DIFFUSION THERMIQUE –Exercices

faisant intervenir la conducto-convection

1. Barre non isolée latéralement :

Une barre cylindrique, d'axe Ox, de rayon R, section S et de longueur L, est constituée d'un matériau de conductivité thermique λ.
Les températures des deux extrémités sont T_1 et T_2 ; elle est plongée dans un fluide à température T_f.
On admet que la température est uniforme dans une section, soit T(x,t).
La barre évacue de l'énergie par sa surface latérale à raison d'une quantité h $(T - T_f)$ par unité de temps et de surface.
Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction T(x) en régime stationnaire ; en déduire la répartition de température dans la barre.

Barre non isolée latéralement : corrigé :

La température ne dépend que de z en régime stationnaire ; on a donc :

$$\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T(z)}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Entre t et t+dt, pour la tranche d'épaisseur dz , on a en régime stationnaire :

$$dU = 0 = j(z).\pi.R^2.dt - j(z+dz).\pi.R^2.dt - h[T(z)-T_f].2.\pi.R.dz.dt$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = -\frac{\partial j(z)}{\partial z}.dz.R - 2.h\big(T(z) - T_f\big).dz$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\partial^2 T(z)}{\partial z^2} - \frac{2.h}{\lambda R}\left(T(z) - T_f\right)$$

La solution générale s'écrit $T(z) = T_f + A.e^{-mz} + B.e^{mz}$ avec $m = \sqrt{\frac{2.h}{\lambda R}}$.

Les valeurs de A et B s'obtiennent avec les conditions aux limites :

$$T(0) = T_1 ; T(L) = T_2.$$

2. Refroidissement d'une sphère :

Soit une sphère de masse m, température initiale T_0 et que l'on refroidit en la plongeant dans un fluide à la température $T_f < T_0$. On désigne par C la chaleur massique de la sphère.
Cette sphère n'évacue la chaleur que par sa paroi externe de surface S à raison d'une quantité h $(T-T_f)$ par unité de temps et de surface, T désignant la température de la sphère à un instant quelconque, toujours supposée être à température uniforme, et h un coefficient constant.
a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par T(t).
b) Donner l'expression de T(t).

Refroidissement d'une sphère : corrigé :

a) On applique le premier principe à la sphère, entre un instant t et un instant t+ dt :

$$dU = \delta Q + \delta W.$$

$dU = m.C.dT$; $\delta W = 0$ car la sphère est solide ; $\delta Q = -h(T-T_f).S.dt$ avec $S = 4.\pi.R^2$
Le signe – traduit le fait que si $T > T_f$, la sphère perd de l'énergie.

Remarque : dans cet exercice il n'y a pas de diffusion thermique dans la sphère car sa température est uniforme ! C'est juste une utilisation de la loi de Newton.

On a donc :

$$m.C.dT = -h(T-T_f).S.dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{h.S}{m.C}(T - T_f) = 0$$

b) Solution :

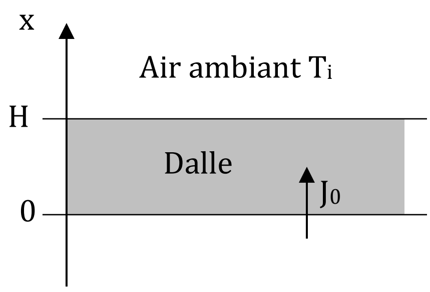
$$T(t) = A.exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_f \quad avec\ \tau = \frac{m.C}{h.S}$$

La condition initiale $T(0) = T_0$ donne finalement :

$$T(t) = (T_0 - T_f).exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_f$$

On constate que lorsque $t \to \infty$, $T \to T_f$; c'est normal !

3. Dalle chauffante :



On considère une dalle en béton (conductivité λ, épaisseur H),chauffée dans sa partie inférieure par un flux thermique surfacique J_0 constant. Cette dalle est surmontée d'air, avec lequel elle échange par conducto-convection un flux surfacique :

$$J_{dalle\to air} = h\,(T(H) - T_i).$$

a) Montrer qu'en régime stationnaire le flux thermique dans la dalle est uniforme.

b) Calculer T_i-T(H) pour h =6,7 SI et J_0 = 20,1 W.m^{-2}.

c) Déterminer la loi de température T(x) dans la dalle en régime permanent en fonction de H, h, λ, T_i et J_0.

Dalle chauffante : corrigé :

a) Dans la dalle n'existe aucune puissance cédée ou dissipée (pas de terme p_{vol}) , de plus on est en régime stationnaire : le flux thermique est donc conservé, il est uniforme.

Remarque : attention : le flux surfacique donné $J_{dalle\text{-}air}$ n'intervient qu'à la surface entre la dalle et l'air, **pas dans la dalle** !!!

b) La continuité du flux s'écrit pour une surface S :

$$J_0.S = J_{Q(\text{dans la dalle})}.S = J_{dalle\to air}.S$$

On en déduit :

$$J_0 = h\,(T(H) - T_i)$$

D'où :

$$T(H) - T_i = 3\ K = 3°C$$

c) En régime stationnaire, avec p_{vol} = 0, la loi de température dans la dalle est affine :

$$T(x) = A.x + B$$

Avec :

$$J_Q = -\lambda.A = J_0$$

Et :

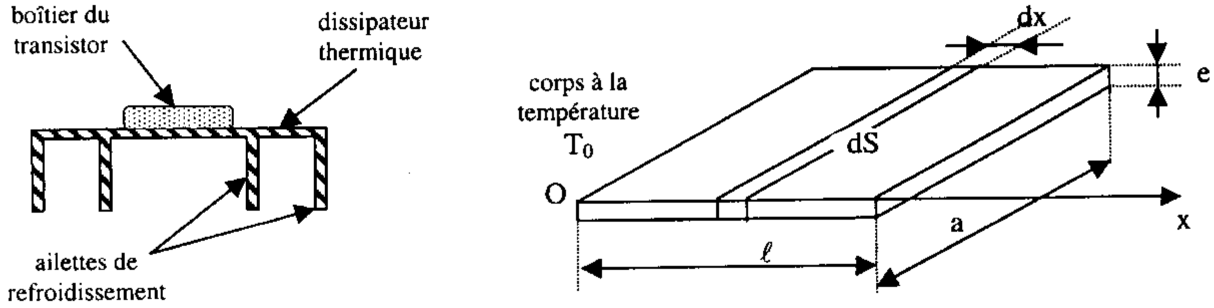
$$T(H) = A.H + B = T_i + J_0/h$$

On en déduit :

$$\mathbf{T(x) = -J_0.x/\lambda + (T_i + J_0/h + J_0.H/\lambda)}$$

4. Etude simplifiée d'un dissipateur thermique pour transistor (CCP PSI 01)

On ne peut pas toujours limiter la puissance dissipée dans un transistor. Pour pouvoir dissiper une puissance beaucoup plus élevée en limitant la température du composant, on monte le boîtier de certains transistors sur un dissipateur de chaleur muni d'ailettes de refroidissement (figure 10).



Une ailette de refroidissement en aluminium de conductivité thermique λ = 200 W m^{-1}.K^{-1} est fixée à un corps dont la température est T_o = 70°C constante et baigne dans l'air ambiant dont la température est constante et vaut T_a = 20°C . Le corps à la température T_o occupe le demi-espace x < 0.
L'ailette est d'épaisseur e = 2 mm, de largeur a = 3 cm, de longueur ℓ=2 cm.

On fait les hypothèses suivantes :
- le régime étudié est stationnaire
- la température d'un point de l'ailette n'est fonction que de x : elle sera donc notée T(x)
- a est très grand devant e (cf. valeurs numériques)
- la puissance thermique cédée à l'air extérieur par la surface latérale dS d'un élément de longueur dx (échanges conducto-convectifs) est : $dP = h\,[\,T(x) - T_a]\,dS$ avec $dS = 2\,(a + e).dx \approx 2a.dx$
où h est un coefficient constant : h = 150 S.I. (S.I. signifie : dans le système international).

1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la température T(x) de l'ailette peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{1}{L^2}\left(T(x)-T_a\right)=0$$

où L est une longueur caractéristique que l'on exprimera en fonction de λ, h et e.
2. Calculer la valeur numérique de L.
3. Justifier les deux conditions aux limites suivantes vérifiées par T(x) :

$$T(0) = T_o \text{ et } -\lambda\left(dT / dx\right)_{x=\ell} = h\left(T(\ell) - T_a\right).$$

4. En déduire la loi T(x) en fonction de x.
5. Montrer que compte-tenu de la longueur de l'ailette (ℓ= 2 cm), on peut supposer que la température de l'ailette est approximativement constante et égale à T_o : on montrera que la valeur absolue de $(T(\ell) - T_o) / T_o$ est voisine de 10%.
6. On considère que la température de l' ailette est effectivement constante et égale à T_o
a) Donner l'expression de la puissance thermique P échangée entre l'ailette et l'air ambiant.
b) Déterminer la puissance thermique P' échangée entre le corps à la température T_o et l'air ambiant par la surface d'aire S' = a.e en l'absence d'ailette (S' est la surface de base de l'ailette en x = 0).
c) En déduire l'expression de l'efficacité η = P / P' de l'ailette. Calculer sa valeur.