

ONDES ELECTROMAGNETIQUES PLANES –EXERCICES

Onde plane (ENAC 03)

Une onde progressive plane sinusoïdale de fréquence $4,78.10^8$ Hz se propage dans le vide. L'axe de propagation Ou appartient au plan (yOz) du référentiel et $(Oy, Ou) = \theta$.

c désigne la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3.10^8$ m.s⁻¹).

- Calculer la pulsation et le module du vecteur d'onde.
- Déterminer l'expression de la phase $\phi(\mathbf{r}, t)$ de l'onde au point $M(x, y, z)$ et à la date t , sachant qu'elle est nulle à l'origine O et à l'instant $t = 0$.
- Ecrire l'équation cartésienne des plans d'onde et calculer le temps mis par l'onde pour aller du plan d'onde passant par l'origine au point M .
- Le champ électrique $\mathbf{E}$ au point $M(x, y, z)$ et à la date t est en Vm^{-1} :

$$\vec{E} = 4\sin\Phi(\vec{r}, t)\vec{u}_x - 4\sin\theta.\cos\Phi(\vec{r}, t)\vec{u}_y + 4.A.\cos\Phi(\vec{r}, t)\vec{u}_z$$
 Calculer la valeur de la constante A et la norme de $\mathbf{E}$.
- Déterminer l'état de polarisation de l'onde.
- Déterminer le champ magnétique $\mathbf{B}$ en M à la date t .

Onde plane (ICNA 00)

Une onde progressive plane monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 6.10^{-7}$ m, se propage dans le vide. A tout instant t , son vecteur champ électrique complexe $\vec{E}$ au point $P(x, y, z)$ a pour composantes cartésiennes $\underline{E}_x, \underline{E}_y, \underline{E}_z$ avec :

$$\begin{cases} \underline{E}_z = 0 \\ \underline{E}_x = E_0 \exp j\Phi \text{ où } \Phi = \frac{k}{3}(2x+2y+z) - \omega t \end{cases}$$

L'amplitude E_0 vaut $10^{-4}Vm^{-1}$. j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

k et ω sont deux scalaires réels positifs.

- Calculer la fréquence N de l'onde.
 - A quel domaine cette fréquence appartient-elle ?
 - Calculer la valeur numérique de k .
 - Indiquer l'équation cartésienne des plans d'onde.
 - Etablir l'expression de $\underline{E}_y$ en fonction de $\underline{E}_x$. Indiquer si ces deux composantes de $\mathbf{E}$ sont en phase ou en opposition de phase.
- Calculer en fonction de $\underline{E}_x$ les composantes cartésiennes du vecteur champ magnétique complexe $\mathbf{B}$ de l'onde.
- Calculer en fonction de Φ la densité d'énergie électromagnétique u au point P et à la date t .
 - Calculer la valeur numérique de la valeur moyenne $\langle u \rangle$ de u déterminée sur une période. Exprimer $\langle u \rangle$ en eV.
 - Calculer en fonction de Φ les composantes cartésiennes du vecteur de Poynting $\mathbf{R}$ de l'onde.
 - Calculer les valeurs numériques de la période T_R et de la valeur temporelle moyenne de $\mathbf{R}$.

Superposition de deux ondes planes (ENSI) :

Deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement selon Oz se propagent, dans le vide, selon les x croissants.

A l'origine, le champ électrique de la première s'écrit $E_1.\cos(\omega_1 t)$, et celui de la seconde $E_2.\cos(\omega_2 t + \theta)$.

- Ecrire les champs électriques des deux ondes en un point M quelconque ; en déduire le champ électrique total.
- Ecrire le champ magnétique de l'onde.
- Calculer les valeurs moyennes ϕ_1 et ϕ_2 des vecteurs de Poynting de chaque onde.
- Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'onde résultante.

Superposition de deux ondes planes synchrones :

Deux ondes électromagnétiques planes sinusoïdales de même fréquence ν , polarisées rectilignement selon Oz, se propagent dans le vide dans le plan Oxy suivant deux directions symétriques par rapport à Ox et faisant les angles θ et $-\theta$ avec Ox.

Les champs électriques E_1 et E_2 de ces ondes ont même amplitude E_0 et vibrent en phase en O.

- Exprimer $E_1(r, t)$ et $E_2(r, t)$.
- Calculer le champ électrique E résultant ainsi que le champ magnétique B résultant.
- L'onde résultante est-elle plane ? Quelle est sa direction de propagation ?
- Exprimer sa vitesse de phase v_ϕ et sa longueur d'onde en fonction de ν , θ et c .

AN : $\nu = 10 \text{ MHz}$; $\theta = 30^\circ$; $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

e) Calculer la puissance moyenne transportée par l'onde à travers une surface S parallèle au plan Oyz, de largeur $Y = 2\pi/k\cos\theta$ selon Oy et de hauteur H selon Oz.

f) Calculer la densité moyenne d'énergie ém contenue dans un volume de longueur X_0 , de largeur $Y = 2\pi/k\cos\theta$ selon Oy et de hauteur H selon Oz.

f) En déduire la vitesse de propagation de l'énergie de l'onde résultante. Que vaut le produit $V.v_\phi$?

Réponses : b) $E = 2E_0\cos(\omega t - kx\cos\theta).\cos(ky\sin\theta).u_z$;

$B = 2E_0/c.\sin(\omega t - kx\cos\theta).\sin(ky\sin\theta).\sin\theta.u_x - 2E_0/c.\cos(\omega t - kx\cos\theta).\cos(ky\sin\theta).\cos\theta.u_y$.

a) $V = c.\cos\theta$; $v_\phi = c/\cos\theta$.

PUISSANCE TRANSMISE PAR UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE (CCP PSI 99)

On considère une onde électromagnétique localement plane, polarisée rectilignement, monochromatique et progressive, se propageant dans le vide ; son champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \cos(ky - \omega t) \vec{u} \quad \text{où } \vec{u} \text{ est un vecteur unitaire.}$$

- Préciser la signification du vecteur k et donner la valeur de son module k ($\vec{k} = k.\vec{n}$, $\vec{n}$ étant un vecteur unitaire).
- Exprimer le champ magnétique de cette onde.
- Exprimer la densité moyenne d'énergie électromagnétique (on la notera $\langle w \rangle$).
- Exprimer le vecteur de Poynting dont le module est Π . Quelle est son interprétation ?
- Quelle est la valeur de Π / w ? Commenter.

On considère une source de rayonnement électromagnétique placée à la surface de la terre. Sa puissance moyenne est P_0 , elle émet dans le demi-espace supérieur (2π stéradians, voir figure).

La densité de puissance par unité de surface P n'est fonction que de la distance R à l'émetteur et ne dépend pas de la direction (antenne « omnidirectionnelle »).

- Calculer P à la distance R .
- Calculer la valeur de E_0 à la distance R , en fonction de la puissance totale P_0 émise par la source. On admettra que R est toujours très supérieur à la longueur d'onde et aux dimensions de l'antenne émettrice.

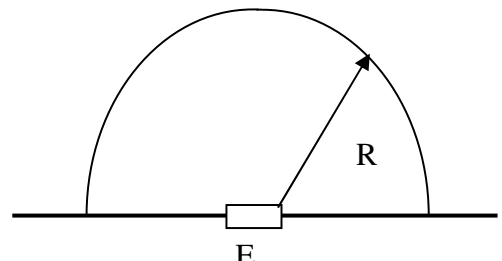
Applications numériques :

1) On considère un émetteur continu puissant : $P_0 = 1 \text{ kW}$.

Calculer E_0 pour $R = 1000 \text{ m}$ et $R = 1000 \text{ km}$.

2) Quels sont les ordres de grandeurs des différences de potentiel dans un circuit intégré ? En sachant qu'une modification de 10% des potentiels introduits déjà des dysfonctionnements graves, est-il indispensable de blinder les circuits ? On admettra que la surface du circuit intégré est de 1 cm^2 .

3) On admettra que pour ce rayonnement, on sait détecter un signal $E_0 = 10 \mu\text{V.cm}^{-1}$; peut-on détecter l'émetteur à $R = 1000 \text{ km}$?



DISPERSION ABSORPTION –EXERCICES

1. Influence de la viscosité de l'air (d'après CCP PSI 03) :

On se propose de prendre en compte la viscosité dans l'étude de la propagation des ondes acoustiques ; on rappelle que la densité volumique des forces de viscosité s'écrit $d\vec{F}/dV = \eta \Delta \vec{v}$.

On considère une onde plane de la forme $\vec{v} = v(x,t) \cdot \vec{u}_x$.

a) Etablir que l'équation de propagation de $v(x,t)$ et de $p(x,t)$ est dans l'approximation acoustique.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t}$$

dans laquelle c et β sont des constantes à définir.

b) On cherche pour la surpression complexe une solution de la forme $p(x,t) = p_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}x))$ avec $\underline{k}$ complexe : $\underline{k} = k_1 - jk_2$ (k_1 et k_2 réels positifs). En déduire la relation de dispersion d'une OPPM.

c) Pour l'air on donne : $\eta = 10^{-5}$ SI et $\rho_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$. Calculer l'ordre de grandeur de $\eta\omega/\rho_0 c^2$ et en déduire une expression approchée de k_1 et k_2 .

d) Donner l'expression réelle $p(x,t)$ de la surpression.

e) Donner l'expression de la vitesse de phase. Y a-t-il dispersion ?

Sur quelle distance caractéristique l'onde sonore est-elle absorbée ?

f) Si l'on utilise des ultrasons dans l'air, quelle gamme de fréquence est-il préférable d'utiliser pour limiter leur atténuation au cours de la propagation ?

1. Profondeur de peau d'un conducteur :

On cherche à propager un champ de pulsation ω :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}x))$$

dans un conducteur de conductivité γ occupant le demi-espace $x > 0$.

On considère que $\rho = 0$.

a) Rappeler les équations de Maxwell et la relation liant $\vec{j}$ et $\vec{E}$ dans le conducteur.

b) En déduire que la relation de dispersion dans le conducteur s'écrit :

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0 \gamma \omega + \frac{\omega^2}{c^2}$$

c) Montrer que dans un bon conducteur (cuivre) et aux fréquences usuelles l'un des deux termes est négligeable devant l'autre. Que vaut alors k ?

d) En déduire l'expression de E sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-\frac{x}{\delta}) \cdot \cos(k'x - \omega t)$$

où δ est appelé profondeur de peau du conducteur.

e) Calculer δ pour $f = 100 \text{ MHz}$ puis $f = 10^{15} \text{ Hz}$.

Données : **rotrot** = **grad.div** - Δ ; $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

2. Matériau supraconducteur :

Un matériau supraconducteur présente les constantes électrique et magnétique du vide (ϵ_0 et μ_0) mais la loi d'ohm y est remplacée par la relation constitutive dite de London :

$$\Lambda \vec{j} = -\vec{A}$$

où J est la densité de courant, A le potentiel vecteur et Λ une constante caractéristique du matériau étudié.

a) Quelle est la dimension de Λ ?

b) Trouver l'équation vérifiée par le champ magnétique B .

c) Quand B ne dépend pas du temps, comment variera-t-il au voisinage de la surface (supposée plane et infinie) d'un supraconducteur immergé dans un champ extérieur parallèle à cette surface ? Quelle est l'épaisseur de peau du matériau supraconducteur ?

- d) En régime variable, la densité de courant est la somme de deux termes : l'un j' , satisfaisant à la loi d'Ohm, l'autre j'' obéissant à la loi de London. Donner la relation de dispersion pour une onde plane de pulsation ω et de nombre d'onde k propagée dans le milieu.

3. Corde soumise à un frottement fluide :

On considère une corde de masse linéique μ et soumise à une tension au repos T_0 .

Un élément de corde est soumis à une force de frottement fluide

$$d\vec{f} = \mu dx \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t} \vec{u}_y$$

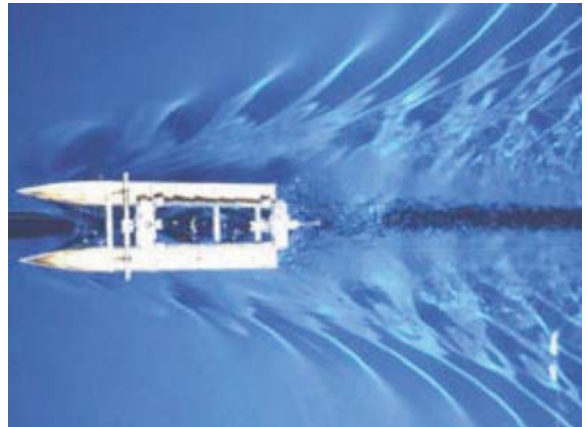
Montrer que l'équation d'onde s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Quelle est la relation de dispersion ?

5. Sillage d'un bateau (centrale PSI 07) :

- a) Montrer que l'on peut trouver une relation de dispersion $\omega = f(k)$ telle que les vitesses de groupe et de phase sont reliées par la relation simple $v_g = \eta \cdot v_\phi$, où η est une constante.
- b) Pour un bateau naviguant sur un bassin suffisamment profond, on peut estimer que la propagation des ondes de surface sera indépendante de la profondeur. On cherche alors une relation de dispersion de la forme $\omega = a g^\alpha k^\beta$, où a est une constante sans dimension. Déterminer les exposants α et β . Dans la suite on prendra $a = 1$.
- c) Le bateau est assimilé à un point matériel B de masse m , en mouvement pratiquement rectiligne uniforme de vitesse v . Il émet vers l'avant un paquet d'ondes de pulsation moyenne ω et dont le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ fait un angle θ avec la vitesse.
- On admet que $\omega = k \cdot v \cdot \cos\theta$.
- En déduire les vitesses de groupe et de phase en fonction de v et θ .
- d) Montrer qu'à l'instant t les paquets d'onde émis antérieurement dans la direction θ sont répartis sur une demi-droite de sommet B faisant avec la vitesse du bateau un angle ϕ tel que $\tan\phi = \sin\theta \cos\theta / (\cos^2\theta - 2)$ avec $\cos\phi < 0$.
- d) Etudier la fonction $\phi(\theta)$ et en déduire que le sillage est limité par deux demi-droites faisant un angle 2α .
- e) Vérifier cette valeur sur la photo du catamaran ci-contre.



6. Influence de la raideur d'une corde sur les fréquences propres :

On étudie les ondes transversales sur une corde de masse linéique μ et de tension T_0 .

La corde n'est pas infiniment souple et l'effet de sa raideur est caractérisé par une force $N(x)$ perpendiculaire à la corde et donnée par :

$$N(x_0, t) = -JE \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x_0, t)$$

exercé en x_0 par la partie de la corde $x > x_0$ sur la partie $x < x_0$, où J est un coefficient dépendant de la géométrie du problème et E le module d'Young de la corde.

On se place dans l'hypothèse des petites déformations et l'on néglige les effets de la pesanteur.

- a) Etablir l'équation de propagation vérifiée par $y(x, t)$.
- b) En déduire la relation de dispersion. En supposant que les effets de la raideur restent faibles, déterminer, au premier ordre en $a = JE/T_0$, la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
- c) La corde, de longueur L , est fixée à ses deux extrémités. Déterminer les pulsations propres de la corde et comparer aux pulsations propres d'une corde sans raideur.