

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS – EXERCICES

1. Oscillations d'un fluide :

On considère un tube en U de section uniforme S rempli de fluide, la longueur de fluide étant L .

La vitesse sera considérée comme uniforme sur une section droite S de tube.

Etablir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$, hauteur de la surface libre du fluide par rapport à la position d'équilibre dans l'une des branches, en utilisant l'équation d'Euler intégrée sur une ligne de courant joignant deux points de la surface libre.

2. Surface libre d'un écoulement stationnaire:

Soit un écoulement stationnaire de fluide parfait incompressible caractérisé par $\vec{v} = v(r) \cdot \vec{u}_\theta$ en coordonnées cylindriques.

Dans le domaine $r < a$, on a $\text{rot}(\vec{v}) = 2\Omega \cdot \vec{u}_z$, uniforme, et dans le domaine $r > a$ $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$.

Déterminer le champ des vitesses puis l'allure de l'isobare $P = P_0$, pression atmosphérique. Que représente-t-elle?

On donne : $\text{rot}(v(r) \cdot \vec{u}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v(r)) \cdot \vec{u}_z$

3. Clepsydre :

Un vase cylindrique de rayon R est percé d'un petit orifice circulaire. On désigne par h la hauteur du liquide au-dessus de cet orifice. A la sortie du récipient, la veine de liquide est assimilée à un cylindre de rayon r dans lequel le fluide a une vitesse V .

a) En considérant que dans le récipient l'écoulement est irrotationnel, montrer que $V = \sqrt{2gh}$.

b) Exprimer la loi $h(t)$ donnant la hauteur h de liquide au-dessus de l'orifice en fonction du temps. On désignera par h_0 la hauteur initiale.

A.N.: Calculer t pour $R = 5 \text{ cm}$; $r = 2 \text{ mm}$; $h_0 = 10 \text{ cm}$; $g = 9,81 \text{ SI}$.

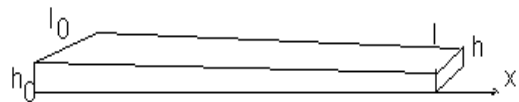
Réponses : b) $\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - (r/R)^2 \cdot t \cdot \sqrt{g}/2$; $t = 89 \text{ s}$.

4. Régimes d'écoulement dans un canal ; régimes torrentiel et fluvial.

Un long canal à fond horizontal possède localement une section rectangulaire. Soit $l(x)$ la largeur du canal, $h(x)$ la hauteur d'eau, et $v(x)$ la vitesse de l'eau supposée uniforme dans une section droite.

On supposera que les variations éventuelles de $l(x)$ le long du canal, soit avec les notations de la figure : $dl/dx \ll 1$: ainsi les lignes de courant sont rectilignes et parallèles aux génératrices du canal.

L'eau est assimilée à un fluide parfait et on se limite au cas d'un écoulement permanent et irrotationnel.



a) Exprimer le débit volumique D_v du canal en fonction de l , h et v . Que peut-on dire de ce débit

long du canal ? Dans quelle mesure cette conclusion est-elle valable pour une rivière ?

b) Montrer que $h + v^2/2g = h_s$, où h_s est une constante que l'on exprimera en fonction de h_0 et de v_0 .

c) Montrer que le débit volumique peut s'exprimer en fonction de h , l , h_s et h . Tracer le graphe représentant $D_v/(l\sqrt{2g})$ en fonction de h pour l donné.

Quelle est la valeur maximale $D_{\max}$ de ce débit ? Quelle est la hauteur h_c correspondant à ce débit maximal ?

Calculer numériquement D_m pour $l = 10 \text{ m}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$. Quelle est la vitesse v correspondante ? On donne

$h_0 = 5 \text{ m}$ et $v_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$.

d) Montrer graphiquement que pour $D < D_m$ et pour une largeur l donnée, il existe deux valeurs h_1 et h_2 possibles pour h , avec : $h_1 < h_c < h_2 < h_s$.

La solution h_1 correspond au régime " torrentiel " , la solution h_2 au régime " fluvial ".

e) On suppose que l subit un petit rétrécissement progressif et passe de l à l' = l(1 - ε), avec 0 < ε << 1. Dans quel sens se modifie h ?

Discuter suivant que l'on est en régime fluvial ou torrentiel. Applications à des piles de pont.

Réponses : c) $D = l.h. \sqrt{2g(h_s - h)}$; $Dm = 195 \text{ m}^3.s^{-1}$; $v = 5,8 \text{ m.s}^{-1}$.

5. Vent géostrophique :

Lorsque sur terre les isobares ne sont plus des plans horizontaux, il apparaît une composante horizontale du gradient de pression à l'origine du vent. L'air est animé alors d'une vitesse horizontale.

On considère que la masse volumique de l'air est constante et que l'écoulement est parfait.

On rappelle l'expression de la force volumique d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_C = -2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{V}$ où $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique.

a) Ecrire l'équation locale de la dynamique des fluides. On adoptera un repère local dans lequel Oz est la verticale ascendante, Ox pointant vers l'Est et Oy vers le Nord.

b) On considère des vents de vitesse typique $V = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$ évoluant sur une durée $\tau = 10$ jours et sur une échelle spatiale $L = 10 \text{ km}$. Montrer que l'accélération particulière est négligeable devant l'accélération de Coriolis (approximation géostrophique).

c) Projeter alors l'équation obtenue et en déduire l'expression du vent géostrophique $\vec{V}_g$ en fonction des composantes de $\vec{\nabla}P$. Quelle direction prend-il par rapport aux isobares ? On pourra montrer que

$\vec{V}_g = \alpha \vec{u}_z \wedge \vec{\nabla}P$ où α est une constante.

d) La pression chute typiquement de 10 hPa de Paris à Calais (distance 200 km). Quel est l'ordre de grandeur du vent géostrophique à la verticale d'un point situé entre Paris et Calais ($\lambda = 48^\circ$). Que se passerait-il si Paris et Calais étaient dans l'hémisphère Sud ?

6. Effet Magnus :

Soit un fluide incompressible de masse volumique ρ en écoulement permanent uniforme à vitesse $\vec{V} = V_o \cdot \vec{u}_x$.

On y place un cylindre « infini » de rayon R, d'axe Oz, affecté d'un mouvement de rotation à vitesse constante $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_z$. Soit M un point de l'écoulement résultant.

On adopte les coordonnées cylindriques r, θ, z , l'origine étant prise en O.

a) On admet que l'écoulement autour du cylindre est potentiel, la vitesse dérivant du potentiel :

$$\varphi = r \cdot V_o \cos\theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma\theta}{2\pi}$$

Calculer le champ des vitesses ; vérifier qu'il vérifie les conditions aux limites.

b) Exprimer la loi de pression $P(\theta)$ de la couche de fluide en contact avec le cylindre en fonction de ρ, V_o, Γ et $P_1 = P(r=R, \theta=\pi/2)$.

c) En déduire la portance pour une hauteur h de cylindre, en fonction de ρ, Γ, V_o et h. Montrer que cette force se met sous la forme $\vec{F} = a\vec{V}_o \wedge \vec{\omega}$, où la constante a sera exprimée en fonction de ρ, R et h.

Cette force s'appelle la force de Magnus, elle est responsable des effets de « lift » des balles de tennis par exemple, et sert à la propulsion de certains navires (voile de Flettner).

d) Justifier que le calcul de la traînée donnera un résultat nul ; est-ce la cas en réalité ? Pourquoi ?

7. Etude d'un siphon :

Un siphon permet l'écoulement de l'eau d'un réservoir de grandes dimensions. Il est constitué d'un tuyau de rayon r dont la partie centrale s'élève à une hauteur d au-dessus de la surface libre.

L'extrémité du tube se trouve à la hauteur h en dessous de la partie centrale.

a) Le point A est à la surface de l'eau du réservoir. Justifier que $v_A \ll$

b) Les points A, B et C étant sur une même ligne de courant,

démontrer que la vitesse de vidange en C est $v_C = \sqrt{2g(h-d)}$.

c) Calculer la pression en B.

