s'appuie :

$$\oint \vec{A}(M).d\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{A}(M).d\vec{S}$$

Dans le cas d'un écoulement rotationnel (ou tourbillonnaire) : $\overrightarrow{rot}\vec{v} \neq \vec{0}$.

Définition : le vecteur tourbillon est :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{v}$$

7. Ecoulement irrotationnel : potentiel des vitesses :

Définition : $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$

Or on a (formule d'analyse vectorielle) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\psi) = \vec{0}$

On en déduit $\vec{v} = \overrightarrow{grad}\varphi$ où φ est appelé potentiel des vitesses.

L'écoulement est alors dit « potentiel ».

Remarque : dans le cas particulier d'un écoulement irrotationnel incompressible , ϕ vérifie l'équation de Laplace :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ ) = \Delta$$ où $\Delta\varphi$ est le Laplacien de φ.

Le caractère irrotationnel d'un écoulement dépend du référentiel considéré.