CHAPITRE 1 : SOURCES DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.1. Sources du champ électromagnétique	
5.1.1. Description microscopique et mésoscopique des sources	
Densité volumique de charges. Charge traversant un élément de surface fixe et vecteur densité de courant. Intensité du courant.	Exprimer la densité volumique de charge et le vecteur densité de courant en fonction de la vitesse moyenne des porteurs de charge, de leur charge et de leur densité volumique. Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant.
5.1.2 Conservation de la charge	
Équation locale de conservation de la charge.	Établir l'équation traduisant la conservation de la charge dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Citer et utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence, son expression étant fournie. Exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant en régime stationnaire ; relier cette propriété à la loi des nœuds de l'électrocinétique.
5.1.3 Conduction électrique dans un conducteur ohmique	
Loi d'Ohm locale. Conductivité électrique.	Établir l'expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique, l'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau étant décrite par une force de frottement fluide linéaire. Discuter de l'influence de la fréquence sur la conductivité électrique. Établir l'expression de la résistance d'une portion de conducteur filiforme.
Effet Hall.	Interpréter qualitativement l'effet Hall dans une géométrie parallélépipédique.
Effet thermique du courant électrique : loi de Joule locale.	Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique.

1. Charges et courants :

1.1. Rappel de PCSI :

La charge est quantifiée : q = z.e ou e est la charge élémentaire.
https://www.youtube.com/watch?v=feu644HOgIY

L'intensité est un débit de charges, ce qui se traduit par :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Les charges peuvent être portées par des particules (électrons, protons, etc..) ou par des ions.

1.2. Densités de charges :

A l'échelle macroscopique, les milieux n'apparaissent pas comme des systèmes discrets de charges, mais comme des systèmes continus ; on définit alors des densités de charge.

Définition : la densité volumique de charge en point M d'un milieu à un instant t est :

$$\rho(M,t) = \frac{dq}{d\tau} \quad ♡$$

où $d\tau$ est un élément de volume infinitésimal contenant la charge dq.

ρ s'exprime en C.m^{-3}.

Dans un milieu contenant une densité volumique n de porteurs de charges, chaque porteur ayant une charge q, la densité s'exprime par :

$$\boldsymbol{\rho = n.q} \quad ❤$$

Pour un système à deux dimensions (armature plane d'un condensateur par exemple) on peut définir une densité surfacique de charges.

Définition : la densité surfacique de charge en point M d'un milieu à un instant t est :

$$\sigma(M,t) = \frac{dq}{dS} \quad ♡$$

où dS est un élément de surface infinitésimal contenant la charge dq.
σ s'exprime en C.m^{-2}.

Pour un système à une dimension, on peut définir une densité linéique de charges.

Définition : la densité linéique de charge en point M d'un milieu à un instant t est :

$$\lambda(M,t) = \frac{dq}{d\ell} \quad ♡$$

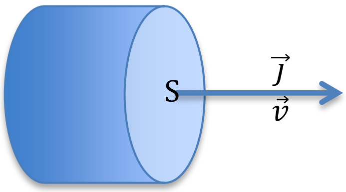
où dℓ est un élément de longueur infinitésimal contenant la charge dq.
λ s'exprime en C.m^{-1}.

1.3. Vecteur densité de courant :

Définition : vecteur densité de courant $\vec{j}(M,t)$: c'est un vecteur dirigé dans le sens du flux de charges, et dont la norme est égale à la charge traversant une surface unité perpendiculaire à $\vec{j}$ par unité de temps.

1.4. Lien entre $\vec{j}$ et ρ :

Considérons des porteurs de charges en densité ρ et ayant une vitesse $\vec{v} = v.\overrightarrow{u_x}$, et une surface S perpendiculaire à Ox, soit $\vec{S} = S.\overrightarrow{u_x}$.



La charge traversant la surface S pendant dt est celle qui est contenue dans un cylindre de longueur v.dt et de section S, soit :

$$dq = \rho.S.v.dt$$

On a alors :

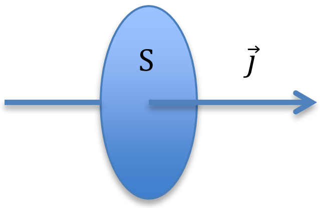
$$j = \frac{dq}{S.dt} = \rho.v$$

Cette forme se généralise :

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i.\vec{v_i} \quad \heartsuit$$

1.5. Lien entre $\vec{j}$ et i :

Considérons $\vec{j}(M,t) = j(x,t).\overrightarrow{u_x}$ et une surface S perpendiculaire à Ox, soit $\vec{S} = S.\overrightarrow{u_x}$.



La charge traversant la surface S pendant dt est par définition de j :

$$dq = j.S.dt$$

On en déduit que l'intensité et la densité de courant sont liées par :

$$i = j.S$$

Cette forme se généralise :

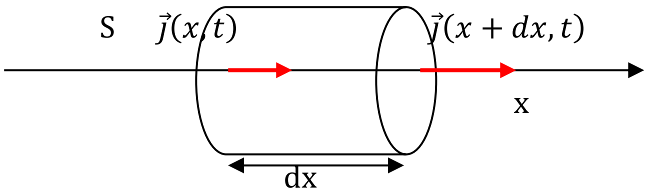
$$i = \iint_S \vec{j}(M,t).d\vec{S} \quad \heartsuit$$

2. Equation de conservation de la charge.

L'électromagnétisme postule la conservation de la charge : la charge ne peut être ni créée, ni détruite.

2.1. Démonstration :

En conséquence, si l'on considère un volume fixe dans l'espace et qu'on mesure sa charge, cette charge ne varie à l'intérieur de ce volume que si des charges sortent du volume, ou entrent dans ce volume.



On considère un volume de longueur dx et de section S d'un matériau chargé avec une densité volumique $\rho(x,t)$ entre les instants t et t+dt.
Dans ce volume existe une densité de courant $\vec{j} = j(x,t).\overrightarrow{u_x}$.

- La charge franchissant S à l'abscisse x pendant dt est $dq_1 = S.j(x, t).dt$
- Le charge franchissant S à l'abscisse x+dx pendant dt est $dq_2 = S.j(x + dx, t).dt$

La variation de la charge élémentaire contenue dans le volume S.dx est pendant dt :

$$dq(t+dt) - dq(t) = \rho(x,t+dt).S.dx - \rho(x,t).S.dx$$
$$= \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}.dt.S.dx$$

Or on a :

$$dq(t+dt) = dq(t) + dq_1 - dq_2,$$

Soit :

$$dq(t+dt) - dq(t) = S.j(x, t).dt - S.j(x + dx, t).dt,$$

d'où :

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

Généralisation :

$$\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0} \quad ♡$$

2.2. Cas du régime stationnaire : loi des nœuds :

$$\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

On a alors :

$$\boldsymbol{div(\vec{j}) = 0} \iff \oiint_S \vec{j}.d\vec{S} = 0$$

On en déduit que le flux de $\vec{j}$ est conservatif, ce qui traduit la **loi des noeuds**.

3. Conduction électrique dans un conducteur ohmique :

3.1. Modélisation microscopique :

On considère un métal, dans lequel les porteurs de charge (électrons) sont en densité volumique n.
Ils sont soumis à la force de Lorentz due au champ électromagnétique $\vec{E},\vec{B}$:

$$\vec{F}(\vec{r},t) = q(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t) \wedge \vec{B}(\vec{r},t))$$

et à l'interaction avec le réseau qu'on traduit par une force de frottement fluide :

$$\vec{f} = -m\frac{\vec{v}}{\tau}$$

pour une charge q de masse m.

La durée τ est la durée moyenne entre deux collisions successives d'un porteur de charges.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit :

$$-e(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}) - m\frac{\vec{v}}{\tau} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1)$$

3.2. Temps de relaxation du matériau :

Supposons que le champ soit coupé à t = 0.

$$\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{\vec{v}}{\tau}=\vec{0}$$
$$\vec{v}=\vec{v}(0).e^{-t/\tau}$$

La durée τ apparaît comme le temps de relaxation des électrons.

On calcule : $\tau = 2{,}4.10^{-14}$ s pour un bon conducteur (cuivre) .

3.3. Conductivité en champ stationnaire :

La solution de l'équation (1) est :

$$\vec{v}=\vec{A}.e^{-t/\tau}-\frac{e\tau}{m}(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$$

En régime permanent :

$$\vec{v}=-\frac{e\tau}{m}(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$$

On en déduit :

$$\vec{j}=-ne\vec{v}=\gamma_0\left(\vec{E}-\frac{\vec{j}}{ne}\wedge\vec{B}\right)$$

Avec :

$$\boldsymbol{\gamma_0=\frac{n.e^2.\tau}{m}}$$

3.4. Ordres de grandeur et conséquences :

Pour le cuivre : $\rho_m = 8{,}96$ g.cm^{-3} ; M = 63,5 g.mol^{-1} ; $\gamma = 5{,}8.10^7$ S.m^{-1} ; 1 électron libre par atome :

$$n \approx 8{,}5.10^{28}\ \text{électrons.m}^{-3}\ ;\ \rho_e = -\,1{,}4.10^{10}\ \text{C.m}^{-3}$$

Pour I = 1 A ; S = 1 mm^2 :

$$v = 7.10^{-5}\ \text{m.s}^{-1}$$

$$\|\vec{E}\| \approx \frac{j}{\gamma_0} = 2.10^{-2}\ V.m^{-1}$$

Dans un champ de 1 T :

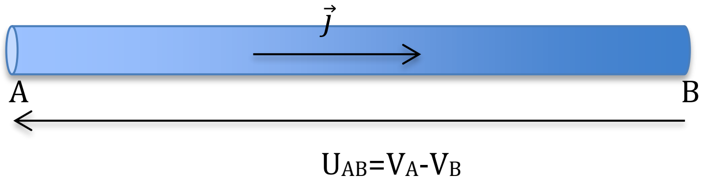
$$\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \approx 7.10^{-5}\, V.m^{-1}$$

On peut donc négliger la composante due à $\vec{B}$ dans un bon conducteur, mais pas dans un semi-conducteur (cf plus loin).

La loi d'Ohm locale dans un bon conducteur s'exprime donc :

$$\boldsymbol{\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}}$$ ♡

3.5. Résistance d'une portion de circuit filiforme :



On considère une portion de circuit de longueur l et de section S, parcouru par un courant i, et orienté selon i par un vecteur unitaire $\vec{u}$. On a :

$$\vec{j} = j.\vec{u}$$

En considérant $\vec{j}$ comme uniforme sur la section, on a :

$$I = j.S$$

L'intégration de la loi d'Ohm locale entre les extrémités A et B du fil donne, en admettant la relation (vue au chapitre suivant) :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

dans laquelle V est le potentiel électrique, fournit :

$$U_{AB} = \frac{l}{\gamma_0 S}.i$$

On retrouve la loi d'Ohm intégrale ; la résistance de la portion de fil est donc :

$$R = \frac{l}{\gamma_0 S}$$

On remarque que sa forme est strictement identique à celle de la résistance thermique.

3.6. Conductivité en champ variable :

On considère un champ éléctrique de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = \overrightarrow{E_0}.\cos(\omega t)$$

On suppose que la force magnétique est négligeable devant la force électrique.

En régime permanent, la vitesse des électrons sera également sinusoidale de pulsation ω.
On utilise donc la notation complexe, et l'équation (1) s'écrit :

$$-e\underline{\vec{E}} - m\frac{\underline{\vec{v}}}{\tau} = jm\omega\underline{\vec{v}}$$

On en déduit :

$$\underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m}\frac{1}{1+j\omega\tau}\underline{\vec{E}}$$

$$\underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$$

Avec :

$$\boldsymbol{\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}}$$

Le caractère complexe de la conductivité traduit un déphasage entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$.

3.7. Loi de Joule locale :

La puissance volumique dissipée dans le conducteur ohmique est donnée par :

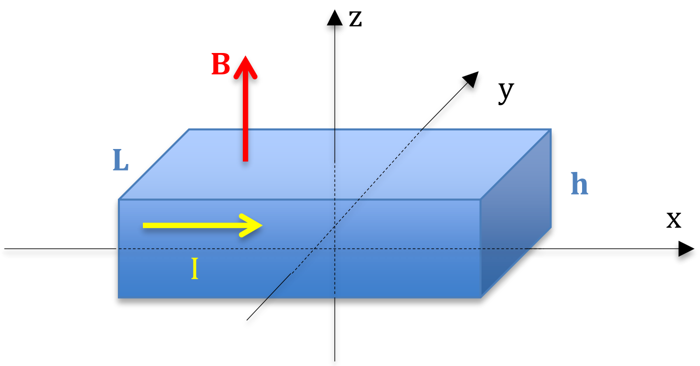
$$\boldsymbol{p_v = \vec{j}.\vec{E}}$$

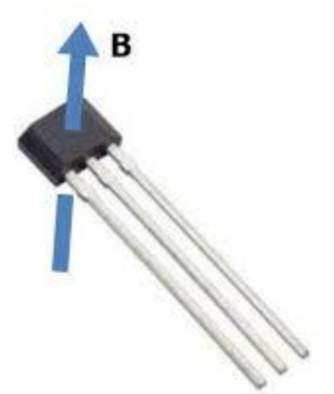
Attention : cette loi doit toujours etre calculée avec des champs réels.

4. Effet Hall :

Cette effet permet :

- Pour un matériau connu, de mesurer un champ magnétique.
- Pour un champ magnétique connu, de déterminer la densité n de porteurs d'un matériau, ainsi que leur signe.





On considère une plaque rectangulaire d'épaisseur h et de largeur L, petites devant la longueur du fil, et parcourue par un courant constant d'intensité I, uniformément réparti sur la section de la plaque et de densité de courant volumique :

$$\vec{j} = j.\overrightarrow{u_x} = \frac{I}{h.L}\overrightarrow{u_x}$$

La conduction électrique est assurée par des porteurs mobiles identiques, de charge q, de nombre par unité de volume noté n.

La plaque est placée dans un champ magnétique uniforme :

$$\vec{B} = B.\overrightarrow{u_z}$$

En régime stationnaire, on a comme précédemment :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \gamma\left(\vec{E} - \frac{\vec{j}}{ne} \wedge \vec{B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \; \vec{E} = \frac{j}{\gamma}\overrightarrow{u_x} + \frac{jB}{n.q}\overrightarrow{u_y}$$

On constate qu'il existe un champ électrique perpendiculaire à Ox, appelé champ de Hall :

$$E_H = R_H j.B$$

avec

$$R_H = \frac{1}{n.q}$$

Dans un bon conducteur le champ de Hall est faible ; on utilise un semi-conducteur, comme Si, pour lequel :

$$n = 10^{24}\ m^{-3}$$

La mesure de la différence de potentiel transversale $V_H = E_H.L$ permet de connaître le champ de Hall.