CINEMATIQUE DES FLUIDES – EXERCICES

1. Ecoulement à l'intérieur d'un diédre droit :

Soit dans la région x > 0 , y > 0 l'écoulement défini en eulérien par :

$$\vec{v} = k(-x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y)\text{, k constante positive.}$$

a) Quelle est l'unité de k ?
b) L'écoulement est-il stationnaire ?
c) Schématiser le vecteur vitesse en différents points de l'écoulement.
d) L'écoulement est-il incompressible ?

2. Conservation du débit :

On considère l'écoulement d'un gaz de masse volumique $\rho = 7{,}5\ \text{kg.m}^{-3}$ dans une conduite cylindrique de rayon R = 1cm.
a) Quelle est la vitesse d'écoulement du gaz si 500 g de ce gaz s'écoulent par demi-heure à travers une section du tuyau ?
b) Le tuyau subit un élargissement, le rayon passant à R' = 2 cm. Quelle est la vitesse dans la section élargie ?

3. Ecoulement bidimensionnel :

Le champ eulérien des vitesses d'un écoulement bidimensionnel est donné en coordonnée cartésiennes par $\vec{v} = (kx; ky; 0)$.
1. Cet écoulement est-il stationnaire ? Incompressible ? Tourbillonnaire ?
2. Calculer l'accélération d'une particule de fluide.
3. Représenter l'évolution d'un « carré » de fluide de côté a entre les instants t et t+dt.

4. Caractéristiques d'un écoulement

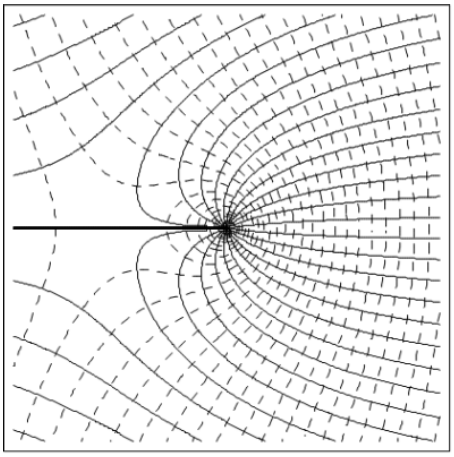
On considère un écoulement plan dépendant du temps caractérisé par un champ de vitesse eulérien :

$$\vec{v} = a\overrightarrow{e_x} + (bt + c)\overrightarrow{e_y} \text{ où a, b et c sont des constantes.}$$

1. Quelles sont les dimensions de a, b et c ?
2. L'écoulement est-il compressible ? Rotationnel ?
3. Existe-t-il un potentiel des vitesses ? Si oui, le déterminer en le prenant nul en x=y=0.
4. Déterminer l'accélération d'une particule de fluide dans ce champ de vitesse.

5. Etude d'une carte d'écoulement :

On considère la carte ci-contre modélisant un écoulement de fluide, et sur laquelle apparaissent des équipotentielles du potentiel des vitesses et des lignes de courant.
Le trait épais est une paroi rigide.
a) Identifier les lignes de courant et les équipotentielles. Justifier le fait que les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de vitesse.
b) Est-il possible de savoir dans quel sens s'écoule le fluide ?
c) Identifier les zone de vitesse élevée et de vitesse faible.
d) Comment pourrait-on créer un écoulement possédant ce champ de vitesses ?



6. Ecoulement de Poiseuille :

Un liquide de masse volumique ρ, s'écoule dans une conduite circulaire de rayon r_0 et d'axe Oz avec une vitesse en coordonnées cylindriques de la forme :

$$\vec{v} = v_0\left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)\overrightarrow{u_z}$$

a) L'écoulement est-il stationnaire ?

b) Est-il uniforme sur une section droite de la conduite ?
c) Calculer le débit massique D_m en fonction de ρ, v_0 et r_0.
a) Quelle est la vitesse moyenne V_m du liquide sur une section, définie par :

$$v_m = \frac{1}{S}\iint_S \vec{v}.d\vec{S}$$

7. Ecoulement engendré par une source rectiligne :

Une source rectiligne infinie, confondue avec l'axe Oz et de section négligeable, émet un fluide incompressible avec un débit volumique par unité de longueur de source λ, réparti uniformément le long de Oz et constant.
L'émission étant supposée isotrope dans chaque plan z = cste, les lignes de courant sont des droites radiales qui divergent à partir de Oz.
a) En quelle unité s'exprime λ ? Déterminer le champ de vitesse de cet écoulement .
b) L'écoulement est-il irrotationnel ? Si oui, quel est le potentiel des vitesses ? Quelles sont les surfaces équipotentielles ?

8. Mesure de température par une fusée-sonde (*) :

On considère une fusée-sonde effectuant un vol vertical dans une atmosphère dans laquelle la température décroît linéairement à partir du sol jusqu'à une altitude de 10000 pieds selon :

$$T(z) = T_0 - bz \text{ avec } b = 8.10^{-3}\ K.m^{-1}$$

L'engin est muni d'un capteur de température.
Calculer la variation temporelle de la température (en $K.s^{-1}$) mesurée par ce capteur lorsque la fusée s'élève avec une vitesse de 360 $km.h^{-1}$.
Réponses: - 0,8 $K.s^{-1}$.

9. Tornade (*) :

En coordonnées polaires, on modélise une tornade comme un écoulement plan avec deux champs de vitesse, l'un $\vec{v}_1 = r\omega\vec{e}_\theta$ pour une zone appelée cœur de la tornade comprise entre l'axe de rotation porté par $\vec{e}_z$ au centre de la tornade et un rayon caractéristique r_c, l'autre $\vec{v}_2 = \frac{a}{r}\vec{e}_\theta$ en dehors de cette zone $r > r_c$.

1. Exprimer a en fonction de r_c et ω.
2. Définir le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$. Quelle est sa direction pour l'écoulement considéré ?
3. En utilisant le rotationnel en cylindriques , donner l'expression du vecteur tourbillon au cœur de la tornade.
4. Retrouver le résultat en appliquant le théorème de Stokes.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

10. Expansion uniforme (*) :

Un fluide remplit tout l'espace. A l'instant t = 0, on communique à des particules de fluide une vitesse initiale qu'elles conservent ensuite : plus précisément, si τ désigne une constante donnée, la particule de fluide qui est initialement au point M_o acquiert une vitesse radiale et proportionnelle à sa distance OM_o à un point fixe O :

$$\vec{v}(M_0) = \frac{\vec{OM_o}}{\tau}$$

a) Déterminer le champ eulérien des vitesse à un instant t quelconque.
b) L'écoulement est-il stationnaire, incompressible, irrotationnel ?
c) Obtenir par le calcul le champ des accélérations et retrouver le résultat sans calcul.
d) On suppose que le fluide est homogène à tout instant. Déterminer la masse volumique $\rho(t)$ à l'instant t en fonction de la masse volumique initiale ρ_0.Interpréter cette expression en calculant la masse de fluide contenue à l'instant t dans la sphère de rayon $r(t) = r_0\,(1 + t/\tau)$.